



Università del Salento

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

TESI DI LAUREA

**Correzioni quantistiche
alla deflessione del fotone e del neutrino
in uno spazio-tempo curvo**

Candidato:
Marta Dell'Atti

Relatore:
Prof. Claudio Corianò

Correlatore:
Dott. Luigi Delle Rose

Anno Accademico 2013–2014

Indice

Introduzione	iv
1 Il Modello Standard in uno spazio-tempo curvo	1
1.1 Il gruppo di simmetria del Modello Standard	1
1.2 La lagrangiana del Modello Standard	2
1.2.1 I campi di gauge	2
1.2.2 I termini fermionici	4
1.2.3 Il bosone di Higgs	8
1.2.4 I termini di Yukawa	12
1.2.5 I termini di gauge-fixing e i ghost	13
1.3 Il tensore energia-impulso nello spazio-tempo curvo	17
2 La diffusione di fermioni e fotoni su un campo gravitazionale esterno	27
2.1 La sorgente puntiforme: il buco nero	27
2.2 La sezione d'urto all'ordine principale	32
2.2.1 La sezione d'urto per il fermione	33
2.2.2 La sezione d'urto per il fotone	37
3 La deflessione nell'approccio semi-classico	41
3.1 La soluzione classica	42
3.2 La soluzione semi-classica	47
3.3 Il confronto tra le due soluzioni	49
4 Le correzioni quantistiche alla sezione d'urto	51
4.1 Lo sviluppo diagrammatico	52
4.2 La rinormalizzazione dell'interazione gravitazionale	55
4.3 Le correzioni quantistiche per i neutrini	57
4.4 Le correzioni quantistiche per i fermioni massivi	61
4.4.1 Il contributo dei bosoni di gauge a massa nulla	63
4.4.2 Il contributo del settore debole per piccoli momenti trasferiti	65
4.4.3 Il contributo del settore debole per grandi momenti trasferiti	67
4.5 Le correzioni quantistiche per i fotoni	68
4.6 La sezione d'urto a un loop	70
4.6.1 La diffusione del neutrino e del fotone	70
4.6.2 La diffusione di un fermione massivo	74
4.6.3 La cancellazione delle divergenze infrarosse	76

5	L'equazione radiativa della lente gravitazionale	81
5.1	La lente gravitazionale	82
5.2	L'equazione della lente	87
5.3	Le immagini e il fattore di amplificazione	90
5.4	L'equazione radiativa della lente gravitazionale	94
5.5	Il lensing del neutrino e del fotone: l'analisi numerica	97
6	Le correzioni al campo gravitazionale	103
6.1	L'approssimazione post-newtoniana	103
6.2	La fluttuazione della metrica post-newtoniana	104
6.3	La sezione d'urto all'ordine 2PN	106
6.4	L'approccio semi-classico nel caso post-newtoniano: i buchi neri primordiali	108
	Conclusioni	111
A	L'integrale ellittico di prima specie	115
B	Le regole di Feynman	119
C	Le correzioni radiative alla deflessione del fotone	123
D	Coefficienti dello sviluppo semi-classico	125

Introduzione

La teoria della relatività generale formulata da Einstein costituisce il più valido strumento per descrivere la dinamica dell'universo [1]. Alla base della teoria si pongono due principi primi: il principio di equivalenza e il principio di generale covarianza, dai quali discendono, con gli strumenti matematici appropriati, le equazioni che descrivono il moto della materia nel campo gravitazionale, e quelle che determinano il campo gravitazionale dalla distribuzione di materia. Tali equazioni prendono il nome di equazioni di campo di Einstein, il cui significato è ben reso dalla notoria espressione di Wheeler: “*Matter tells space how to curve, space tells matter how to move*” [2].

Storicamente una delle prime predizioni della teoria concerne la deflessione della luce. In presenza di una sorgente di campo gravitazionale un raggio luminoso compie traiettorie descritte dalle geodetiche nulle nello spazio-tempo. Seppure privi di massa, i fotoni subiscono una deflessione nella loro traiettoria a causa della curvatura dello spazio-tempo. Come mostreremo la dinamica del sistema considerato è descritta da un'equazione del moto del fotone che non dipende dall'energia dello stesso ed estenderemo la trattazione anche ai neutrini che, nel Modello Standard, sono trattati come particelle a massa nulla.

Il Modello Standard è una teoria quantistica dei campi che descrive tre delle quattro interazioni fondamentali, senza includere la gravità, e tutte le particelle elementari ad oggi note. In particolare è una teoria di gauge non abeliana e rinormalizzabile [3]. Nonostante le numerose conferme sperimentali delle previsioni del Modello Standard, esso non può essere considerato una teoria completa poiché, oltre a non fornire una formulazione quantistica coerente della gravità, non possiede alcun candidato a costituire la materia oscura.

La deflessione di un fascio di fotoni in presenza di un campo gravitazionale può essere descritto utilizzando un formalismo che si basa sull'ottica geometrica e il fenomeno prende il nome di *lensing gravitazionale*. Il sistema fisico da studiare comprende una sorgente che emette raggi luminosi, una massa che curva lo spazio-tempo e funge da lente gravitazionale e un osservatore, che riceve il fascio [4, 5]. Qualunque distribuzione di materia sotto forma di MCO (*massive compact object*) può dare origine al fenomeno del lensing. Quindi pianeti, stelle, galassie, cluster e buchi neri possono fungere da lente gravitazionale [6]. Essa deflette i raggi luminosi e l'osservatore vede un'immagine in una posizione angolare diversa da quella occupata dalla sorgente. La relazione tra la posizione angolare della sorgente, quella dell'immagine e l'angolo di deflessione del fascio prende il nome di equazione della lente. A causa della possibile non-linearità dell'equazione è possibile che si producano immagini multiple e la presenza di tali immagini funge da discriminante tra lensing *forte* e *debole*. In assenza di immagini multiple si parla di *lensing debole*, in caso contrario di *lensing forte*. L'equazione della lente può essere approssimata in diversi modi. Per valori molto piccoli di tutti gli angoli coinvolti considereremo l'approssimazione della lente sottile per poi studiare una generale equazione della lente gravitazionale proposta da Virbhadra ed Ellis [7].

Quest'area di ricerca riveste un ruolo particolarmente importante sia nella verifica della validità dei vari modelli cosmologici che nello studio di distribuzioni di materia e distribuzioni planetarie e pertanto coinvolge scale di distanza molto diverse. Il macro-lensing permette di studiare il fenomeno nel caso in cui le immagini prodotte si possono risolvere. Si parla di milli-lensing nell'analisi di

onde radio in cui la separazione delle immagini può essere risolta sfruttando la VLBI (*very long baseline interferometry*). Non sempre è possibile risolvere le immagini, ma si possono comunque individuare effetti osservabili riconducibili al fenomeno del lensing gravitazionale. In tal caso si parla di micro-lensing quando la separazione delle immagini è dell'ordine dei micro-arcosecondi e consiste nello studio di sorgenti quali i quasar e le galassie, di femto-lensing nel caso in cui la separazione delle immagini è dell'ordine dei femtoarcosecondi e le sorgenti sono i GRB (*gamma-ray burst*) [6]. Quest'ultimo permette di investigare la presenza di possibili candidati a costituenti della materia oscura, come i *buchi neri primordiali*.

L'introduzione di distribuzioni di materia di natura diversa da quella ordinaria deriva dalla necessità di giustificare i dati sperimentali legati a diversi fenomeni, tra i quali l'andamento delle curve di rotazione galattiche e l'espansione dell'universo. Nel contesto della relatività generale si sviluppa il Modello Cosmologico Standard, che descrive l'evoluzione dell'universo e introduce, oltre alla materia ordinaria, la materia oscura e l'energia oscura. È interessante sottolineare che, secondo stime attuali, la materia ordinaria dovrebbe costituire il 4.9% dell'universo, la materia oscura il 26,8% e l'energia oscura il 68,3% [8]. Sono state formulate diverse ipotesi rispetto alla composizione della materia oscura, tra le quali citiamo gli assioni, il neutralino e i MACHO (*massive compact halo objects*). Le preferenze della comunità scientifica sono variate nel corso del tempo e probabilmente l'ipotesi più di successo in questo ambito ha riguardato il neutralino, un fermione stabile previsto da estensioni supersimmetriche del Modello Standard. Tuttavia i forti limiti di esclusione dei modelli supersimmetrici emersi dall'attività di ricerca corrente dell'LHC (*Large Hadron Collider*) hanno portato a ricercare altrove possibili costituenti della materia oscura.

I buchi neri primordiali sono buchi neri microscopici, molto diversi dai buchi neri ordinari. Le masse caratteristiche di questo tipo di oggetti compatti possono essere di svariati ordini di grandezza più piccole di quella del Sole e la loro formazione risale alle prime fasi di evoluzione dell'universo. Una parte significativa dell'analisi proposta in questo lavoro di tesi trova un'applicazione proprio considerando componenti cosmologiche di questo tipo, nel contesto del più generale formalismo delle correzioni post-newtoniane alla metrica. Queste correzioni si ottengono considerando uno sviluppo in termini del potenziale gravitazionale, a grandi distanze dalla sorgente che genera il campo. All'ordine principale dello sviluppo si ottiene l'approssimazione newtoniana, in molti casi sufficiente a descrivere svariati fenomeni astrofisici. In particolari circostanze, invece, risulta necessario considerare correzioni ad ordini più alti, per questo chiamate post-newtoniane [9, 10, 11, 12].

Come abbiamo già accennato, ad oggi non esiste una teoria quantistica che descriva esaurientemente la relatività generale. Tuttavia è possibile studiare gli effetti di alcuni contributi quantistici alla gravità con il formalismo della teoria dei campi seguendo due diversi approcci: la teoria effettiva e il metodo del campo esterno. La prima prevede l'inclusione del campo gravitazionale come campo effettivo [13], quantizzato alla stregua dei campi del Modello Standard e il cui quanto prende il nome di gravitone, il mediatore dell'interazione gravitazionale ancora non osservato. Il secondo approccio consiste, invece, nel considerare la gravità sotto forma di campo esterno [14], in cui le particelle elementari del Modello Standard si propagano, che rimane classico e non partecipa al processo di quantizzazione. Nella trattazione proposta abbiamo adottato la teoria del campo esterno in cui il campo gravitazionale è rappresentato dalla perturbazione della metrica minkowskiana in approssimazione di campo debole.

In questo lavoro di tesi ci occuperemo della deflessione gravitazionale cercando di formulare una procedura che permetta di confrontare gli effetti classici ed eventualmente quelli quantistici del fenomeno. Proponiamo un approccio semi-classico allo studio della deflessione delle traiettorie di fasci di fotoni e neutrini in presenza di una sorgente di campo gravitazionale, volto a includere possibili correzioni quantistiche all'equazione della lente. Il punto di partenza è la trattazione della diffusione da potenziale che permette di definire il parametro d'impatto in termini della sezione d'urto classica e dell'angolo di deflessione [15, 16]. Il termine *semi-classico* si riferisce al fatto che la sezione d'urto che includiamo nella definizione del parametro d'impatto è quella

quantistica calcolata con il formalismo della teoria dei campi. Individueremo le condizioni in cui l'approccio semi-classico riproduce gli andamenti previsti dallo studio classico del problema, quindi estenderemo la trattazione calcolando le correzioni quantistiche alle sezioni d'urto al primo ordine perturbativo, valutate con l'inclusione dei processi di interazione contemplati dal Modello Standard. Tale procedura porta a calcolare correzioni che introducono una dipendenza esplicita dall'energia delle particelle incidenti, che costituisce la fondamentale differenza con il risultato classico e porta a considerare il fenomeno dell'*arcobaleno gravitazionale*, incluso in diversi scenari di teorie quantistiche della gravità [16, 17, 18, 19, 20, 21].

La sorgente di campo gravitazionale analizzata nel lavoro di tesi è un buco nero di Schwarzschild che deflette raggi provenienti da una sorgente fotonica o neutrinica. Seppure il modello del buco nero di Schwarzschild sia molto semplice risulta utile per confrontare le formule prodotte con l'approccio classico e semi-classico.

Il lavoro di tesi è organizzato come segue. Nel capitolo 1 si presentano brevemente i contributi alla densità di lagrangiana del Modello Standard delle particelle elementari in uno spazio-tempo curvo e i contributi al tensore energia-impulso da essi derivato. Nel capitolo 2 si studiano le sezioni d'urto all'ordine principale rispettivamente per le interazioni di fermioni massivi, neutrini e fotoni con il campo gravitazionale esterno prodotto da un buco nero di Schwarzschild. Nel capitolo 3 si introduce il problema classico delle equazioni del moto di particelle prive di massa deflesse per la presenza di un buco nero, si descrive l'approccio semi-classico in cui si introduce il parametro d'impatto definito in funzione dell'angolo di deflessione e si opera un primo confronto tra i risultati dei due approcci. Nel capitolo 4 si calcolano le sezioni d'urto al primo ordine perturbativo includendo le correzioni quantistiche nel caso dei fermioni massivi, dei neutrini e dei fotoni. Nel capitolo 5 si introduce il formalismo del lensing gravitazionale, si sviluppa una procedura per l'inversione delle relazioni tra parametro d'impatto e angolo di deflessione per ricavare le correzioni quantistiche all'equazione della lente e si comparano i risultati. Nel capitolo 6 si introduce il formalismo post-newtoniano che permette di includere delle correzioni alla metrica, descritto nell'applicazione al caso dei buchi neri primordiali.

Il calcolo delle correzioni radiative deboli all'interazione di un neutrino in un campo gravitazionale e l'analisi delle sezioni d'urto di diffusione presentati nel capitolo 4, i risultati dello studio della lente gravitazionale radiativa e della deflessione da buchi neri primordiali discussi, rispettivamente, nei capitoli 5 e 6 sono originali e frutto di un recente lavoro [22] in collaborazione con Claudio Corianò, Antonio Costantini e Luigi Delle Rose.

Capitolo 1

Il Modello Standard in uno spazio-tempo curvo

Il Modello Standard è la teoria di campo quantistica che descrive le particelle elementari ad oggi note e tre delle quattro interazioni fondamentali: l'interazione elettromagnetica, l'interazione debole e l'interazione forte. Nelle teorie di campo quantistico le particelle sono trattate come stati eccitati di campi fisici, oggetti che assumono valori in ogni punto dello spazio e del tempo, e le interazioni tra particelle sono considerate come interazioni tra campi, che soddisfano le leggi della meccanica quantistica. Attualmente l'unica forza fondamentale non descritta da una teoria quantistica completa è la forza gravitazionale. Molte teorie proposte per descrivere la gravità come una teoria di campo postulano l'esistenza di una particella mediatrice della forza gravitazionale chiamata gravitone. Tuttavia l'esistenza di questa particella non è stata ancora sperimentalmente verificata. Quando il campo gravitazionale entra nella trattazione sotto forma di campo esterno, trattato classicamente, la teoria cui ci si riferisce prende il nome di teoria quantistica in uno spazio-tempo curvo. Il punto di partenza per descrivere una qualunque teoria dei campi consiste nella definizione della lagrangiana, che contiene i termini cinetici associati alle particelle coinvolte, quelli di interazione tra le stesse e diversi parametri, le masse e le costanti di accoppiamento alle forze in gioco. In questo lavoro consideriamo la lagrangiana del Modello Standard "immersa" in un campo gravitazionale esterno. Il termine di interazione che viene introdotto descrive l'accoppiamento della materia alla gravità. Nel seguito descriveremo brevemente il gruppo di simmetria del Modello Standard, i diversi contributi della lagrangiana, il tensore energia-impulso ad esso associato e il termine di interazione con il campo esterno gravitazionale.

1.1 Il gruppo di simmetria del Modello Standard

Il Modello Standard è una teoria di gauge non abeliana, il cui gruppo di simmetria è $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Il gruppo $SU(3)_C$, dove il pedice C sta per colore, descrive le interazioni tra i quark e, quindi, la teoria delle interazioni forti, che prende il nome di cromodinamica quantistica (QCD). Il prodotto $SU(2)_L \times U(1)_Y$, con L per sinistrorso e Y per ipercarica, descrive la teoria delle interazioni elettrodeboli, unificando le interazioni elettromagnetica e debole nel modello di Glashow-Salam-Weinberg (GSW). Il gruppo $U(n)$ è il gruppo delle matrici unitarie a n^2 parametri e ha n^2 generatori, che costituiscono la rappresentazione aggiunta: $U(1)$ ha un generatore ed è un gruppo abeliano. Il gruppo $SU(n)$ è il gruppo speciale delle matrici unitarie con determinante 1 e ha $n^2 - 1$ generatori: il gruppo $SU(2)$ ha quindi tre generatori che costituiscono la rappresentazione aggiunta, il gruppo $SU(3)$ otto. I bosoni vettori che mediano l'interazione forte sono gli otto gluoni,

mentre i quattro bosoni vettori che mediano l'interazione elettrodebole sono il fotone e i bosoni W^\pm e Z . Il modello GSW rende conto della richiesta di invarianza di gauge dell'interazione sotto il gruppo elettrodebole e comprende il meccanismo di Higgs, che descrive la rottura spontanea della simmetria dello stato di vuoto della teoria e conferisce le masse ai bosoni W^\pm e Z . Il meccanismo di generazione della massa si estende anche ai fermioni e non rompe l'invarianza di gauge delle interazioni. Il fatto che tale invarianza sia preservata è fondamentale per provare la rinormalizzabilità della teoria.

1.2 La lagrangiana del Modello Standard

Analizziamo i termini che entrano nella densità di lagrangiana del Modello Standard che, nel formalismo delle teorie di campo, descrivono le particelle coinvolte e le loro interazioni.

1.2.1 I campi di gauge

I campi di gauge che vengono introdotti, come accennato in precedenza, sono

- Gli otto gluoni G_μ^a con $a = 1, \dots, 8$, che derivano dalla richiesta di simmetria sotto il gruppo di colore $SU(3)_C$.
- I tre campi W_μ^a con $a = 1, 2, 3$, che seguono dalla richiesta di invarianza sotto il gruppo di isospin debole $SU(2)_L$.
- Il campo B_μ , assumendo l'invarianza sotto il gruppo di ipercarica $U(1)_Y$.

Nel modello GSW dell'interazione elettrodebole si introducono i campi associati al bosone vettore massivo neutro Z_μ e al fotone A_μ , ottenuti da una combinazione lineare dei campi di gauge B_μ e W_μ^3 . Inoltre si introducono i campi W_μ^+ e W_μ^- in termini dei campi W_μ^1 e W_μ^2 . L'insieme dei campi dei bosoni vettori $(A_\mu, Z_\mu, W_\mu^\pm)$ costituisce la base degli autostati di massa e descrive particelle realmente osservate in natura. L'insieme dei campi (B_μ, W_μ^a) con $a = 1, 2, 3$ prende il nome di rappresentazione di interazione.

A partire dalla rappresentazione di interazione gli autostati di massa sono definiti come

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \quad (1.1a)$$

$$A_\mu = \cos \vartheta_W B_\mu + \sin \vartheta_W W_\mu^3 \quad (1.1b)$$

$$Z_\mu = -\sin \vartheta_W B_\mu + \cos \vartheta_W W_\mu^3 \quad (1.1c)$$

dove con ϑ_W si indica l'angolo di mixing debole, noto anche come angolo di Weinberg, grazie al quale è definito il cambiamento di base che permette di passare dalla rappresentazione di interazione (W_μ^3, B_μ) a quella di autostati di massa (Z_μ, A_μ) . L'angolo di mixing è introdotto a partire dalle costanti di accoppiamento g e g' , rispettivamente associate ai campi W_μ^a e B_μ

$$\cos \vartheta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \sin \vartheta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.2)$$

I termini cinetici per i campi di gauge nella densità di lagrangiana del Modello Standard sono scritti in termini delle field-strength

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.3a)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (1.3b)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (1.3c)$$

con f^{abc} e ε^{abc} costanti di struttura rispettivamente dei gruppi $SU(3)_C$ e $SU(2)_L$ e g_s e g costanti di accoppiamento. L'espressione delle field-strength per la rappresentazione degli autostati di massa è

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (1.4a)$$

$$W_{\mu\nu}^+ = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - ig(\cos\vartheta_W Z_\mu W_\nu^+ + \sin\vartheta_W A_\mu W_\nu^+ - (\mu \leftrightarrow \nu)) \quad (1.4b)$$

$$W_{\mu\nu}^- = \partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^- - ig(\cos\vartheta_W Z_\mu W_\nu^- + \sin\vartheta_W A_\mu W_\nu^- - (\mu \leftrightarrow \nu)) \quad (1.4c)$$

$$Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu + g \cos\vartheta_W \chi_{\mu\nu} \quad (1.4d)$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g \sin\vartheta_W \chi_{\mu\nu} \quad (1.4e)$$

con $\chi_{\mu\nu} = i(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-)$. Le field-strength dei gluoni non subiscono modifiche, in quanto non soggetti alla rotazione di Weinberg.

I termini nella densità di lagrangiana associati alle field-strength in rappresentazione degli autostati di massa sono

$$\mathcal{L}_{f.s.} = -\frac{1}{4} F^{A\mu\nu} F_{\mu\nu}^A - \frac{1}{2} W^{+\mu\nu} W_{\mu\nu}^- - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a. \quad (1.5)$$

Nella teoria quantistica dei campi, i bosoni vettori descritti precedentemente sono soggetti alla quantizzazione. Tale processo per i campi di gauge è, inoltre, complicato dalla presenza della stessa simmetria di gauge. Di seguito tralascieremo volutamente una descrizione approfondita dei metodi di quantizzazione e introdurremo solo alcune notazioni che saranno utilizzate in questo lavoro di tesi. Consideriamo un generico campo vettoriale massivo $V_\mu(x)$, sviluppato in termini di operatori di creazione e distruzione, che diagonalizzano l'hamiltoniano del sistema, e di autofunzioni dell'hamiltoniano di singola particella. Si introducono, quindi, gli operatori $a(\vec{p}, \sigma)$ e $a_c^\dagger(\vec{p}, \sigma)$, rispettivamente di distruzione di una particella e di creazione di un'antiparticella (la c in pedice sta per coniugato di carica). Gli aggiunti di tali operatori sono l'operatore di creazione di una particella e l'operatore di distruzione di un'antiparticella. L'operatore di creazione di una particella $a^\dagger(\vec{p}, \sigma)$ agisce su un generico stato aggiungendo al sistema un quanto di momento \vec{p} e uno stato di polarizzazione σ , quindi introducendo una particella, l'operatore distruzione agisce eliminando una particella dal sistema. Sullo stato di vuoto $|0\rangle$ gli operatori agiscono come

$$a(\vec{p}, \sigma) |0\rangle = 0 \quad a_c^\dagger(\vec{p}, \sigma) |0\rangle = |\vec{p}, \sigma\rangle. \quad (1.6)$$

Nel contesto dei campi bosonici gli operatori soddisfano la relazione

$$[a(\vec{p}, \sigma), a_c^\dagger(\vec{q}, \rho)] = (2\pi)^3 \delta_{\rho\sigma} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}). \quad (1.7)$$

Il campo vettoriale massivo ammette tre stati di polarizzazione possibili $s = -1, 0, 1$ e in descrizione di interazione è

$$V_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{\sigma=-1,0,1} (a(\vec{p}, \sigma) e_\mu(\vec{p}, \sigma) e^{-ip \cdot x} + a_c^\dagger(\vec{p}, \sigma) e_\mu^*(\vec{p}, \sigma) e^{ip \cdot x}), \quad (1.8)$$

con $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ e $e_\mu(\vec{p}, \sigma)$ vettore di polarizzazione, che soddisfa la relazione di completezza

$$\sum_{\sigma=-1,0,1} e^\mu(\vec{p}, \sigma) e^{\nu*}(\vec{p}, \sigma) = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}. \quad (1.9)$$

Campi bosonici della forma della (1.8) descrivono i bosoni vettori carichi massivi W^+ e W^- . Il bosone vettore massivo neutro Z è descritto da un campo che ha la stessa espressione, con l'ulteriore condizione che $a_c = a$, perché in tal caso la particella e l'antiparticella coincidono.

Il campo bosonico associato al fotone, che ha massa nulla, ha due stati di polarizzazione possibili, può quindi comparire con elicità $\lambda = +1$ o $\lambda = -1$. L'espressione del campo in rappresentazione di interazione è

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{\lambda=\pm 1} (a(\vec{p}, \lambda) e_\mu(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p}, \lambda) e_\mu^*(\vec{p}, \lambda) e^{ip \cdot x}) \quad (1.10)$$

e la generalizzazione della (1.9) per i vettori di polarizzazione è

$$\sum_{\lambda=\pm 1} e^i(\vec{p}, \lambda) e^{j*}(\vec{p}, \lambda) = \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\vec{p}^2}, \quad (1.11)$$

dove gli indici latini che qui compaiono si riferiscono alle componenti spaziali dei quadrivettori coinvolti.

Nella QCD i gluoni sono trattati come particelle bosoniche a massa nulla, con uno stato assegnato di elicità $\lambda = +1$ o $\lambda = -1$. Per questa ragione la decomposizione dei campi associati a tali particelle è analoga a quella presentata per il fotone, la (1.10), con la differenza che nel caso dei gluoni compare anche un indice associato al colore.

1.2.2 I termini fermionici

I campi fermionici entrano nella densità di lagrangiana del Modello Standard sotto forma di spinori di Dirac $\psi(x)$. Tali campi sono rappresentazioni che si trasformano come spinori sotto il gruppo di Lorentz locale. I termini cinetici della densità di lagrangiana associata ai campi di Dirac, scritti in maniera simmetrica rispetto ai campi, sono

$$\mathcal{L}_{\text{ferm.}} = \frac{i}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi] - m \bar{\psi} \psi, \quad (1.12)$$

dove le matrici γ^μ sono le matrici di Dirac che soddisfano l'algebra di Clifford in quattro dimensioni

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

In questo lavoro useremo la rappresentazione chirale delle matrici di Dirac, in cui le matrici γ^μ sono definite come

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

dove $\sigma^\mu = (\mathbb{I}_2, \sigma^i)$ e $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}_2, -\sigma^i)$, con σ^i matrici di Pauli. Inoltre, si introduce la matrice γ^5 , costruita a partire dalle γ^μ

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Nell'espressione della densità di lagrangiana compare il campo $\bar{\psi}(x)$, definito come il coniugato di Dirac di $\psi(x)$

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0. \quad (1.16)$$

Come nel caso dei campi vettoriali consideriamo lo sviluppo del campo spinoriale in termini degli operatori di creazione e distruzione e delle autofunzioni dell'hamiltoniano di singola particella. Questa volta stiamo considerando particelle fermioniche, pertanto le relazioni di anticommutazione soddisfatte dagli operatori di creazione e distruzione sono

$$\{a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, r)\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{rs}. \quad (1.17)$$

Le autofunzioni dell'hamiltoniana di Dirac di singola particella sono $u(\vec{p}, s)e^{-ip \cdot x}$ con autovalore E e $v(\vec{p}, s)e^{ip \cdot x}$ con autovalore $-E$. Gli stati di polarizzazione s sono due nel caso fermionico, e assegnamo a tali stati i valori $s = 1, 2$. Le autofunzioni $u(\vec{p}, s)$ e $v(\vec{p}, s)$ soddisfano le relazioni di completezza

$$\sum_{s=1,2} u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s) = \not{p} + m \quad \sum_{s=1,2} v(\vec{p}, s)\bar{v}(\vec{p}, s) = \not{p} - m. \quad (1.18)$$

Lo sviluppo dei campi di Dirac può essere scritto come

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} (a(\vec{p}, s)u(\vec{p}, s)e^{-ip \cdot x} + a_c^\dagger(\vec{p}, s)v(\vec{p}, s)e^{ip \cdot x}) \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} (a^\dagger(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s)e^{ip \cdot x} + a_c(\vec{p}, s)\bar{v}(\vec{p}, s)e^{-ip \cdot x}). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Nell'espressione (1.12) compare la derivazione ordinaria dei campi spinoriali rispetto alle coordinate dello spazio-tempo. Scritta in tal modo la densità di lagrangiana non è invariante sotto trasformazioni del gruppo di gauge. Consideriamo una generica trasformazione sotto un gruppo di gauge con n generatori. Lo spinore ψ trasforma come

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{it^a \alpha^a(x)} \psi(x) \quad \text{con } a = 1, \dots, n, \quad (1.20)$$

dove i t^a sono i generatori del gruppo e $\alpha^a(x)$ i parametri. Scritta in forma infinitesima questa stessa trasformazione diventa

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) \simeq (1 + it^a \alpha^a(x)) \psi(x). \quad (1.21)$$

Perché la densità di lagrangiana (1.12) sia invariante rispetto a trasformazioni di questo tipo occorre introdurre termini ulteriori rispetto alla sola derivata, in modo da compensare i termini che seguono dalla derivazione dell'operatore che compare sotto forma di esponenziale. Pertanto si introduce la derivata covariante, in cui entrano i campi di gauge che si accoppiano ai fermioni

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^n t^a A_\mu^a, \quad (1.22)$$

con g costante di accoppiamento. La legge di trasformazione infinitesima per i campi di gauge è

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu'^a(x) = A_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) + f^{abc} A_\mu^b(x) \alpha^c(x), \quad (1.23)$$

dove f^{abc} sono le costanti di struttura del gruppo, introdotte dalla relazione

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c. \quad (1.24)$$

In questo modo risulta evidente che nello scrivere una densità di lagrangiana che risulti invariante sotto trasformazioni del gruppo di gauge locale per i fermioni (introducendo la derivazione covariante), i termini che descrivono le interazioni tra i fermioni e i campi di gauge risultano automaticamente coinvolti. Prima di dare le espressioni delle derivate covarianti da includere è necessario considerare un aspetto peculiare del Modello Standard.

Il Modello Standard è una teoria chirale, quindi non è invariante per trasformazioni di parità. Occorre scrivere lo spinore di Dirac nella rappresentazione di Weyl, in cui si introducono due

componenti, che prendono il nome di sinistrorsa e destrorsa. In questa rappresentazione lo spinore di Dirac si scrive

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Le componenti destrorsa e sinistrorsa dello spinore di Dirac si ottengono facendo agire sullo spinore i proiettori P_R e P_L , costruiti a partire dalla matrice γ^5

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}. \quad (1.26)$$

Gli spinori chirali saranno dunque

$$\psi_L = P_L \psi \quad \psi_R = P_R \psi. \quad (1.27)$$

I termini fermionici che entrano nella densità di lagrangiana sono scritti esplicitando le componenti sinistrorse e destrorse e la tipologia di particelle fermioniche alle quali riferiscono: quark o leptoni (di seguito indicati con q e l)

$$\mathcal{L}_{\text{ferm.}} = i\bar{\psi}_L^l \gamma^\mu D_\mu \psi_L^l + i\bar{\psi}_R^l \gamma^\mu D_\mu \psi_R^l + i\bar{\psi}_L^q \gamma^\mu D_\mu \psi_L^q + i\bar{\psi}_R^q \gamma^\mu D_\mu \psi_R^q. \quad (1.28)$$

I termini che coinvolgono le masse dei fermioni saranno trattati nella sezione successiva e non sono riportati nella (1.28). I campi chirali che entrano nella teoria sono

- ψ_L^l , rappresenta lo spinore corrispondente a un doppietto leptonico sinistrorso sotto il gruppo di isospin debole $SU(2)_L$, è un autostato dell'operatore di ipercarica Y con autovalore $-1/2$. La prima componente del doppietto ha terza componente di isospin debole $T^3 = 1/2$, la seconda $T^3 = -1/2$. In quanto leptoni si comportano come singoletti di $SU(3)_C$. I doppietti leptonici sono classificati in tre generazioni

$$\begin{pmatrix} \nu^e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu^\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu^\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L. \quad (1.29)$$

- ψ_R^l , corrisponde allo spinore di un leptone destrorso, singoletto di $SU(2)_L$, autostato di ipercarica con autovalore $Y = -1$ e caratterizzato dalla terza componente di isospin debole $T^3 = 0$. Anche in questo caso, essendo leptoni, si comportano come singoletti sotto $SU(3)_C$. I tre singoletti leptonici di $SU(2)_L$ sono

$$e_R^-, \mu_R^-, \tau_R^- \quad (1.30)$$

e non esistono altri singoletti leptonici di $SU(2)_L$: i neutrini nel Modello Standard sono inclusi come particelle puramente sinistrorse.

- ψ_L^q , è lo spinore di un doppietto di quark sinistrorso di $SU(2)_L$, autostato di ipercarica con autovalore $Y = 1/6$ e con prima componente con $T^3 = 1/2$ e seconda componente $T^3 = -1/2$. Gli autostati della terza componente di isospin debole sono raggruppati in tre generazioni

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L. \quad (1.31)$$

- ψ_R^q , rappresenta lo spinore di un quark destrorso, singoletto di $SU(2)_L$, autostato di ipercarica con $Y = 2/3$ o $Y = -1/3$. In particolare i singoletti di quark con $Y = 2/3$ sono

$$u_R, c_R, t_R, \quad (1.32)$$

mentre quelli con $Y = -1/3$ sono

$$d_R, s_R, b_R. \quad (1.33)$$

Per ogni campo chirale, la carica elettrica è definita a partire dall'ipercarica e dal valore della terza componente di isospin debole

$$Q = T^3 + Y. \quad (1.34)$$

I campi chirali descritti sopra appartengono alle rappresentazioni fondamentali di $SU(2)_L$ e $SU(3)_C$. I generatori del gruppo $SU(2)_L$, indicati con T^a , sono costruiti a partire dalle matrici di Pauli

$$T^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad \text{con } a = 1, 2, 3. \quad (1.35)$$

I generatori del gruppo $SU(3)$ sono indicati con t^a e costruiti a partire dalle matrici di Gell-Mann

$$t^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad \text{con } a = 1, \dots, 8. \quad (1.36)$$

Le derivate covarianti introdotte nella (1.28) sono definite mediante l'azione sui diversi campi. In rappresentazione di interazione sono

$$D_\mu \psi_L^l = \partial_\mu \psi_L^l - igW_\mu^a T^a \psi_L^l - ig' B_\mu Y \psi_L^l \quad (1.37)$$

$$D_\mu \psi_R^l = \partial_\mu \psi_R^l - ig' B_\mu Y \psi_R^l \quad (1.38)$$

$$D_\mu \psi_L^q = \partial_\mu \psi_L^q - ig_s G_\mu^a t^a \psi_L^q - igW_\mu^a T^a \psi_L^q - ig' B_\mu Y \psi_L^q \quad (1.39)$$

$$D_\mu \psi_R^q = \partial_\mu \psi_R^q - ig_s G_\mu^a t^a \psi_R^q - ig' B_\mu Y \psi_R^q. \quad (1.40)$$

Per ottenere i termini di interazione dei fermioni in rappresentazione degli autostati di massa occorre considerare i bosoni vettori fisici A, W^\pm e Z . Per questo sfruttiamo le relazioni (1.1). Introduciamo i generatori

$$T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1 \mp iT^2) \quad (1.41)$$

e otteniamo

$$gW_\mu^1 T^1 + gW_\mu^2 T^2 = gW_\mu^+ T^+ + gW_\mu^- T^-. \quad (1.42)$$

Per i campi W_μ^3 e B_μ scritti in termini di A_μ e Z_μ si ha

$$\begin{aligned} gW_\mu^3 + g' B_\mu &= A_\mu (g \sin \vartheta_W T^3 + g' \cos \vartheta_W Y) \\ &+ Z_\mu (g \cos \vartheta_W T^3 - g' \sin \vartheta_W Y). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Ora, richiedendo che la costante di accoppiamento al campo elettromagnetico sia la carica elettrica e , dall'espressione $Q = Y + T^3$ si ha

$$g \sin \vartheta_W = g' \cos \vartheta_W = e. \quad (1.44)$$

Allora la relazione (1.43) si scrive come

$$gW_\mu^3 + g' B_\mu = eA_\mu Q + \frac{g}{\cos \vartheta_W} (T^3 - \sin^2 \vartheta_W Q) Z_\mu. \quad (1.45)$$

Naturalmente la (1.45) si riferisce alla parte fermionica sinistrorsa, che sotto $SU(2)_L$ è un doppietto e che quindi include i generatori di $SU(2)_L$. Nel considerare la parte fermionica destrorsa, che è un singoletto di $SU(2)_L$, si ha

$$\begin{aligned} g' B_\mu &= g' (\cos \vartheta_W A_\mu - \sin \vartheta_W Y) \\ &= eA_\mu Q - \frac{g}{\cos \vartheta_W} \sin^2 \vartheta_W Z_\mu Q, \end{aligned} \quad (1.46)$$

dove si è usata l'equivalenza di ipercarica e carica elettrica, valida per qualunque spinore destrorso. L'espressione della densità di lagrangiana fermionica in termini degli autostati di massa quindi è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ferm.}} = & i\bar{\nu}^e \gamma^\mu \partial_\mu \nu^e + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + i\bar{u} \gamma^\mu \partial_\mu u + i\bar{d} \gamma^\mu \partial_\mu d \\
& + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta_W} \left(\bar{\nu}^e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} e W_\mu^+ + \bar{e} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \nu^e W_\mu^- \right) \\
& + \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{\nu}^e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \nu^e Z_\mu \\
& - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{e} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \right) e Z_\mu \\
& + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta_W} \left(\bar{u} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} d W_\mu^+ + \bar{d} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u W_\mu^- \right) \\
& + \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{u} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \frac{2}{3} \right) u Z_\mu \\
& - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{d} \gamma^\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \frac{1}{3} \right) d Z_\mu \Big] \\
& + e A_\mu \left(-\bar{e} \gamma^\mu e + \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d \right) \\
& + g_s G_\mu^a \left(\bar{u} \gamma^\mu t^a u + \bar{d} \gamma^\mu t^a d \right),
\end{aligned} \tag{1.47}$$

scritta per i doppietti leptonic (ν^e, e^-) e di quark (u, d), che compaiono come somme dirette delle componenti destrorse e sinistrorse. La generalizzazione per l'intero settore fermionico del Modello Standard si ottiene aggiungendo gli analoghi contributi per le altre famiglie.

1.2.3 Il bosone di Higgs

Come accennato in precedenza il modello che descrive l'interazione elettrodebole è il modello GSW, costruito a partire dalla richiesta di invarianza sotto il gruppo di simmetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Per densità di lagrangiane non chirali i termini di massa per i fermioni potrebbero comparire come $-m\bar{\psi}\psi$, ma poiché la teoria che consideriamo è chirale termini di questo tipo, detti masse di Dirac, non sono ammessi. I termini di massa di Dirac entrano nella teoria moltiplicando combinazioni di parti sinistrorse e destrorse degli spinori. Nella rappresentazione chirale

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_R, \bar{\psi}_L), \tag{1.48}$$

pertanto il termine di massa compare come

$$-m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R). \tag{1.49}$$

Come riportato nella sezione precedente lo spinore ψ_R è un singoletto di $SU(2)_L$, quindi non si trasforma sotto una trasformazione di gauge di $SU(2)_L$: il termine di massa fermionica non è invariante per trasformazioni di gauge. Anche termini del tipo $M^2 A_\mu A^\mu$ non preservano l'invarianza di gauge. Per associare la massa a fermioni e bosoni si introduce un campo scalare di Lorentz, che prende il nome di campo di Higgs. Tale campo scalare ha un valore di aspettazione sul vuoto non nullo e permette di descrivere la rottura spontanea della simmetria. Per illustrare tale meccanismo consideriamo il gruppo di gauge $SU(2)$ e introduciamo il campo ϕ scalare di Lorentz, doppietto di

$SU(2)$. La densità di lagrangiana per questo campo è

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \text{con } \mu^2, \lambda > 0. \quad (1.50)$$

La derivata D_μ che compare è una derivata covariante che preserva l'invarianza per trasformazioni di gauge del termine cinetico e per la (1.22) si ha

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \quad \text{con } a = 1, 2, 3. \quad (1.51)$$

Nella precedente i campi W_μ^a sono i campi di gauge e g è la costante con cui ϕ si accoppia a tali campi. Le matrici σ^a sono le matrici di Pauli e i $t^a = \sigma^a/2$ sono i generatori del gruppo $SU(2)$ e soddisfano l'algebra

$$[t^a, t^b] = i\varepsilon^{abc} t^c. \quad (1.52)$$

Esplicitiamo la forma del campo ϕ , avente componenti complesse

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

dove ϕ_i con $i = 1, \dots, 4$ sono funzioni reali e isoliamo il termine che rappresenta il potenziale introdotto nella densità di lagrangiana

$$V(\phi^\dagger \phi) = \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \mu^2 (\phi^\dagger \phi). \quad (1.54)$$

Questo termine è invariante per trasformazioni di gauge di ϕ , che si trasforma come

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)t} \phi(x). \quad (1.55)$$

Per ottenere il valore di $\phi^\dagger \phi$ per cui il potenziale assume un minimo poniamo la derivata del potenziale rispetto a $\phi^\dagger \phi$ uguale a zero e otteniamo

$$0 = \frac{\partial V(\phi^\dagger \phi)}{\partial (\phi^\dagger \phi)} = \lambda (\phi^\dagger \phi) - \mu^2 \implies \phi^\dagger \phi = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2. \quad (1.56)$$

Dalla (1.53) abbiamo che

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2). \quad (1.57)$$

Pertanto risulta che infinite configurazioni del campo ϕ portano il potenziale ad assumere un minimo. Queste configurazioni classiche per il minimo del potenziale corrispondono agli stati di vuoto quantistici, che sono degeneri. Per poter descrivere la dinamica del sistema, tuttavia, occorre fissare una configurazione di partenza e l'arbitrarietà della scelta è conseguenza della degenerazione degli stati di vuoto. Introduciamo il valore del campo nello stato di vuoto v , quindi scegliendo una direzione particolare

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

avendo posto $\phi_3 = v, \phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$. La rottura spontanea della simmetria avviene attorno alla scelta del minimo. È opportuno comunque sottolineare che la densità di lagrangiana, benché sviluppata attorno a un particolare minimo del campo scalare, preserva la simmetria. A partire dallo stato di vuoto sviluppiamo l'espressione di ϕ introducendo una fluttuazione $\varphi(x)$, in modo da poter scrivere

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \varphi(x) \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Per illustrare la rottura spontanea della simmetria e la comparsa dei termini di massa è sufficiente considerare solo le fluttuazioni di φ e trascurare le altre, che abbiamo volutamente posto a zero. Queste ultime corrispondono ai bosoni di Nambu-Goldstone della rottura spontanea e la scelta descritta prende il nome di gauge unitaria. Esplicitando la densità di lagrangiana (1.50) e sfruttando l'espressione della derivata covariante si ottengono diversi termini, tra i quali

$$\frac{g^2 v^2}{8} \left(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu} + W_\mu^3 W^{3\mu} \right), \quad (1.60)$$

che permette di assegnare la massa ai tre bosoni di gauge W_μ^a . Quindi l'introduzione di un campo scalare opportuno, avente un valore di aspettazione sul vuoto non nullo che rompe in tal modo la simmetria che rende il vuoto degenere, produce i termini di massa richiesti per i bosoni di gauge.

Nel Modello Standard si introduce il campo di Higgs h , doppietto sotto il gruppo $SU(2)_L$, avente isospin debole $T=1/2$ e ipercarica $Y=1/2$. Assegniamo il suo valore di aspettazione sul vuoto

$$\langle h \rangle \equiv h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Per quanto detto in precedenza l'introduzione di un valore di aspettazione non nullo sul vuoto da parte di un campo scalare comporta la comparsa di termini di massa per i bosoni di gauge. Se invece un sottogruppo del gruppo di gauge originario continua a descrivere una simmetria non rotta del sistema, il bosone corrispondente rimarrà privo di massa. Questo è ciò che nel Modello Standard accade per il fotone, bosone vettore dell'interazione elettromagnetica e privo di massa perché associato alla simmetria residua descritta dal gruppo $U(1)_{em}$. Il generatore delle trasformazioni di gauge elettromagnetiche è

$$Q = T^3 + Y \quad (1.62)$$

e per i valori di isospin debole e ipercarica assegnati al doppietto h_0 nel vuoto, si ha che $Qh_0 = 0$. Pertanto la simmetria elettromagnetica è preservata nonostante la rottura spontanea. Questo permette di escludere termini di massa per il fotone. Attorno al valore di aspettazione sul vuoto possiamo sviluppare il campo di Higgs, parametrizzandolo come

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ v + H + i\phi \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Si introducono i campi $\phi^\pm = \phi_1 \mp i\phi_2$ che, con il campo ϕ , corrispondono ai tre bosoni di Nambu-Goldstone, scalari di Lorentz. Ogni qualvolta si rompono delle simmetrie del sistema fisico compaiono tanti bosoni di Nambu-Goldstone quante sono le simmetrie rotte. Il campo H è quello associato al bosone di Higgs. La densità di lagrangiana per il doppietto di Higgs si scrive come

$$\mathcal{L} = (D_\mu h)^\dagger (D^\mu h) + \mu_h^2 (h^\dagger h) - \lambda (h^\dagger h)^2 \quad \text{con } \mu_h^2, \lambda > 0, \quad (1.64)$$

in cui compare la derivata covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a T^a - ig' B_\mu Y. \quad (1.65)$$

Esplicitando l'espressione della derivata covariante e considerando lo sviluppo del campo di Higgs (1.63) la densità di lagrangiana scritta in rappresentazione degli autostati di massa è

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi^- \\
& - \frac{m_H^2}{2} H^2 + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^2 + M_W (W_\mu^- \partial^\mu \phi^+ + W_\mu^+ \partial^\mu \phi^-) \\
& + M_Z Z_\mu \partial^\mu \phi + \frac{e M_W}{\sin \vartheta_W} H W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{e M_Z}{\sin 2\vartheta_W} H Z_\mu^2 \\
& - \frac{e}{2 \sin \vartheta_W} W^{+\mu} \left(\phi^- \overleftrightarrow{\partial}_\mu (H + i\phi) \right) - \frac{e}{2 \sin \vartheta_W} W^{-\mu} \left(\phi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\mu (H - i\phi) \right) \\
& + ie (A^\mu + \cot 2\vartheta_W Z^\mu) \left(\phi^- \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi^+ \right) - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} Z^\mu \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_\mu H \right) \\
& - ie M_Z \sin \vartheta_W Z^\mu (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - ie M_W A^\mu (W_\mu^- \phi^+ - W_\mu^+ \phi^-) \\
& + \frac{e^2}{4 \sin^2 \vartheta_W} H^2 (W_\mu^+ W^{-\mu} + 2Z_\mu^2) - \frac{ie^2}{2 \cos \vartheta_W} H Z^\mu (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) \\
& + \frac{e^2}{4 \sin^2 \vartheta_W} \phi^2 (W_\mu^+ W^{-\mu} + 2Z_\mu^2) - \frac{ie^2}{2 \sin \vartheta_W} H A^\mu (W_\mu^- \phi^+ - W_\mu^+ \phi^-) \\
& + \frac{e^2}{2 \cos \vartheta_W} \phi Z^\mu (W_\mu^+ \phi^- + W_\mu^- \phi^+) - \frac{e^2}{2 \sin \vartheta_W} \phi A^\mu (W_\mu^- \phi^+ + W_\mu^+ \phi^-) \\
& + \frac{e^2}{\sin^2 \vartheta_W} \phi^+ \phi^- W_\mu^+ W^{-\mu} + e^2 \cot^2 2\vartheta_W \phi^+ \phi^- Z_\mu^2 + e^2 \phi^+ \phi^- A_\mu^2 \\
& + 2e^2 \cot 2\vartheta_W \phi^+ \phi^- A^\mu Z_\mu - \frac{em_H^2}{4M_W \sin \vartheta_W} H^3 - \frac{em_H^2}{2M_W \sin \vartheta_W} \phi^+ \phi^- H \\
& - \frac{em_H^2}{4M_W \sin \vartheta_W} \phi^2 H - \frac{em_H^2}{32M_W^2 \sin^2 \vartheta_W} H^4 - \frac{e^2 m_H^2}{32M_W^2 \sin^2 \vartheta_W} \phi^4 \\
& - \frac{e^2 m_H^2}{8M_W^2 \sin^2 \vartheta_W} \phi^+ \phi^- (H^2 + \phi^2) - \frac{e^2 m_H^2}{16M_W^2 \sin^2 \vartheta_W} H^2 \phi^2 \\
& - \frac{e^2 m_H^2}{8M_W^2 \sin^2 \vartheta_W} (\phi^+ \phi^-)^2.
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Si introducono le notazioni

$$m_H = \sqrt{2}\mu_h \quad M_W = \frac{gv}{2} \quad M_Z = \frac{v\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} \tag{1.67}$$

e l'azione del simbolo $\overleftrightarrow{\partial}$ sulle generiche funzioni f e g è

$$f \overleftrightarrow{\partial}_\mu g = f \partial_\mu g - g \partial_\mu f. \tag{1.68}$$

I parametri m_H , M_W e M_Z si riferiscono alle masse rispettivamente del bosone di Higgs e dei bosoni W^\pm e Z .

Osservando la (1.66) si evince che i primi tre termini sono i termini cinetici per il bosone di Higgs e per i Goldstone, seguono quelli di massa per l'Higgs e i bosoni, due termini di accoppiamento tra i Goldstone e i bosoni di gauge, che si cancelleranno con i termini di gauge-fixing, per la particolare scelta della gauge adottata, come sarà chiaro nel paragrafo seguente. Gli altri termini si riferiscono a interazioni tra Higgs, bosoni di Nambu-Goldstone e di gauge e autointerazioni.

1.2.4 I termini di Yukawa

I termini di massa per i fermioni si ricavano accoppiando i campi fermionici con il campo di Higgs e corrispondono ai termini proporzionali al valore di aspettazione sul vuoto v . Accoppiamenti di questo tipo prendono il nome di Yukawa. I termini che saranno introdotti sono singoletti sotto il gruppo di gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Per il settore leptonic la densità di lagrangiana di Yukawa è

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^l = -\lambda_f \bar{\psi}_L^l h \psi_R^l - \lambda_f \bar{\psi}_R^l h^\dagger \psi_L^l, \quad (1.69)$$

dove λ_f è l'accoppiamento di Yukawa ai campi fermionici. Considerando il doppietto leptonic

$$\psi_L^l = \begin{pmatrix} \nu^e \\ e \end{pmatrix}_L \quad (1.70)$$

e esplicitando l'espressione della densità di lagrangiana si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^l = -\lambda_e \left[i (\phi^- \bar{e}_R \nu_L - \phi^+ \bar{\nu}_L e_R) + \frac{i\phi}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R - \bar{e}_R e_L) \right. \\ \left. + \frac{H}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) + \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \right]. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Nell'ultimo termine compare l'espressione che si riferisce alla massa dell'elettrone, mentre non viene introdotto un termine analogo per il neutrino elettronico. Naturalmente questo si estende agli altri due doppietti leptonic e segue che i neutrini nel Modello Standard sono particelle prive di massa. I termini associati ai quark che compaiono nel settore di Yukawa sono costruiti analogamente. Consideriamo il doppietto

$$\psi_L^q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (1.72)$$

e i singoletti u_R e d_R sotto $SU(2)_L$. Il risultato sarà poi generalizzato per i restanti doppietti di quark. La densità di lagrangiana di Yukawa per i quark è

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^q = -\lambda_d \bar{\psi}_L^q h d_R - \lambda_d \bar{d}_R h^\dagger \psi_L^q - \lambda_u \bar{\psi}_L^q \varepsilon^{ab} h_b^* u_R - \lambda_u \bar{u}_R (\varepsilon^{ab} h_b^*)^\dagger \psi_L^q, \quad (1.73)$$

dove si è introdotta la matrice ε^{ab} antidiagonale, per poter assegnare la massa al quark u . Sostituendo al campo di Higgs la sua espressione (1.63) si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^q = -\lambda_d \left[i (\phi^- \bar{d}_R u_L - \phi^+ \bar{u}_L d_R) + \frac{i\phi}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L d_R - \bar{d}_R d_L) \right. \\ \left. + \frac{H}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \right] \\ - \lambda_u \left[i (\phi^+ \bar{u}_R d_L - \phi^- \bar{d}_L u_R) + \frac{i\phi}{\sqrt{2}} (\bar{u}_R u_L - \bar{u}_L u_R) \right. \\ \left. + \frac{H}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) \right]. \end{aligned} \quad (1.74)$$

La densità di lagrangiana complessiva del settore Yukawa è data dalla somma dei contributi della parte leptonic e di quark

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^q + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^l. \quad (1.75)$$

1.2.5 I termini di gauge-fixing e i ghost

A causa delle simmetrie locali nelle teorie di gauge, alcuni gradi di libertà dei campi ad esse associati risultano essere non-fisici, cioè possono essere rimossi da opportune trasformazioni di gauge. Questa proprietà comporta alcune difficoltà nel definire la teoria a livello quantistico, come ad esempio quelle che si incontrano nel calcolo del propagatore del campo di gauge. Per risolvere questi problemi si rende perciò necessaria l'introduzione di nuovi contributi a livello lagrangiano, noti come termini di gauge-fixing. Una delle tecniche più dirette per giustificare questi nuovi contributi è senza dubbio quella che ricorre alla quantizzazione delle teorie di gauge per mezzo dell'integrale funzionale poiché ciò rende palese la necessità di un vincolo supplementare di gauge-fixing e, allo stesso tempo, introduce i termini di Faddeev-Popov. Questi termini introducono nella teoria dei campi ausiliari anti-commutanti che prendono il nome di ghost e sono associati a particelle non osservabili che non rispettano la relazione fondamentale di spin-statistica.

Di seguito è delineata la quantizzazione funzionale di Faddeev-Popov. Si considera una teoria di gauge non abeliana, in cui entrano i campi A_μ^a e una funzione di tali campi $f(A_\mu^a)$, invariante sotto il gruppo di gauge considerato. L'integrale funzionale che dà il valore di aspettazione sul vuoto della funzione $f(A_\mu^a)$ è [23]

$$Z = \int \mathcal{D}A f(A_\mu^a) e^{iS[A_\mu^a]}, \quad (1.76)$$

dove $S[A_\mu^a]$ è il funzionale azione del sistema e la misura di integrazione è

$$\mathcal{D}A = \prod_x \prod_{a,\mu} dA_\mu^a(x). \quad (1.77)$$

La misura di integrazione così definita è invariante per trasformazioni di gauge

$$\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\alpha, \quad (1.78)$$

dove con α si esplicita l'elemento del gruppo di gauge rispetto a cui si definisce la trasformazione del campo A_μ^a . A partire dall'integrale funzionale della forma (1.76) non è possibile sviluppare un approccio perturbativo, a causa di una ridondanza: l'integrale è esteso a tutte le configurazioni di campo e quindi per una data configurazione A_μ^a comprende i contributi di tutte quelle che le sono fisicamente equivalenti. Ciò impedisce di definire l'espressione dei propagatori di Feynman per il campo di gauge.

La procedura di quantizzazione di Faddeev-Popov permette di ovviare alle ambiguità in cui si incorre quando si definisce un integrale funzionale associato a una teoria di gauge. Consideriamo lo spazio delle configurazioni dei campi di gauge $\{A_\mu^a(x)\}$ e lo suddividiamo in classi di equivalenza $\{(A^\alpha)_\mu^a(x)\}$. Per classe di equivalenza si intende l'insieme delle configurazioni di campo che si possono ottenere a partire da una data configurazione su cui si opera con tutte le possibili trasformazioni α del gruppo di simmetria. Quindi poiché l'esponente nella (1.76) è invariante sotto trasformazioni di gauge, l'integrando risulta costante sulle classi di equivalenza. Consideriamo ora la misura di integrazione funzionale invariante sul gruppo di gauge, definita da

$$\mathcal{D}\alpha = \prod_x d\alpha(x). \quad (1.79)$$

Si introduce il funzionale $\Delta[A]$, invariante di gauge per costruzione, imponendo che valga la relazione

$$\Delta[A] \int \mathcal{D}\alpha \delta(G(A^\alpha)) = 1, \quad (1.80)$$

dove

$$\delta(G(A^\alpha)) = \prod_x \prod_{a,\mu} \delta(G(A^\alpha)_\mu^a(x)). \quad (1.81)$$

Nelle precedenti la funzione G corrisponde alla funzione il cui annullamento consiste nella condizione di gauge-fixing. Un esempio notevole, nel caso della QED, è la scelta di gauge di Lorenz $\partial^\mu A_\mu = 0$. Adottiamo l'ipotesi che, assegnata una configurazione iniziale di campo $A_\mu^\alpha(x)$ l'equazione

$$G(A^\alpha) = 0 \quad (1.82)$$

ammetta un'unica soluzione. In questo modo la condizione (1.82) comporta, al variare del campo iniziale, la definizione di un'ipersuperficie che interseca ciascuna classe di equivalenza dei campi in un solo punto: si seleziona solo una tra le possibili configurazioni ammesse in ogni classe di equivalenza. Introduciamo la (1.80) nell'espressione dell'integrale funzionale (1.76), in cui è possibile invertire l'ordine di integrazione, in forza del fatto che $\Delta[A]$, $\mathcal{D}A$, $f(A)$ e $S[A]$ sono invarianti di gauge. Considerando ora una particolare trasformazione di gauge α e chiamando A^α il campo trasformato, grazie all'invarianza degli elementi che compaiono nell'integrale funzionale, si ha

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A^\alpha \Delta[A^\alpha] f(A^\alpha) \delta(G(A^\alpha)) e^{iS[A^\alpha]} \\ &= \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A \Delta[A] f(A) \delta(G(A)) e^{iS[A]}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Pertanto l'integrale in $\mathcal{D}A$ risulta indipendente da α , quindi l'integrazione sugli elementi del gruppo porta solo un fattore moltiplicativo, eliminabile normalizzando opportunamente il funzionale. Prendendo in considerazione la generalizzazione della regola del cambio di variabile per gli integrali multipli su un insieme discreto di variabili

$$\mathcal{D}G = \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) \mathcal{D}\alpha, \quad (1.84)$$

da cui il funzionale $\Delta[A]$ si può riscrivere come

$$\Delta[A] = \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right)_{G(A^\alpha)=0} \quad (1.85)$$

che prende il nome di determinante di Faddeev-Popov. Per valutare il determinante nella (1.85) consideriamo una trasformazione di gauge infinitesima del campo A_μ^a :

$$A_\mu^a \rightarrow (A^\alpha)_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a. \quad (1.86)$$

Nel caso in cui la derivata covariante fosse lineare la derivata funzionale che compare nel determinante di Faddeev-Popov non dipenderebbe da A , quindi nella (1.83) comparirebbe come un termine moltiplicativo a fronte dell'integrale in $\mathcal{D}A$, come accade nel caso della QED. Nel caso più generale di un'algebra non abeliana questo non è più vero e il termine precedente dipende da A . La scelta più comune della funzione di gauge-fixing per teorie di gauge esatte è

$$G(A) = \partial_\mu A^{\mu a}(x) - C^a(x), \quad (1.87)$$

che corrisponde alla gauge di Lorenz, dove C è un campo scalare indipendente da A . In particolare, sfruttando la forma infinitesima della trasformazione di gauge (1.86), si ha

$$\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu, \quad (1.88)$$

che dipende da A . Il determinante della derivata funzionale che compare nella (1.83) produce dei nuovi termini da includere nella densità di lagrangiana. La procedura di Faddeev-Popov consiste nella scelta di rappresentare tale determinante sotto forma di integrale funzionale, in cui si integra su un nuovo insieme di campi anti-commutanti

$$\det\left(\frac{1}{g}\partial^\mu D_\mu\right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp\left[i \int d^4x \bar{c}(-\partial^\mu D_\mu)c\right]. \quad (1.89)$$

Perché sia valida questa relazione è necessario che i campi soddisfino relazioni di anti-commutazione (questa espressione formale è stata ricavata per campi fermionici) e che siano degli scalari per trasformazioni di Lorentz. Quindi con questa procedura si includono dei campi che vengono associati a particelle che non rispettano la relazione fondamentale tra spin e statistica (campi scalari anti-commutanti): le particelle non sono osservabili, ma sono incluse nella teoria e nei diagrammi di Feynman compariranno solo nelle linee interne. I campi c e \bar{c} soddisfano quindi

$$\{c^a, \bar{c}^b\} = 0 \quad \{c^a, c^b\} = 0 \quad \{\bar{c}^a, \bar{c}^b\} = 0. \quad (1.90)$$

La densità di lagrangiana che comprende i ghost risulta scritta, nella forma più generale, come

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \bar{c}^a M^{ab} c^b. \quad (1.91)$$

Quindi occorre introdurre tanti termini di gauge-fixing quanti sono i campi di gauge coinvolti nella teoria, ognuno dei quali sarà poi accompagnato da un termine di ghost. Nella densità di lagrangiana i termini di gauge-fixing entrano come

$$\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{2\xi} \sum_{a=0}^3 \mathcal{F}^a \mathcal{F}^a. \quad (1.92)$$

La scelta delle espressioni di \mathcal{F}^a e il valore di ξ distinguono le varie scelte di gauge che si possono adottare. Per la teoria elettrodebole bisogna introdurre quattro contributi, che vengono scelti, in rappresentazione di interazione, come

$$\mathcal{F}^0 = \partial^\mu B_\mu + i\xi g' (h^\dagger Y h_0 - h_0^\dagger Y h) \quad (1.93a)$$

$$\mathcal{F}^i = \partial^\mu W_\mu^a + i\xi g (h^\dagger T^a h_0 - h_0^\dagger T^a h), \quad (1.93b)$$

sfruttando le espressioni (1.63) e (1.61) per h e h_0 . A partire dalle (1.93) possiamo introdurre i termini di gauge-fixing nella rappresentazione degli autostati di massa (usando le (1.67))

$$\mathcal{F}^A = \partial^\mu A_\mu \quad (1.94a)$$

$$\mathcal{F}^Z = \partial^\mu Z_\mu - \xi M_Z \phi \quad (1.94b)$$

$$\mathcal{F}^+ = \partial^\mu W_\mu^+ - \xi M_W \phi^+ \quad (1.94c)$$

$$\mathcal{F}^- = \partial^\mu W_\mu^- - \xi M_W \phi^-. \quad (1.94d)$$

A questi vanno aggiunti i contributi di gauge-fixing per i campi associati ai gluoni nella QCD. La densità di lagrangiana per il gauge-fixing è, quindi

$$\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{2\xi} (\mathcal{F}^A)^2 - \frac{1}{2\xi} (\mathcal{F}^Z)^2 - \frac{1}{\xi} (\mathcal{F}^+) (\mathcal{F}^-) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^a)^2. \quad (1.95)$$

Sviluppando i quadrati si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{g.f.}} = & -\frac{1}{2\xi} \partial^\mu Z_\mu \partial^\nu Z_\nu - \frac{1}{2\xi} \partial^\mu A_\mu \partial^\nu A_\nu - \frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu^+ \partial^\nu W_\nu^- - \frac{1}{2\xi} \partial^\mu G_\mu^a \partial^\nu G_\nu^a \\ & - \frac{1}{2} \xi M_Z^2 \phi \phi - \xi M_W^2 \phi^+ \phi^- - \frac{1}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} v Z_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} g v (W_\mu^+ \partial^\mu \phi^- + W_\mu^- \partial^\mu \phi^+). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Gli ultimi due termini della precedente cancellano gli stessi che compaiono nella densità di lagrangiana del settore Higgs. Questo deriva dalla scelta di introdurre nelle (1.93) dei termini nei bosoni di Goldstone, oltre alle quadridivergenze. Tale scelta di gauge prende il nome di R_ξ -gauge, in cui non compaiono accoppiamenti quadratici tra un campo di gauge e il relativo bosone di Goldstone. Ai termini di gauge-fixing bisogna aggiungere i relativi termini di ghost. Per la QCD la densità di lagrangiana dei ghost è data da

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}}^{\text{QCD}} = -\bar{c}^a (\delta^{ac} \partial^2 + g_s \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c. \quad (1.97)$$

Per la parte elettrodebole (EW) si considerano quattro campi di ghost, che derivano dal gauge-fixing dei campi W_μ^a e B_μ in rappresentazione di interazione: η_L^a e η_Y . I determinanti di Faddeev-Popov vengono calcolati a partire dalle trasformazioni di gauge in forma infinitesima sotto il gruppo $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Dalla rappresentazione di interazione possiamo passare a quella degli autostati di massa (ovviamente in questo caso non si ottengono dei campi corrispondenti a delle particelle realmente osservabili) e si introducono i campi di ghost

$$\eta^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_L^1 - i\eta_L^2) \quad (1.98a)$$

$$\eta^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_L^1 + i\eta_L^2) \quad (1.98b)$$

$$\eta^A = \cos \vartheta_W \eta_Y + \sin \vartheta_W \eta_L^3 \quad (1.98c)$$

$$\eta^Z = -\sin \vartheta_W \eta_Y + \cos \vartheta_W \eta_L^3. \quad (1.98d)$$

La densità di lagrangiana per i ghost della parte elettrodebole è, quindi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ghost}}^{\text{EW}} &= \partial^\mu \bar{\eta}^Z \partial_\mu \eta^Z + \partial^\mu \bar{\eta}^A \partial_\mu \eta^A + \partial^\mu \bar{\eta}^+ \partial_\mu \eta^+ + \partial^\mu \bar{\eta}^- \partial_\mu \eta^- \\ &+ ig \left\{ \partial^\mu \bar{\eta}^+ \left[W_\mu^+ (\cos \vartheta_W \eta^Z + \sin \vartheta_W \eta^A) - (\cos \vartheta_W Z_\mu + \sin \vartheta_W A_\mu) \eta^+ \right] \right. \\ &+ \partial^\mu \bar{\eta}^- \left[\eta^- (\cos \vartheta_W Z_\mu + \sin \vartheta_W A_\mu) \right. \\ &\left. \left. - (\cos \vartheta_W \eta^Z + \sin \vartheta_W \eta^A) W_\mu^- \right] \right\} \\ &+ \partial^\mu (\cos \vartheta_W \bar{\eta}^Z + \sin \vartheta_W \bar{\eta}^A) \left[W_\mu^+ \eta^- - W_\mu^- \eta^+ \right] \quad (1.99) \\ &- \frac{e\xi}{\sin 2\vartheta_W} M_W \left\{ -i\phi^+ \left[\cos 2\vartheta_W \bar{\eta}^+ \eta^Z + \sin 2\vartheta_W \bar{\eta}^+ \eta^A \right] \right. \\ &+ i\phi^- \left[\cos 2\vartheta_W \bar{\eta}^- \eta^Z + \sin 2\vartheta_W \bar{\eta}^- \eta^A \right] \left. \right\} \\ &- \frac{e\xi}{2 \sin \vartheta_W} M_W \left[(v + H + i\phi) \bar{\eta}^+ \eta^+ + (v + H - i\phi) \bar{\eta}^- \eta^- \right] \\ &- i \frac{e\xi}{2 \sin \vartheta_W} M_Z (-\phi^- \bar{\eta}^Z \eta^+ + \phi^+ \bar{\eta}^Z \eta^-) \\ &- \frac{e\xi}{\sin 2\vartheta_W} M_Z (v + h) \bar{\eta}^Z \eta^Z. \end{aligned}$$

I termini associati all'intero settore dei ghost per la densità di lagrangiana sono dati dalla somma dei contributi per la QCD e per la parte EW

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \mathcal{L}_{\text{ghost}}^{\text{QCD}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}^{\text{EW}}. \quad (1.100)$$

1.3 Il tensore energia-impulso nello spazio-tempo curvo

Il teorema di Noether stabilisce la relazione che intercorre tra le simmetrie e le leggi di conservazione di un sistema fisico. Consideriamo una trasformazione continua del campo ϕ , che in forma infinitesima è

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x), \quad (1.101)$$

dove α è il parametro della trasformazione e $\Delta \phi$ è la deformazione cui è soggetta la configurazione dei campi. Tale trasformazione viene chiamata simmetria se lascia invariate le equazioni del moto che descrivono la dinamica del sistema. In particolare ciò si verifica se l'azione risulta invariante sotto una trasformazione di questo tipo. Perché le equazioni del moto non cambino, la densità di lagrangiana del sistema deve essere invariante per trasformazioni del tipo (1.101) a meno di una quadridivergenza

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x). \quad (1.102)$$

Consideriamo il risultato appena ottenuto e lo confrontiamo con la variazione della densità di lagrangiana $\Delta \mathcal{L}$, ottenuta in seguito alla trasformazione (1.101) dei campi

$$\begin{aligned} \alpha \Delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\mu (\alpha \Delta \phi) \\ &= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \Delta \phi. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Il secondo termine che compare nella precedente corrisponde proprio alle equazioni di Eulero-Lagrange, le equazioni del moto che descrivono la dinamica del sistema, e per questa ragione è zero. Ponendo il primo termine uguale a $\alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$ si introduce la quantità $j^\mu(x)$, che prende il nome di densità di corrente conservata

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{con } j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu. \quad (1.104)$$

Se la simmetria in questione fosse associata a più campi comparirebbe una sommatoria su tali campi nelle espressioni precedenti. Imponendo che la lagrangiana rimanga invariante sotto la trasformazione considerata la corrente $j^\mu(x)$ è conservata: da ogni simmetria continua della lagrangiana del sistema deriva una legge di conservazione.

Per introdurre il tensore energia-impulso si considerano le trasformazioni dello spazio-tempo: rotazioni e traslazioni. La densità di lagrangiana, in quanto scalare, sotto la trasformazione infinitesima delle coordinate

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - a^\mu \quad (1.105)$$

si trasforma come

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta_\nu^\mu \mathcal{L}). \quad (1.106)$$

Confrontando le (1.102) e (1.106) si possono introdurre quattro densità di correnti che si conservano che si scrivono sotto forma di un tensore di rango due che prende il nome di tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (1.107)$$

Le leggi di conservazione possono equivalentemente essere espresse mediante l'invarianza nel tempo della carica Q , quantità associata alla componente zero della corrente di Noether

$$Q = \int_V d^3x j^0(x), \quad (1.108)$$

con l'integrale esteso a tutto lo spazio. Dal tensore energia-impulso si riconosce che la carica conservata associata alle traslazioni temporali è l'hamiltoniana

$$H = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (1.109)$$

quindi l'energia del campo, mentre le cariche associate alle traslazioni spaziali corrispondono alle tre componenti del momento lineare del campo

$$P^i = \int d^3x T^{0i}. \quad (1.110)$$

A partire dalla (1.107) e considerando tutti i contributi alla densità di lagrangiana del Modello Standard, è possibile considerare il tensore energia-impulso complessivo associato ai vari campi che entrano nella teoria. Con la relazione (1.107) si produce un tensore di rango due che non sempre risulta simmetrico rispetto agli indici. Pertanto si deve procedere a simmetrizzarlo, mediante la simmetrizzazione di Belinfante. Per ovviare all'inconveniente di simmetrizzare il tensore ottenuto si può seguire un'ulteriore procedura, che permette di costruire un tensore energia-impulso che è già simmetrico rispetto agli indici. Tale metodo consiste nel riscrivere l'azione in coordinate curvilinee, o equivalentemente, di immergere la teoria in un campo gravitazionale fittizio, per poi applicare il metodo di Noether in uno spazio la cui metrica non è quella di Minkowski. Dopo aver identificato il tensore-energia impulso dalla variazione dell'azione rispetto alla metrica è poi possibile passare al limite di spazio-tempo piatto.

Per descrivere uno spazio-tempo curvo si introduce il tensore metrico $g_{\mu\nu}$, che contiene le informazioni legate alla geometria e nel limite di uno spazio-tempo piatto si riduce al tensore metrico di Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. A partire dal tensore metrico si costruiscono gli oggetti che entrano nel contesto della Relatività Generale. Si introduce la connessione affine, definita in termini del tensore metrico e delle sue derivate prime

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu} g_{\kappa\nu} + \partial_{\nu} g_{\kappa\mu} - \partial_{\kappa} g_{\mu\nu}), \quad (1.111)$$

dove $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$. Il tensore di Riemann coinvolge le derivate prime e seconde del tensore metrico e si scrive come

$$R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}. \quad (1.112)$$

Contraendo il primo e il terzo indice del tensore di Riemann si ottiene il tensore di Ricci

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad (1.113)$$

e contraendo gli indici di questo si definisce la curvatura scalare

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.114)$$

Le equazioni di campo di Einstein sono

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.115)$$

e descrivono come la dinamica della materia influenzi la curvatura dello spazio e viceversa, la curvatura dello spazio influenzi la dinamica della materia. Le equazioni di campo di Einstein possono essere scritte in forma funzionale, applicando il principio variazionale all'azione S del sistema, imponendo che la variazione dell'azione rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$ si annulli

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0. \quad (1.116)$$

Con questo formalismo si ridefinisce la procedura per il calcolo del tensore energia-impulso, sfruttando la derivata funzionale e applicando il teorema di Noether per una generica trasformazione delle coordinate per la quale l'azione è invariante. La procedura variazionale si applica all'azione rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$. Si ottiene come sempre un termine che corrisponde alle equazioni del moto del sistema, che per questo si annulla, e un termine che permette di definire il tensore energia-impulso

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\sigma g^{\mu\nu})} \delta(\partial_\sigma(\partial g^{\mu\nu})) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\sigma \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\sigma g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu},\end{aligned}\quad (1.117)$$

dove nel passaggio dal primo al secondo rigo abbiamo sfruttato l'integrazione per parti. La derivazione che entra nella variazione dell'azione è calcolata rispetto a un generico sistema di coordinate x^σ . Ponendo

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\sigma \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\sigma g^{\mu\nu})},\quad (1.118)$$

si ottiene un tensore energia-impulso simmetrico nei suoi indici, in forza del fatto che il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ lo è. In particolare, se la densità di lagrangiana del sistema non dipende dalle derivate della metrica l'espressione del tensore energia-impulso si riduce a

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}.\quad (1.119)$$

La procedura delineata permette di calcolare il tensore energia-impulso di una teoria in uno spazio tempo curvo. Se si vuole calcolare lo stesso tensore per un sistema non accoppiato alla gravità allora è sufficiente utilizzare il limite di spazio-tempo piatto: $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ e ricondurre la lagrangiana alla metrica di Minkowski.

In questo lavoro di tesi abbiamo affrontato il problema della deflessione di fermioni e fotoni in campi gravitazionali. A tale scopo è necessario analizzare la lagrangiana del Modello Standard immersa in un campo gravitazionale, di cui, più avanti, specificheremo la sorgente. Di seguito applicheremo gli strumenti descritti precedentemente per determinare le equazioni che determinano la dinamica di questo sistema.

L'azione che descrive il Modello Standard accoppiato alla gravità è data dalla somma di tre contributi

$$S = S_M + S_G + S_I.\quad (1.120)$$

Il termine S_M è l'azione associata alla materia e determinata sfruttando l'espressione della densità di lagrangiana del Modello Standard, considerata in uno spazio-tempo curvo

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g}\mathcal{L}_M,\quad (1.121)$$

dove $g = \det(g_{\mu\nu})$. Il termine S_G descrive l'azione associata al campo gravitazionale

$$S_G = -\frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g}R\quad (1.122)$$

con $\kappa^2 = 16\pi G$ e G costante gravitazionale di Newton, e il termine S_I è scritto come

$$S_I = \chi \int d^4x \sqrt{-g}R h^\dagger h,\quad (1.123)$$

in cui h è il doppietto di Higgs (1.63). Il termine S_I con $\chi = 1/6$ viene introdotto con lo scopo di generare un tensore energia-impulso a traccia nulla nel limite conforme della teoria [24], cioè nel limite in cui il parametro di massa dell'Higgs, unica costante dimensionata, sia zero.

Il tensore associato ai campi di materia è definito come la variazione dell'azione della materia rispetto alla metrica

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(S_M + S_I)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.124)$$

D'ora in avanti considereremo l'ipotesi di campo gravitazionale debole, grazie alla quale si può sviluppare il tensore metrico dello spazio-tempo curvo come

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(\kappa^2) \quad \text{con } \kappa \ll 1, \quad (1.125)$$

dove il termine che contiene il campo tensoriale $h_{\mu\nu}$ descrive la perturbazione dello spazio-tempo piatto moltiplicato per una costante che abbia le dimensioni dell'inverso di una massa, in modo da ottenere un termine complessivamente adimensionale. Il fattore κ introduce quindi una scala di massa, legata all'inverso della massa di Planck ridotta

$$\frac{1}{\overline{M}_P} = \sqrt{\frac{8\pi G}{\hbar c}}. \quad (1.126)$$

Il termine in $h_{\mu\nu}$ che descrive le fluttuazioni della metrica è scritto sotto forma di un tensore di rango due per trasformazioni di Lorentz e viene associato al gravitone, particella senza massa di spin 2.

Sfruttando la relazione $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 1$ si ottiene lo sviluppo del tensore metrico completamente controvariante

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (1.127)$$

mentre il termine $\sqrt{-g}$ si può scrivere come

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{\kappa}{2} h + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (1.128)$$

con $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Da questo tutte le quantità che dipendono dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ possono dunque essere sviluppate al primo ordine in $h_{\mu\nu}$. In particolare per l'azione associata alla materia si ha

$$S_M = S^{(0)} + S_{\text{int}}^{(1)} + S_{\text{int}}^{(2)} + \dots, \quad (1.129)$$

dove con $S^{(0)}$ si indica l'azione nello spazio-tempo piatto, mentre con i termini $S_{\text{int}}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) ci si riferisce all'azione data dall'accoppiamento della materia per diversi ordini perturbativi. Volendo considerare solo il primo ordine dello sviluppo poniamo $S_{\text{int}}^{(1)} \equiv S_{\text{int}}$. Per ottenere il termine di interazione nella densità di lagrangiana che descrive l'accoppiamento tra il campo gravitazionale e i campi di materia, sotto l'ipotesi di perturbazione debole, imponiamo che la variazione dell'azione sia nulla

$$\frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}}(S_M + S_G + S_I) = 0, \quad (1.130)$$

dalla quale si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange. Le derivate funzionali calcolate rispetto alla fluttuazione $h_{\mu\nu}$ sono legate a quelle calcolate rispetto alla metrica $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}(x)} &= \int d^4y \frac{\delta g^{\rho\sigma}(y)}{\delta h^{\mu\nu}(x)} \frac{\delta}{\delta g^{\rho\sigma}(y)} \\ &= - \int d^4y \frac{\kappa}{2} (\delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma + \delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho) \delta^{(4)}(y-x) \frac{\delta}{\delta g^{\rho\sigma}(y)} \\ &= -\kappa \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)}. \end{aligned} \quad (1.131)$$

Per scrivere le equazioni di campo di Einstein linearizzate in $h_{\mu\nu}$ è conveniente adottare la scelta di gauge armonica

$$g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (1.132)$$

che si traduce su $h_{\mu\nu}$ nella condizione

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\partial_\nu h^\mu{}_\mu. \quad (1.133)$$

Per giungere alle equazioni di campo linearizzate si sostituisce lo sviluppo del tensore metrico nelle espressioni del tensore di Ricci e nella curvatura scalare e, imposta la gauge suddetta, le equazioni di Einstein diventano

$$\partial^2 \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \right) = -\sqrt{16\pi G}T_{\mu\nu}. \quad (1.134)$$

Dalle equazioni (1.134) e dalla (1.124) si ha che nel contesto della teoria linearizzata vale la relazione

$$\frac{\delta S_{\text{int}}}{\delta h^{\mu\nu}(x)} = -\frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}(x). \quad (1.135)$$

In effetti l'azione di ordine zero $S^{(0)}$ non dipende da $h_{\mu\nu}$, per cui non contribuisce alle equazioni di campo, e l'azione per il campo gravitazionale S_G non contribuisce al tensore energia-impulso associato alla materia. La (1.135) permette di definire la densità di lagrangiana di interazione

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{\kappa}{2}T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}. \quad (1.136)$$

A partire dalla relazione (1.124) si calcolano tutti i contributi del tensore energia-impulso per i campi che entrano nel Modello Standard, ma prima bisogna considerare tali campi nel contesto della relatività generale. Per valutare gli effetti della gravitazione su generici sistemi fisici si considerano dapprima le equazioni della relatività speciale valide in assenza di gravità, scritte in termini di oggetti che si trasformano come tensori sotto il gruppo di Lorentz, $T_{b,\dots}^{a,\dots}$ (d'ora in avanti con le lettere latine a, b, \dots indicheremo gli indici di Lorentz, con le lettere greche μ, ν, \dots gli indici associati a sistemi generici di coordinate). Per passare al formalismo covariante si sostituiscono ai tensori $T_{b,\dots}^{a,\dots}$ gli oggetti $T_{\nu,\dots}^{\mu,\dots}$, che si trasformano come tensori sotto generiche trasformazioni di coordinate. Inoltre si passa dalla derivazione ordinaria a quella covariante e si introduce il tensore metrico che descrive lo spazio-tempo curvo $g_{\mu\nu}$ al posto del tensore di Minkowski che descrive lo spazio-tempo piatto η_{ab} . Le equazioni del moto così ottenute risultano generalmente covarianti. Quanto detto finora vale per oggetti che si trasformano come tensori sotto il gruppo di Lorentz, ma non per i campi che si trasformano come spinori sotto Lorentz, perché il gruppo dei diffeomorfismi non ammette questo tipo di rappresentazione. Pertanto si deve seguire un approccio alternativo discusso di seguito.

A partire dal principio di equivalenza consideriamo, per ogni punto dello spazio-tempo \tilde{x} , un sistema di coordinate $\xi_{\tilde{x}}^a$ che sia localmente inerziale in \tilde{x} . Possiamo quindi definire il tensore metrico come

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x)e_\nu^b(x)\eta_{ab}, \quad (1.137)$$

dove sono state introdotte le *vierbein*

$$e_\mu^a(\tilde{x}) = \left. \frac{\partial \xi_{\tilde{x}}^a(x)}{\partial x^\mu} \right|_{x=\tilde{x}}. \quad (1.138)$$

Dal momento che associamo sistemi di coordinate localmente inerziali $\xi_{\tilde{x}}^a$ a ogni punto fisico \tilde{x} , quando consideriamo un diffeomorfismo $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ si ottiene che le vierbein si trasformano come

$$e_\mu^a \rightarrow e_\mu'^a = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} e_\nu^a, \quad (1.139)$$

quindi bisogna pensare alle vierbein non come un unico oggetto tensoriale, ma piuttosto come un insieme di quattro oggetti che si trasformano come quattro campi vettoriali covarianti sotto trasformazioni generiche di coordinate.

La derivata covariante, in questo caso, oltre a contenere il termine associato alla connessione affine, ne comprenderà anche uno dato dalla connessione spinoriale, che sarà definita sfruttando il formalismo appena introdotto.

Per ottenere l'espressione della connessione spinoriale sfruttiamo la nozione di compatibilità con le vierbein

$$D_\mu e_\nu^a = 0. \quad (1.140)$$

Introduciamo la connessione spinoriale ω_μ^{ab} e, esplicitando la forma della derivata covariante, la (1.140) diventa

$$D_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a = 0, \quad (1.141)$$

dove compare la connessione affine $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, definita nella (1.111). Dalla (1.141) si ottiene

$$\omega_{\mu b}^a e_\nu^b = -\partial_\mu e_\nu^a + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a. \quad (1.142)$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (1.142) per $e^{c\nu}$

$$\omega_{\mu b}^a e_\nu^b e^{c\nu} = -(\partial_\mu e_\nu^a) e^{c\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a e^{c\nu} \quad (1.143)$$

e introduciamo il duale di e_μ^a come e_a^μ , che soddisfa la relazione $e_\mu^a e_a^\mu = 1$. Da questa e dalla (1.137) possiamo scrivere il tensore metrico di Minkowski come

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu. \quad (1.144)$$

Per il membro di sinistra della (1.143) otteniamo

$$\omega_{\mu b}^a e_\nu^b e^{c\nu} = \omega_{\mu b}^a e_\nu^b e_\lambda^c g^{\lambda\nu} = \omega_{\mu b}^a \eta^{bc} = \omega_\mu^{ac}. \quad (1.145)$$

Il membro di destra della (1.143) è invece dato da

$$-(\partial_\mu e_\nu^a) e^{c\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^a e^{c\nu} = e_\nu^a (\partial_\mu e^{c\nu}) + e_\nu^a e^{c\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^\nu, \quad (1.146)$$

dove nel riscrivere il secondo termine si è sfruttato il fatto che gli indici λ e ν sono muti, mentre per il primo termine si considera

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu (e_\nu^a e^{c\nu}) &= \partial_\mu \eta^{ac} = 0 \\ \partial_\mu (e_\nu^a e^{c\nu}) &= (\partial_\mu e_\nu^a) e^{c\nu} + e_\nu^a (\partial_\mu e^{c\nu}) \end{aligned} \right\} \implies -(\partial_\mu e_\nu^a) e^{c\nu} = e_\nu^a (\partial_\mu e^{c\nu}). \quad (1.147)$$

Uguagliando la (1.145) e la (1.146) otteniamo l'espressione della connessione spinoriale

$$\omega_\mu^{ab} = e_\nu^a \partial_\mu e^{b\nu} + e_\nu^a e^{b\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu. \quad (1.148)$$

Assumendo che per il tensore metrico di Minkowski si abbia $D_\mu \eta^{ab} = 0$, la connessione spinoriale risulta antisimmetrica rispetto allo scambio degli indici di Lorentz

$$D_\mu \eta^{ab} = \partial_\mu \eta^{ab} + \omega_{\mu c}^a \eta^{cb} + \omega_{\mu c}^b \eta^{ac} = 0 \implies \omega_\mu^{ab} = -\omega_\mu^{ba}. \quad (1.149)$$

Consideriamo ora l'ipotesi che il campo gravitazionale sia debole, nel qual caso il tensore metrico dello spazio-tempo curvo $g_{\mu\nu}$ potrà essere sviluppato con l'idea che la curvatura dello spazio-tempo

agisce come una correzione al tensore metrico di Minkowski. Per ottenere l'espressione approssimata del tensore metrico consideriamo lo sviluppo delle vierbein fino al primo ordine

$$e_{\mu}^a(x) = \delta_{\mu}^a + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu}^a(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{con } |\varepsilon_{\mu}^a| \ll 1 \quad (1.150)$$

e lo sostituiamo nella (1.137), ottenendo

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x) &= \left(\delta_{\mu}^a + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu}^a(x) \right) \left(\delta_{\nu}^b + \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu}^b(x) \right) \eta_{ab} \\ &\simeq \delta_{\mu}^a \delta_{\nu}^b \eta_{ab} + \frac{1}{2}\delta_{\mu}^a \varepsilon_{\nu}^b(x) \eta_{ab} + \frac{1}{2}\delta_{\nu}^b \varepsilon_{\mu}^a(x) \eta_{ab} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu}^a(x) \eta_{a\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.151)$$

dove nel passaggio dal secondo a terzo rigo si è sfruttato il fatto che gli indici a e b sono muti. Introduciamo il campo tensoriale di rango due

$$h_{\mu\nu}(x) = \varepsilon_{\mu}^a(x) \eta_{a\nu}, \quad (1.152)$$

che compare nello sviluppo del tensore metrico (1.125). Per poter scrivere la densità di lagrangiana associata al settore fermionico bisogna considerare che le matrici γ^a di Dirac hanno un indice associato al gruppo di Lorentz locale, ma sono da considerare scalari rispetto a trasformazioni per diffeomorfismi. Pertanto nella densità di lagrangiana è necessario introdurre una vierbein, in modo da saturare gli indici di Lorentz, per ottenere un'espressione negli indici della derivata covariante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ferm.}} &= \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^a (D_{\mu} \psi) - (D_{\mu} \bar{\psi}) \gamma^a \psi \right] \right\} e_a^{\mu} \\ &= \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^{\mu} (D_{\mu} \psi) - (D_{\mu} \bar{\psi}) \gamma^{\mu} \psi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.153)$$

dove $\gamma^{\mu} = e_a^{\mu} \gamma^a$ ed è stata usata la forma simmetrica della densità di lagrangiana rispetto ai generici campi fermionici ψ e $\bar{\psi}$.

Fatte queste precisazioni riportiamo i contributi al tensore energia-impulso del Modello Standard. Un'analisi dettagliata della sua struttura è stata presentata in [25, 26] per il settore di QED, in [27, 28] nel contesto dell'interazione forte ed estesa a tutto il settore elettrodebole del Modello Standard in [29]. Particolare attenzione, inoltre, è stata rivolta in [30] allo studio delle caratteristiche del tensore energia-impulso in presenza di interazioni di natura vettoriale-assiale come nel caso dei bosoni di gauge Z and W^{\pm} . Per il settore di gauge, nella rappresentazione degli autostati di massa, usando le (1.4), si ha

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{f.s.}} &= -\eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{f.s.}} - F_{\mu\rho}^a F_{\nu}^{\rho} - F_{\mu\rho}^A F_{\nu}^{A\rho} - Z_{\mu\rho} Z_{\nu}^{\rho} - W_{\mu\rho}^+ W_{\nu}^{-\rho} - W_{\nu\rho}^+ W_{\mu}^{-\rho} \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{1}{4} \left[F_{\rho\sigma}^a F^{a\rho\sigma} + Z_{\rho\sigma} Z^{\rho\sigma} + F_{\rho\sigma}^A F^{A\rho\sigma} + 2W_{\rho\sigma}^+ W^{-\rho\sigma} \right] \\ &\quad - F_{\mu\rho}^a F_{\nu}^{\rho} - F_{\mu\rho}^A F_{\nu}^{A\rho} - Z_{\mu\rho} Z_{\nu}^{\rho} - W_{\mu\rho}^+ W_{\nu}^{-\rho} - W_{\nu\rho}^+ W_{\mu}^{-\rho}. \end{aligned} \quad (1.154)$$

Nel settore Yukawa il contributo per il doppietto di quark (u, d) e il doppietto leptonic (ν^e, e) è

dato da

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{Yukawa}} = & -\eta_{\mu\nu} \left\{ i(\phi^- \bar{e}_R \nu_L - \phi^+ \bar{\nu}_L e_R) + \frac{i\phi}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R - \bar{e}_R e_L) \right. \\
& + \frac{H}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) + \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \\
& - \lambda_d \left[i(\phi^- \bar{d}_R u_L - \phi^+ \bar{u}_L d_R) + \frac{i\phi}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L d_R - \bar{d}_R d_L) \right. \\
& + \frac{H}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \left. \right] \\
& - \lambda_u \left[i(\phi^+ \bar{u}_R d_L - \phi^- \bar{d}_L u_R) + \frac{i\phi}{\sqrt{2}} (\bar{u}_R u_L - \bar{u}_L u_R) \right. \\
& \left. + \frac{H}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) \right] \left. \right\}. \tag{1.155}
\end{aligned}$$

Nel settore di gauge-fixing con la R_ξ -gauge il contributo al tensore energia-impulso è

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{g.f.}} = & \frac{1}{\xi} \left\{ G_\nu^a \partial_\mu (\partial^\sigma G_\sigma^a) + G_\mu^a \partial_\nu (\partial^\sigma G_\sigma^a) \right. \\
& + A_\nu \partial_\mu (\partial^\sigma A_\sigma) + A_\mu \partial_\nu (\partial^\sigma A_\sigma) + Z_\nu \partial_\mu (\partial^\sigma Z_\sigma) + Z_\mu \partial_\nu (\partial^\sigma Z_\sigma) \\
& \left. + \frac{1}{2} \left[W_\mu^+ \partial_\nu (\partial^\sigma W_\sigma^-) + W_\nu^+ \partial_\mu (\partial^\sigma W_\sigma^-) + W_\mu^- \partial_\nu (\partial^\sigma W_\sigma^+) + W_\nu^- \partial_\mu (\partial^\sigma W_\sigma^+) \right] \right\} \\
& - \eta_{\mu\nu} \left\{ -\frac{1}{2\xi} (\partial^\sigma A_\sigma)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\sigma Z_\sigma)^2 - \frac{1}{\xi} (\partial^\sigma W_\sigma^+) (\partial^\rho W_\rho^-) - \frac{1}{2\xi} (\partial^\sigma G_\sigma^a)^2 \right. \\
& + \frac{1}{\xi} \partial^\rho (A_\rho \partial^\sigma A_\sigma) + \frac{1}{\xi} \partial^\rho (Z_\rho \partial^\sigma Z_\sigma) + \frac{1}{\xi} \partial^\rho [W_\rho^+ \partial^\sigma W_\sigma^- + W_\rho^- \partial^\sigma W_\sigma^+] \\
& \left. + \frac{1}{\xi} \partial^\rho (G_\rho^a \partial^\sigma G_\sigma^a) \right\} + \eta_{\mu\nu} \frac{\xi}{2} M_Z^2 \phi \phi + \eta_{\mu\nu} \xi M_W^2 \phi^+ \phi^-. \tag{1.156}
\end{aligned}$$

Per il settore fermionico, includendo solo i termini del doppietto (u, d) per i quark e del doppietto elettronico per i leptoni si ottiene

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{ferm.}} = & \frac{i}{4} \left\{ \bar{\nu}^e \gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu \nu^e + \bar{e} \gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu e + \bar{u} \gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu u + \bar{d} \gamma_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu d \right. \\
& - i \left(\frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta_W} \left(\bar{\nu}^e \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} e W_\nu^+ + \bar{e} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \nu^e W_\nu^- \right) \right. \\
& + \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{\nu}^e \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \nu^e Z_\nu - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{e} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \right) e Z_\nu \\
& + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta_W} \left(\bar{u} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} d W_\nu^+ + \bar{d} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u W_\nu^- \right) \\
& + \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{u} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \frac{2}{3} \right) u Z_\nu - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{d} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \frac{1}{3} \right) d Z_\nu \\
& \left. + e A_\nu \left(-\bar{e} \gamma_\mu e + \frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d \right) + \alpha_s G_\nu^a \left(\bar{u} \gamma_\mu t^a u + \bar{d} \gamma_\mu t^a d \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\nu}^e \gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\nu \nu^e - \bar{e} \gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\nu e - \bar{u} \gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\nu u - \bar{d} \gamma_\mu \overleftarrow{\partial}_\nu d \\
& - i \left(\frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta_W} \left(\bar{\nu}^e \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} e W_\nu^+ + \bar{e} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \nu^e W_\nu^- \right) \right. \\
& + \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{\nu}^e \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \nu^e Z_\nu - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{e} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \right) e Z_\nu \\
& + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \vartheta_W} \left(\bar{u} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} d W_\nu^+ + \bar{d} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u W_\nu^- \right) \\
& + \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{u} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \frac{2}{3} \right) u Z_\nu - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \bar{d} \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma^5}{2} - 2 \sin^2 \vartheta_W \frac{1}{3} \right) d Z_\nu \\
& + e A_\nu \left(-\bar{e} \gamma_\mu e + \frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d \right) + \alpha_s G_\nu^a \left(\bar{u} \gamma_\mu t^a u + \bar{d} \gamma_\mu t^a d \right) \\
& \left. + (\mu \leftrightarrow \nu) \right\} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{ferm.}}. \tag{1.157}
\end{aligned}$$

Per il contributo del settore dell'Higgs si ha

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{Higgs}} &= -\eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \partial_\mu H \partial_\nu H + \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi^+ \partial_\nu \phi^- + \partial_\nu \phi^+ \partial_\mu \phi^- \\
& + M_Z^2 Z_\mu Z_\nu + M_W^2 (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-) \\
& + M_W (W_\mu^- \partial_\nu \phi^+ + W_\nu^- \partial_\mu \phi^+ + W_\mu^+ \partial_\nu \phi^- + W_\nu^+ \partial_\mu \phi^-) \\
& + M_Z (\partial_\mu \phi Z_\nu + \partial_\nu \phi Z_\mu) \\
& + \frac{e M_W}{\sin \vartheta_W} H (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-) + \frac{e M_Z}{\sin 2\vartheta_W} H (Z_\mu Z_\nu) \\
& - \frac{e}{2 \sin \vartheta_W} \left[W_\mu^+ \left(\phi^- \overleftrightarrow{\partial}_\nu (H + i\phi) \right) - W_\mu^+ \left(\phi^- \overleftrightarrow{\partial}_\nu (H + i\phi) \right) \right] \\
& - \frac{e}{2 \sin \vartheta_W} \left[W_\mu^- \left(\phi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\nu (H - i\phi) \right) + W_\nu^- \left(\phi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\mu (H - i\phi) \right) \right] \\
& + ie (A_\mu + \cot 2\vartheta_W Z_\mu) \left(\phi^- \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi^+ \right) \\
& + ie (A_\nu + \cot 2\vartheta_W Z_\nu) \left(\phi^- \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi^+ \right) \\
& - \frac{e}{\sin 2\vartheta_W} \left[Z_\mu \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_\nu H \right) + Z_\nu \left(\phi \overleftrightarrow{\partial}_\mu H \right) \right] \\
& - ie M_Z \sin \vartheta_W [Z_\mu (W_\nu^+ \phi^- - W_\nu^- \phi^+) + Z_\nu (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+)] \\
& - ie M_W [A_\mu (W_\nu^- - W_\nu^+ \phi^-) + A_\nu (W_\mu^- - W_\mu^+ \phi^-)] \\
& + \frac{e^2}{4 \sin^2 \vartheta_W} H^2 [(W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^- + 2Z_\mu Z_\nu)] \\
& - \frac{ie^2}{2 \cos \vartheta_W} H [Z_\mu (W_\nu^+ \phi^- - W_\nu^- \phi^+) + Z_\nu (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+)] \\
& + \frac{e^2}{4 \sin^2 \vartheta_W} \phi^2 (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^- + 2Z_\mu Z_\nu) \\
& - \frac{ie^2}{2 \sin \vartheta_W} H [A_\mu (W_\nu^- \phi^+ - W_\nu^+ \phi^-) + A_\nu (W_\mu^- \phi^+ - W_\mu^+ \phi^-)] \\
& + \frac{e^2}{2 \cos \vartheta_W} \phi [Z_\mu (W_\nu^+ \phi^- + W_\nu^- \phi^+) + Z_\nu (W_\mu^+ \phi^- + W_\mu^- \phi^+)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{e^2}{2 \sin \vartheta_W} \phi [A_\mu (W_\nu^- \phi^+ + W_\nu^+ \phi^-) + A_\nu (W_\mu^- \phi^+ + W_\mu^+ \phi^-)] \\
& + \frac{e^2}{\sin \vartheta_W^2} \phi^+ \phi^- (W_\mu^+ W_\nu^- + W_\nu^+ W_\mu^-) \\
& + e^2 \cot^2 2\vartheta_W \phi^+ \phi^- Z_\mu Z_\nu + e^2 \phi^+ \phi^- A_\mu A_\nu \\
& + 2e^2 \cot 2\vartheta_W \phi^+ \phi^- (A_\mu Z_\nu + A_\nu Z_\mu) .
\end{aligned} \tag{1.158}$$

Infine per il contributo calcolato per i ghost si ha

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{ghost}} = & - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{ghost}} \\
& + \partial_\mu \bar{c}^a (\partial_\nu \delta^{ac} + \alpha_s f^{abc} G_\nu^b) c^c + \partial_\nu \bar{c}^a (\partial_\mu \delta^{ac} + \alpha_s f^{abc} G_\mu^b) c^c \\
& + \partial_\mu \bar{\eta}^Z \partial_\nu \eta^Z + \partial_\nu \bar{\eta}^Z \partial_\mu \eta^Z + \partial_\mu \bar{\eta}^A \partial_\nu \eta^A + \partial_\nu \bar{\eta}^A \partial_\mu \eta^A \\
& + \partial_\mu \bar{\eta}^+ \partial_\nu \eta^- + \partial_\nu \bar{\eta}^+ \partial_\mu \eta^- + \partial_\mu \bar{\eta}^- \partial_\nu \eta^+ + \partial_\nu \bar{\eta}^- \partial_\mu \eta^+ \\
& + ig \left\{ \partial_\mu \bar{\eta}^+ [W_\nu^+ (\cos \vartheta_W \eta^Z + \sin \vartheta_W \eta^A) - (\cos \vartheta_W Z_\nu + \sin \vartheta_W A_\nu) \eta^+] \right. \\
& + \partial_\nu \bar{\eta}^+ [W_\mu^+ (\cos \vartheta_W \eta^Z + \sin \vartheta_W \eta^A) - (\cos \vartheta_W Z_\mu + \sin \vartheta_W A_\mu) \eta^+] \\
& + \partial_\mu \bar{\eta}^- \left[\eta^- (\cos \vartheta_W Z_\nu + \sin \vartheta_W A_\nu) - (\cos \vartheta_W \eta_Z + \sin \vartheta_W \eta_A) W_\nu^- \right] \\
& + \partial_\nu \bar{\eta}^- \left[\eta^- (\cos \vartheta_W Z_\mu + \sin \vartheta_W A_\mu) - (\cos \vartheta_W \eta_{Z\mu} + \sin \vartheta_W \eta_A) W_\mu^- \right] \\
& + \partial_\mu (\cos \vartheta_W \bar{\eta}^Z + \sin \vartheta_W \bar{\eta}^A) [W_\nu^+ \eta^- - W_\nu^- \eta^+] \\
& \left. + \partial_\nu (\cos \vartheta_W \bar{\eta}^Z + \sin \vartheta_W \bar{\eta}^A) [W_\mu^+ \eta^- - W_\mu^- \eta^+] \right\} .
\end{aligned} \tag{1.159}$$

Capitolo 2

La diffusione di fermioni e fotoni su un campo gravitazionale esterno

Consideriamo la diffusione di fotoni e fermioni, in particolare neutrini, per mezzo di una perturbazione dello spazio-tempo piatto, generata da una sorgente statica esterna puntiforme. Affronteremo il problema usando il tipico formalismo della teoria perturbativa dei campi in presenza di una sorgente gravitazionale esterna. In questo approccio il campo gravitazionale compare solo nelle linee esterne dei diagrammi di Feynman. L'ipotesi in cui ci poniamo è che il campo gravitazionale generato sia debole, in modo da poter usare lo sviluppo del tensore metrico (1.125), che richiamiamo

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(\kappa^2), \quad (2.1)$$

con $\kappa^2 = 16\pi G$. La discussione è sviluppata nel contesto di uno spazio-tempo curvato per la presenza di una sorgente puntiforme, ma asintoticamente piatto. In particolare si considerano distribuzioni di materia che danno origine a buchi neri, ma l'intera trattazione rimane valida anche per una generica sorgente a simmetria sferica, come una stella, purché la particella diffusa nel campo nel campo gravitazionale generato da tale distribuzione, sia all'esterno della superficie della sorgente.

2.1 La sorgente puntiforme: il buco nero

La sorgente del campo gravitazionale che prendiamo in esame è un buco nero di Schwarzschild: un buco nero statico, non carico e privo di momento angolare, descritto dalla metrica

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.2)$$

dove con τ si è indicato il tempo proprio, dato da

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.3)$$

Tale metrica è detta di Schwarzschild e si ottiene risolvendo le equazioni di Einstein nel vuoto

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.4)$$

La metrica di Schwarzschild permette di definire una lunghezza caratteristica del problema in esame associata alla massa della sorgente del campo gravitazionale, che prende il nome di raggio di Schwarzschild r_S

$$r_S \equiv \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.5)$$

Nel caso del buco nero la distribuzione di materia è concentrata in una regione più piccola del raggio di Schwarzschild, che coincide con l'orizzonte degli eventi: le informazioni legate a un evento che avviene all'interno di tale superficie non sono accessibili a un osservatore esterno. Questo tipo di buco nero è il risultato di un collasso gravitazionale di una stella elettricamente neutra e con simmetria sferica. Il collasso gravitazionale di una stella realistica produce invece un buco nero diverso da quello semplice di Schwarzschild, per la presenza di asimmetrie e per la generazione di un valore, seppure piccolo, di carica elettrica (durante la fase di collasso). Il buco nero che in tal caso viene generato risulta in ultima analisi descrivibile unicamente dal valore della massa M , della carica Q e del momento angolare J : durante il collasso i valori di M e J variano e i campi gravitazionali e elettromagnetici prodotti in questa fase tendono ad assestarsi assecondando tali variazioni. Poiché il processo converge rapidamente, per il buco nero prodotto si definiscono specifici valori di M , Q e J e i campi esterni dipendono unicamente da questi valori.

In questo lavoro di tesi consideriamo il caso semplice, ma non riduttivo, del buco nero di Schwarzschild, quindi neutro e non rotante. In questo contesto tra le grandezze che descrivono il buco nero l'unica che sopravvive è la massa M , che lo caratterizza completamente. Lo spazio-tempo in questo caso è descritto dalla metrica di Schwarzschild.

È interessante osservare che nel sistema di coordinate di Schwarzschild il cambiamento di segno degli elementi g_{00} e g_{11} della metrica al variare di r può essere inteso, in un certo senso, come se t diventasse una coordinata spaziale e r una temporale: durante il collasso della stella, superata la soglia del raggio di Schwarzschild, si ha un ribaltamento dei coni-luce associati agli eventi della linea di universo che descrive il processo, come rappresentato nella figura 2.1.

Notiamo che nella (2.2) compaiono due singolarità, una per $r \rightarrow 0$ e una per $r \rightarrow r_S$. La prima singolarità è fisica e corrisponde alla posizione della massa puntiforme nel sistema di riferimento, la seconda è una singolarità apparente, la cui presenza è strettamente legata alla scelta del sistema di coordinate utilizzato. Lo studio delle singolarità è stato approfondito a partire dagli anni '60 e sviluppato grazie al lavoro di numerosi fisici, tra i quali spicca il contributo di Penrose e Hawking, che hanno impiegato tecniche globali per trattare i buchi neri, estendendo le tecniche locali costruite a partire dal principio di equivalenza locale.

Per esprimere il concetto di singolarità, ci riferiamo alla definizione di Schmidt, ma scritta in termini euristici. In una varietà di spazio-tempo, consideriamo tutte le geodetiche di tipo spazio (i cammini dei tachioni), tutte le geodetiche nulle (i cammini dei fotoni e delle particelle prive di massa), tutte le geodetiche di tipo tempo (i cammini degli osservatori in caduta libera) e tutte le curve di tipo tempo con accelerazioni limitate (i cammini lungo i quali possono muoversi gli osservatori). Supponiamo che una di tali curve termini dopo un certo lasso di tempo proprio (o un certo intervallo del parametro affine per le geodetiche nulle). Supponiamo inoltre che sia impossibile estendere la varietà dello spazio-tempo oltre al punto in cui termina la curva, per esempio perché la curvatura è infinita. Allora quel punto in cui termina la curva, assieme ai punti in cui terminano altre curve ad esso adiacenti, è chiamato singolarità.

L'assunzione di uno spazio-tempo asintoticamente piatto porta all'introduzione di diversi infiniti, perché studiare le caratteristiche asintotiche dei campi generati nell'infinito spaziale non è sufficiente. Pertanto si introducono i concetti di futuro infinito e passato infinito sia per linee di universo di tipo tempo (time-like) che per linee di universo di tipo luce (light-like o nulle), oltre naturalmente a considerare l'infinito verso cui si estendono le superfici spaziali. La varietà che rappresenta lo spazio-tempo non solo è asintoticamente piatta, ma anche *time-oriented*: in corrispondenza di ogni evento dello spazio-tempo si delinea il cono-luce del passato e del futuro e questo procedimento

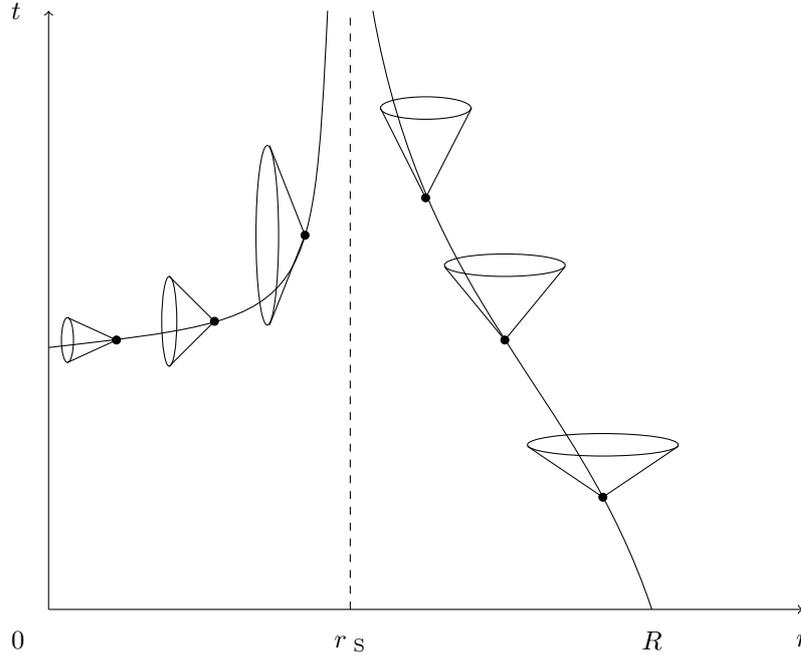


Figura 2.1: Il collasso gravitazionale nella metrica di Schwarzschild di una stella che a partire dalla dimensione R diventa un buco nero. Lungo la curva continua che costituisce la linea d'universo del processo, i punti in evidenza sono eventi dello spazio-tempo, dai quali dipartono i coni del futuro rappresentati. In corrispondenza del raggio di Schwarzschild, indicato con r_S , compare la singolarità apparente, rappresentata dalla linea tratteggiata. Durante il collasso, nella fase in cui la dimensione della stella è superiore a r_S , i coni del futuro sono orientati verso valori crescenti del tempo. Superato il valore r_S i coni sono diretti verso valori decrescenti della coordinata radiale. In entrambi i casi con l'avanzare del collasso i coni diventano più stretti e alti.

si estende in maniera continua di evento in evento. La chiave della procedura ideata da Penrose consiste nell'introduzione di una trasformazione conforme dello spazio-tempo, che permette di passare dallo studio di punti all'infinito a punti finiti.

Ogni singolarità è avvolta da un orizzonte degli eventi e per un buco nero di Schwarzschild, come già accennato, questo corrisponde alla superficie generata dalle linee di universo dei fotoni uscenti radialmente in corrispondenza del raggio di Schwarzschild. L'assenza di singolarità nude, cioè prive di un orizzonte degli eventi, costituisce una congettura elaborata da Penrose e in seguito sviluppata da Hawking, che introdusse il concetto di un futuro asintoticamente prevedibile che caratterizza la struttura dello spazio-tempo: non esistono singolarità visibili dal futuro infinito nullo (per geodetiche nulle). Poiché l'orizzonte è definito come la superficie che ha origine da fotoni uscenti dal raggio di Schwarzschild e diretti verso il futuro infinito nullo, consegue che non possono esistere singolarità in corrispondenza degli stessi orizzonti.

Con lo sviluppo (2.1) si passa a considerare le equazioni di campo di Einstein linearizzate, così chiamate perché la perturbazione della metrica compare fino al primo ordine.

Il tensore di Ricci sviluppato al primo ordine rispetto alla fluttuazione introdotta risulta essere

$$R_{\mu\nu} \simeq \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.6)$$

e la connessione affine

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} (\partial_\mu h_{\nu\kappa} + \partial_\nu h_{\mu\kappa} - \partial_\kappa h_{\mu\nu}). \quad (2.7)$$

L'abbassamento e innalzamento degli indici tensoriali al primo ordine in h avviene mediante la contrazione con il tensore metrico di Minkowski

$$\eta^{\lambda\rho} h_{\rho\nu} \equiv h^\lambda_\nu \quad \eta^{\lambda\rho} \partial_\rho \equiv \partial^\lambda. \quad (2.8)$$

Con queste posizioni possiamo scrivere il tensore di Ricci al primo ordine

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu h^\lambda_\mu + \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda_\lambda), \quad (2.9)$$

con $\square = \partial_\lambda \partial^\lambda$ e da cui le equazioni di campo di Einstein sono

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu h^\lambda_\mu + \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda_\lambda = \kappa S_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

dove si è introdotto il tensore

$$S_{\mu\nu} = - \left(T_{\mu\nu}^{\text{ext}} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^{\text{ext}} \right), \quad (2.11)$$

con $T_{\mu\nu}^{\text{ext}}$ tensore energia-impulso associato alla sorgente statica esterna, T^{ext} ne è la traccia, data dalla contrazione dei suoi indici. Il tensore energia-impulso nella (2.11), associato a una sorgente puntiforme posta nell'origine del sistema di riferimento, è dato da

$$T_{\mu\nu}^{\text{ext}} = \frac{P_\mu P_\nu}{P_0} \delta^{(3)}(\vec{x}), \quad (2.12)$$

dove P_μ è il quadrimomento della sorgente e ponendoci nell'ipotesi che la stessa sia statica, con quadrimomento $P = (M, \vec{0})$, otteniamo

$$T_{\mu\nu}^{\text{ext}} = M \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (2.13)$$

Il tensore $S_{\mu\nu}$, definito nella (2.11), è

$$S_{\mu\nu} = \frac{M}{2} (\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0) \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (2.14)$$

Nelle equazioni (2.10) compaiono sia al primo che al secondo membro tensori di rango due simmetrici, ognuno dei quali caratterizzato da dieci componenti indipendenti. Questo porterebbe a pensare che le equazioni di campo di Einstein corrispondano a dieci equazioni algebricamente indipendenti e che siano sufficienti a determinare in maniera univoca il tensore metrico, nel nostro caso $h_{\mu\nu}$. Tuttavia le componenti del tensore di Ricci sono legate da quattro equazioni differenziali, le identità di Bianchi, che per il tensore linearizzato sono

$$\partial_\mu R^\mu_\nu = \frac{1}{2} \partial_\nu (\square h^\mu_\mu - \partial_\mu \partial_\kappa h^{\mu\kappa}) = \frac{1}{2} \partial_\nu R^\mu_\mu. \quad (2.15)$$

Ciò comporta che delle dieci equazioni considerate $10 - 4 = 6$ sono effettivamente indipendenti. Conseguentemente si hanno quattro gradi di libertà nelle dieci componenti del tensore incognito $h_{\mu\nu}$ e data una qualunque soluzione delle (2.10) è sempre possibile generare altre soluzioni a partire da un cambiamento di coordinate. Consideriamo la più generale trasformazione di coordinate che lasci invariato il campo debole

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x), \quad (2.16)$$

con $\partial_\nu \varepsilon_\mu$ dello stesso ordine di $h_{\mu\nu}$. Il tensore metrico associato al nuovo sistema di coordinate sarà

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}, \quad (2.17)$$

oppure espressa come condizione sulla perturbazione $h^{\mu\nu}$

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial_\rho \varepsilon^\mu \eta^{\rho\nu} - \partial_\sigma \varepsilon^\nu \eta^{\sigma\mu}. \quad (2.18)$$

Allora, se $h_{\mu\nu}$ è soluzione della (2.10) lo è anche

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \varepsilon_\mu - \partial_\mu \varepsilon_\nu, \quad (2.19)$$

dove $\varepsilon_\mu = \varepsilon^\nu \eta_{\mu\nu}$ sono piccole, ma arbitrarie funzioni di x^μ . Stante tale invarianza, detta di gauge, per l'arbitrarietà che ne segue, possiamo rimuovere l'ambiguità nel definire il tensore metrico adottando una specifica scelta di gauge, che in questo caso corrisponde a scegliere un sistema di coordinate. Occorre imporre dunque quattro condizioni sulle coordinate e una scelta particolarmente conveniente nel contesto dell'approssimazione di campo debole è quella della gauge armonica, che si scrive in forma compatta come

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (2.20)$$

Sulle componenti del tensore $h_{\mu\nu}$ queste condizioni si traducono nelle

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \partial_\nu h^\mu{}_\mu. \quad (2.21)$$

Si può sempre definire una trasformazione di coordinate che permetta di porsi in una gauge di questo tipo. Inoltre se il tensore della perturbazione $h_{\mu\nu}$ non soddisfa la (2.21) si può sempre adottare una trasformazione di coordinate (2.16), in cui si impone che valga

$$\square \varepsilon_\nu = \partial_\mu h^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h^\mu{}_\mu. \quad (2.22)$$

Nel seguito supporremo che il tensore $h_{\mu\nu}$ soddisfi la (2.21). Allora le equazioni di Einstein (2.10) si scrivono in una forma molto compatta

$$\square h_{\mu\nu} = \kappa S_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

che rende evidente la convenienza della gauge adottata.

Una soluzione della (2.23) è data dal prodotto di convoluzione tra la sorgente $S_{\mu\nu}$ e il propagatore ritardato $G_R(x, x')$

$$G_R(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(x_0 - x'_0 - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (2.24)$$

normalizzato come

$$\square G_R(x, x') = \delta^{(4)}(x - x'). \quad (2.25)$$

L'espressione del tensore associato al campo gravitazionale risulta, quindi,

$$h_{\mu\nu}(x) = \frac{\kappa}{4\pi} \int d^4 x' \frac{S_{\mu\nu}(x') \delta(x_0 - x'_0 - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (2.26)$$

in cui si sostituisce la (2.14) e si ottiene

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &= \frac{\kappa}{4\pi} \int d^4 x' \frac{M}{2} (\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0) \delta^{(3)}(\vec{x}') \frac{\delta(x_0 - x'_0 - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \frac{\kappa M}{8\pi} \int d^3 \vec{x}' \frac{(\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta^{(3)}(\vec{x}') \int dx'_0 \delta(x_0 - x'_0 - |\vec{x} - \vec{x}'|) \\ &= \frac{\kappa M}{8\pi} \frac{(\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0)}{|\vec{x}|} \\ &= \frac{2GM}{\kappa |\vec{x}|} (\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0), \end{aligned} \quad (2.27)$$

dove nel passaggio all'ultimo rigo si è sfruttata la definizione di $\kappa^2 = 16\pi G$. Per calcolare l'elemento di matrice di diffusione, è necessario considerare l'espressione di $h_{\mu\nu}(x)$ nello spazio dei momenti. In questo spazio $h_{\mu\nu}$ è una funzione del momento trasferito $q = p_1 - p_2$ ed è definito come la trasformata di Fourier di $h_{\mu\nu}(x)$

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(q) &= \int d^4x e^{iq\cdot x} h_{\mu\nu}(x) \\ &= \frac{2GM}{\kappa} \int dx_0 e^{iq_0 x_0} \int d^3\vec{x} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}|} \\ &= \frac{2GM}{\kappa} 2\pi\delta(q_0) \int d^3\vec{x} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}|}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove si è sfruttata l'ipotesi di staticità della sorgente puntiforme nel passaggio dal secondo al terzo rigo. Per ottenere un'espressione esplicita per $h_{\mu\nu}$ occorre considerare la trasformata di Fourier in tre dimensioni della funzione $1/|\vec{x}|$. A questo proposito consideriamo la formula generale per le variabili coniugate x e ξ

$$\frac{1}{(x^2)^\alpha} = \frac{1}{4^\alpha \pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - \alpha\right)}{\Gamma(\alpha)} \int d^d\xi \frac{e^{ix\cdot\xi}}{(\xi^2)^{d/2-\alpha}}, \quad (2.29)$$

con $\Gamma(x)$ la funzione Γ di Eulero. Per adattare la (2.29) al nostro caso poniamo $d = 3$, $\alpha = 1$ e dove le variabili coniugate coinvolte sono x e q

$$\int d^3\vec{x} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{\vec{q}^2} \frac{4\pi^{3/2}\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4\pi}{\vec{q}^2}. \quad (2.30)$$

Da questo si ottiene l'espressione di $h_{\mu\nu}(q)$ nello spazio dei momenti

$$h_{\mu\nu}(q) = \left(\frac{\kappa M}{2\vec{q}^2}\right) 2\pi\delta(q_0) \bar{S}_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

dove si è sfruttata la definizione di $\kappa^2 = 16\pi G$ e si è introdotto il tensore $\bar{S}_{\mu\nu}$

$$\bar{S}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0, \quad (2.32)$$

per esplicitare la dipendenza dagli indici tensoriali di $h_{\mu\nu}$.

2.2 La sezione d'urto all'ordine principale

Come abbiamo già accennato nell'introduzione al capitolo, affronteremo il problema della deflessione di una particella in un campo gravitazionale esterno nel contesto della teoria perturbativa dei campi. Utilizzando questo formalismo determineremo la probabilità di diffusione per fotoni e fermioni, focalizzando la nostra attenzione al caso dei neutrini.

Al primo ordine valutiamo l'approssimazione di Born, che vale nel limite di interazione debole. L'elemento di matrice di diffusione S_{fi} consente di determinare l'ampiezza di transizione tra lo stato iniziale i e lo stato finale f ed è dato da

$$S_{fi} = -i \left\langle f \left| \int_V d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}(x) \right| i \right\rangle, \quad (2.33)$$

dove V è il volume in cui avviene l'interazione. L'espressione della densità di hamiltoniana di interazione è

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = -\mathcal{L}_{\text{int}}(x),$$

con \mathcal{L}_{int} densità di lagrangiana di interazione della particella diffusa, definita come

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = -\frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x), \quad (2.34)$$

dove $T^{\mu\nu}$ è il suo tensore energia-impulso, calcolato nell'ambito del Modello Standard. Gli stati iniziale e finale $|i\rangle$ e $|f\rangle$ proiettano solo alcuni dei contributi del tensore energia-impulso tra quelli riportati nel capitolo precedente. Esplicitando la densità di hamiltoniana e assumendo che il campo gravitazionale sia esterno si ottiene

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{i\kappa}{2} \int_V d^4x \langle f | h_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x) | i \rangle \\ &= -\frac{i\kappa}{2} \int_V d^4x h_{\mu\nu}(x) \langle f | T^{\mu\nu}(x) | i \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Lo stato iniziale è caratterizzato da una particella dotata di momento p_1 e spin s , lo stato finale comprende una particella di momento p_2 e spin r e l'elemento di matrice da valutare nello spazio dei momenti è

$$\langle p_2, r | T_{\mu\nu}(x) | p_1, s \rangle. \quad (2.36)$$

Per calcolare la sezione d'urto consideriamo la probabilità di transizione media differenziale $d\mathcal{W}(i \rightarrow f)$ per la transizione $i \rightarrow f$, data dal quadrato dell'elemento di matrice mediato nel tempo, diviso per il flusso associato alla particella incidente e moltiplicato per la densità di stati finali possibili nello spazio delle fasi:

$$d\mathcal{W}(i \rightarrow f) = \frac{\langle |S_{fi}|^2 \rangle}{j_i} dn_f \quad (2.37)$$

con

$$j_i = \frac{|\vec{p}_1|}{E_1 V} \quad \text{e} \quad dn_f = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\vec{p}_2 = \frac{V}{(2\pi)^3} |\vec{p}_2| E_2 dE_2 d\Omega, \quad (2.38)$$

dove si è riarrangiato opportunamente il differenziale dn_f in modo da ottenere il differenziale in termini dell'energia associata allo stato finale, dopo il passaggio alle coordinate polari sferiche.

La sezione d'urto differenziale $d\sigma$ è definita come la probabilità di transizione media divisa per il tempo di transizione \mathcal{T}

$$d\sigma = \frac{d\mathcal{W}}{\mathcal{T}} \quad (2.39)$$

e contiene informazioni circa la probabilità che avvenga il processo di diffusione.

2.2.1 La sezione d'urto per il fermione

Consideriamo il caso generale in cui la particella a interagire con il campo gravitazionale sia un fermione massivo, dotato di massa a riposo m . Il campo che rappresenta tale particella è il campo di Dirac e per studiare l'interazione con la sorgente gravitazionale esterna all'ordine principale nello sviluppo perturbativo occorre fare riferimento all'espressione del vertice nello spazio dei momenti, data da

$$V^{\mu\nu}(p_1, p_2) = \frac{i}{4} \left(\gamma^\mu (p_1 + p_2)^\nu + \gamma^\nu (p_1 + p_2)^\mu - 2\eta^{\mu\nu} (\not{p}_1 + \not{p}_2 - 2m) \right). \quad (2.40)$$

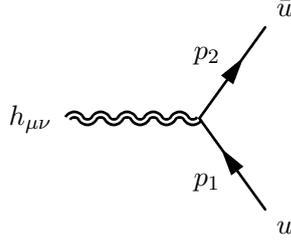


Figura 2.2: Il vertice d'interazione di due fermioni, uno entrante con quadrimomento p_1 e uno uscente con quadrimomento p_2 , in un campo gravitazionale esterno. Quest'ultimo è rappresentato dalla linea ondulata doppia del tensore $h_{\mu\nu}$ delle fluttuazioni della metrica, i fermioni sono rappresentati dalle linee orientate.

Tale vertice è rappresentato dal diagramma di Feynman nella figura 2.2 e si estrae dal “contributo cinetico” al tensore energia-impulso fermionico nella (1.157). L'elemento da valutare risulta, quindi,

$$\begin{aligned} \langle p_2, r | T_{\mu\nu}(x) | p_1, s \rangle &= \frac{\bar{u}^r(p_2)}{\sqrt{2(p_2)^0 V}} e^{-ip_2 \cdot x} V^{\mu\nu}(p_1, p_2) \frac{u^s(p_1)}{\sqrt{2(p_1)^0 V}} e^{ip_1 \cdot x} \\ &= \frac{1}{2V \sqrt{E_1 E_2}} e^{iq \cdot x} \bar{u}^r(p_2) V^{\mu\nu}(p_1, p_2) u^s(p_1), \end{aligned} \quad (2.41)$$

dove V è il volume spaziale macroscopico entro cui avviene l'interazione e con $q = p_1 - p_2$ nell'argomento dell'esponenziale si indica il quadrimomento trasferito.

L'elemento di matrice S_{fi} , sfruttando la (2.28) e la (2.31), è dato da

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{i\kappa}{4V \sqrt{E_1 E_2}} \bar{u}^r(p_2) V^{\mu\nu}(p_1, p_2) u^s(p_1) h_{\mu\nu}(q) \\ &= -\frac{i\kappa}{4V \sqrt{E_1 E_2}} 2\pi \delta(q_0) \left(\frac{\kappa M}{2\bar{q}^2} \right) \bar{u}^r(p_2) V^{\mu\nu}(p_1, p_2) u^s(p_1) \bar{S}_{\mu\nu} \\ &= -\frac{i\kappa}{4V \sqrt{E_1 E_2}} 2\pi \delta(q_0) \left(\frac{\kappa M}{2\bar{q}^2} \right) \mathcal{Y}_0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

dove per compattezza si è introdotto $\mathcal{Y}_0 \equiv \bar{u}^r(p_2) V^{\mu\nu}(p_1, p_2) u^s(p_1) \bar{S}_{\mu\nu}$. Prima di quadrare l'elemento di matrice S_{fi} si effettuano alcune semplificazioni, considerando che gli spinori $u^s(k)$ e $\bar{u}^s(k)$ soddisfano le equazioni di Dirac

$$(\not{k} - m) u^s(k) = 0 \quad \bar{u}^s(k) (\not{k} - m) = 0. \quad (2.43)$$

Rendiamo esplicito il termine \mathcal{Y}_0 che compare nella (2.42) considerando le espressioni di $V^{\mu\nu}$, $\bar{S}_{\mu\nu}$ e introduciamo il quadrimomento $p = p_1 + p_2$. Parametrizzando i quadrimomenti p_1 e p_2 degli stati iniziale e finale come

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad p_2 = (E_2, \vec{p}_2), \quad (2.44)$$

il termine \mathcal{Y}_0 risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_0 &= \frac{i}{4} \bar{u}^r(p_2) \left(\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu - 2\eta^{\mu\nu} (\not{p} - 2m) \right) u^s(p_1) (\eta_{\mu\nu} - 2\delta_\mu^0 \delta_\nu^0) \\ &= \frac{i}{4} \bar{u}^r(p_2) \left(2\not{p} - 8\not{p} + 16m - 4\gamma^0 ((p_1)^0 + (p_2)^0) + 4\eta^{00} (\not{p} - 2m) \right) u^s(p_1) \\ &= \frac{i}{4} \bar{u}^r(p_2) \left(4m - 4\gamma^0 (E_1 + E_2) \right) u^s(p_1) \\ &= i \bar{u}^r(p_2) \left(m - \gamma^0 (E_1 + E_2) \right) u^s(p_1) \end{aligned} \quad (2.45)$$

dove si è usato $\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 4$ e le (2.43). Nel calcolo della sezione d'urto entra il quadrato dell'ampiezza di probabilità associata all'elemento di matrice di diffusione, che viene mediato sugli stati di spin delle particelle dello stato iniziale e sommato su quelli dello stato finale

$$\begin{aligned} \langle |iS_{fi}|^2 \rangle &= \frac{\kappa^2}{16V^2 E_1 E_2} 2\pi\delta(q_0) \mathcal{T} \left(\frac{\kappa M}{2q^2} \right)^2 \\ &\quad \times \frac{1}{2} \sum_{r,s} \bar{u}^r(p_2) \left(m - \gamma^0(E_1 + E_2) \right) u^s(p_1) \\ &\quad \times \bar{u}^s(p_1) \left(m - \gamma^0(E_1 + E_2) \right) u^r(p_2) \end{aligned} \quad (2.46)$$

con \mathcal{T} tempo di transizione. La presenza di questo fattore deriva dall'assunzione che l'interazione avvenga in un tempo finito \mathcal{T} e si può scrivere

$$\delta(q_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} dt e^{iq_0 t}$$

da cui

$$(2\pi\delta(q_0))^2 = (2\pi)^2 \delta(q_0)\delta(0) = 2\pi\delta(q_0)\mathcal{T}.$$

Consideriamo ora la parte rilevante per la somma sugli stati di spin nella (2.46), in cui la somma è sugli indici spinoriali. Sfruttando la relazione di completezza

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad (2.47)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_{s,r} \bar{u}^r(p_2) \left(m - \gamma^0(E_1 + E_2) \right) u^s(p_1) \bar{u}^s(p_1) \left(m - \gamma^0(E_1 + E_2) \right) u^r(p_2) \\ &= \text{tr} \left[(\not{p}_2 + m) \left(m - \gamma^0(E_1 + E_2) \right) (\not{p}_1 + m) \left(m - \gamma^0(E_1 + E_2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Dalla precedente si ottiene la somma di tracce di prodotti di matrici di Dirac. La traccia del prodotto di un numero dispari di matrici è nulla, le espressioni per la traccia del prodotto di due e quattro matrici di Dirac sono

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu} \quad (2.49)$$

$$\text{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu}). \quad (2.50)$$

Sfruttando tali relazioni nella (2.48) e le condizioni sui momenti esterni

$$p_1^2 = m^2 \quad p_2^2 = m^2 \quad (2.51)$$

otteniamo l'espressione esplicita della traccia che compare nella (2.48)

$$\begin{aligned} \text{tr}[\dots] &= 4m^4 - 4m^2(E_1 + E_2)^2 + 4m^2(p_1 \cdot p_2) + 2(E_1 + E_2)^4 \\ &\quad - 16(E_1 + E_2)^2(p_1 \cdot p_2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Per valutare il prodotto $(p_1 \cdot p_2)$ ci poniamo nel sistema di riferimento in cui le parti spaziali dei quadrimomenti formano un angolo ϑ . Allora possiamo scrivere

$$p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_2| \cos \vartheta. \quad (2.53)$$

Sostituiamo nell'espressione che definisce la sezione d'urto (2.39) la (2.37) e la (2.46), integriamo sull'energia dello stato finale E_2 e la $\delta(q_0) = \delta(E_1 - E_2)$, che esprime la conservazione dell'energia, dà $E_1 = E_2 \equiv E$. Da questa e dalle relazioni (2.51) i quadrimomenti p_1 e p_2 sono tali che $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$. Allora la (2.53) si scrive come

$$\begin{aligned} p_1 \cdot p_2 &= E^2 - |\vec{p}_1|^2 \cos \vartheta \\ &= m^2 + |\vec{p}_1|^2 (1 - \cos \vartheta) \\ &= m^2 + 2 |\vec{p}_1|^2 \sin^2 \vartheta/2, \end{aligned} \quad (2.54)$$

dove si sono sfruttate le (2.51) e la formula di bisezione del seno. L'espressione della traccia (2.48), scritta in termini di m^2 e $|\vec{p}_1|^2$, assume la forma

$$\text{tr}[\dots] = 32 |\vec{p}_1|^4 \left(\cos^2 \vartheta/2 + \frac{1}{4} \frac{m^2}{|\vec{p}_1|^2} + \frac{1}{4} \frac{m^4}{|\vec{p}_1|^4} + \frac{3}{4} \frac{m^2}{|\vec{p}_1|^2} \cos^2 \vartheta/2 \right). \quad (2.55)$$

Oltre al calcolo della traccia la (2.53) permette di determinare la forma del momento trasferito q

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2(p_1 \cdot p_2) \\ &= 2m^2 - 2m^2 - 4 |\vec{p}_1|^2 \sin^2 \vartheta/2 \\ &= -4 |\vec{p}_1|^2 \sin^2 \vartheta/2, \end{aligned} \quad (2.56)$$

da cui possiamo scrivere

$$q = \left(0, 2 \vec{p}_1 \sin \vartheta/2 \right). \quad (2.57)$$

Inserendo quanto ottenuto nell'espressione della sezione d'urto (2.39) si produce il risultato all'ordine principale nello sviluppo perturbativo per la diffusione di un fermione con massa a riposo m e momento iniziale \vec{p}_1

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_f} = \left(\frac{GM}{\sin^2(\vartheta/2)} \right)^2 \left(\cos^2 \vartheta/2 + \frac{1}{4} \frac{m^2}{|\vec{p}_1|^2} + \frac{1}{4} \frac{m^4}{|\vec{p}_1|^4} + \frac{3}{4} \frac{m^2}{|\vec{p}_1|^2} \cos^2 \vartheta/2 \right), \quad (2.58)$$

dove si è sfruttata la definizione di $\kappa^2 = 16\pi G$ e il pedice f si riferisce ai fermioni. Nella figura 2.3 si riportano gli andamenti della sezione d'urto riscalata rispetto al raggio di Schwarzschild

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_h = \frac{1}{r_S^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right), \quad (2.59)$$

e valutata nel caso dei leptoni carichi (e , μ e τ) e nel caso di un neutrino. Notiamo, inoltre, che $(d\sigma/d\Omega)_h$ è adimensionale. L'espressione della sezione d'urto all'ordine principale per il neutrino ν si ottiene a partire da quella del fermione massivo (2.58) nel limite di massa nulla $m \rightarrow 0$

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_\nu} = \left(\frac{GM}{\sin^2(\vartheta/2)} \right)^2 \cos^2 \vartheta/2. \quad (2.60)$$

La sezione d'urto nel caso del neutrino non dipende dall'energia, a differenza di quanto avviene invece per il fermione massivo, come risulta immediato dal confronto delle (2.60) e (2.58). Nella (2.58) la dipendenza dall'energia diventa esplicita se esprimiamo il modulo della parte spaziale del quadrimomento in termini della massa a riposo del fermione e dell'energia totale

$$|\vec{p}_1|^2 = E^2 - m^2. \quad (2.61)$$

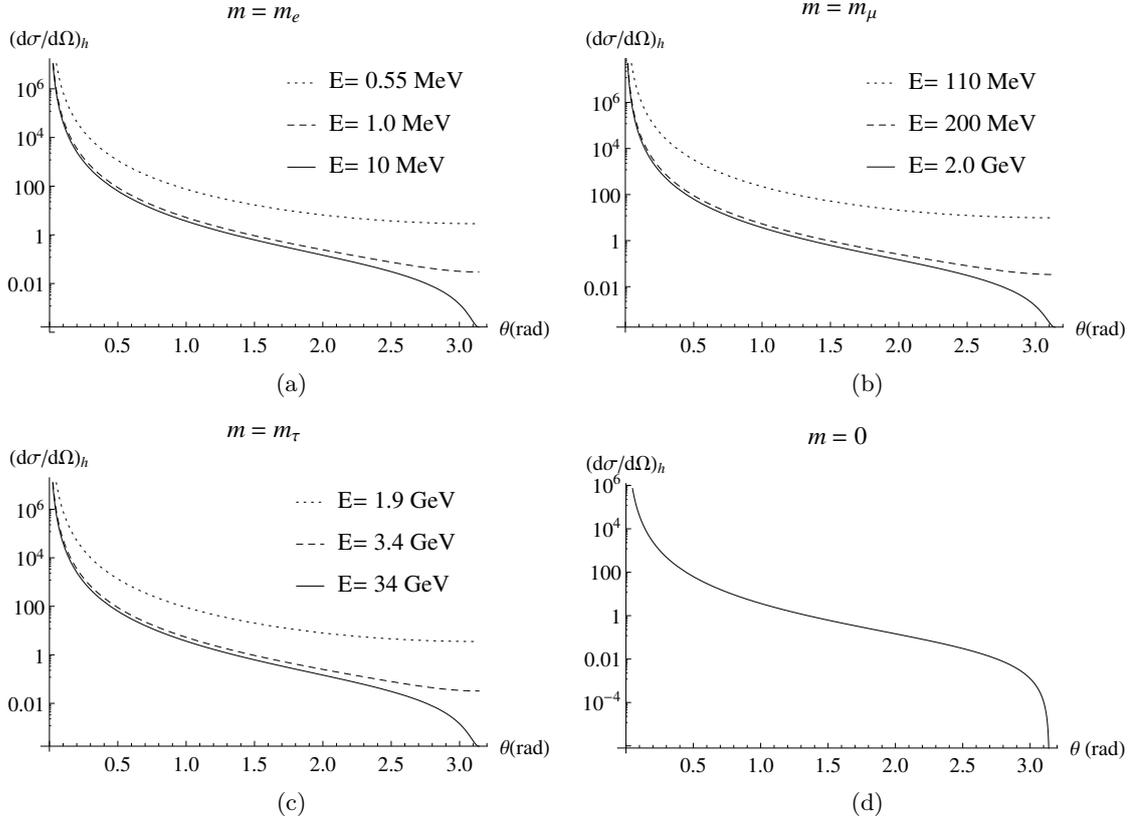


Figura 2.3: La sezione d'urto differenziale per i fermioni riscalata rispetto alla lunghezza caratteristica del sistema, il raggio di Schwarzschild (nella figura si indica con il pendice h , che sta per orizzonti) in funzione dell'angolo ϑ , che varia tra 0 e π . Si presentano i risultati per i leptoni carichi delle tre famiglie nelle figure (a), (b) e (c), in cui si riportano gli andamenti per tre valori diversi dell'energia. La figura (d) rappresenta l'andamento della sezione d'urto nel limite di massa nulla nel caso dei neutrini. All'aumentare dell'energia la sezione d'urto riproduce il limite di massa nulla.

Dalla figura 2.3 risulta evidente un comportamento analogo per i leptoni coinvolti e in particolare all'aumentare dell'energia la funzione tende a riprodurre il caso di massa nulla. Questo appare evidente dall'espressione (2.58), tenendo presente la (2.61). In particolare per grandi valori dell'energia il termine dominante è $\cos^2 \vartheta/2$.

A basse energie, relativamente ai valori della massa a riposo delle particelle coinvolte, la sezione d'urto per il fermione presenta andamenti differenti, come rappresentato nella figura 2.4.

2.2.2 La sezione d'urto per il fotone

Nel caso del fotone si procede in maniera analoga a quanto fatto per il fermione. Naturalmente ciò che cambia è il vertice che rappresenta l'interazione e il diagramma di Feynman da considerare, riportato nella figura 2.5.

L'espressione del vertice che descrive l'interazione di due fotoni in un campo gravitazionale

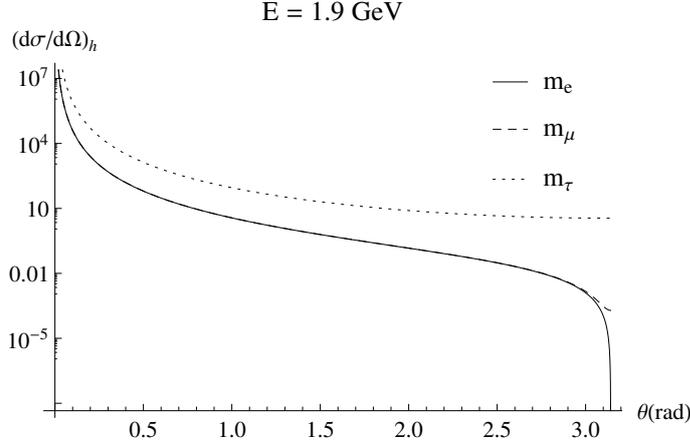


Figura 2.4: Si riportano gli andamenti delle sezioni d'urto per l'elettrone, il muone e il tau per lo stesso valore dell'energia $E = 1.9 \text{ GeV}$. La sezione d'urto dell'elettrone coincide con quella del neutrino, valutata nel limite di massa nulla, perché in tal caso $E \gg m_e$. Questa considerazione è valida anche nel caso del muone, seppure per grandi valori angolari, $\vartheta \sim \pi$, si abbia uno scostamento. Per il tau si osserva la differenza più rilevante, perché in questo caso $E \sim m_\tau$.

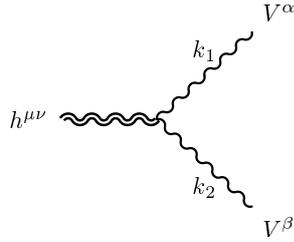


Figura 2.5: Il vertice di interazione di due fotoni con il campo gravitazionale. I fotoni sono rappresentati con le linee ondulate e il campo gravitazionale con la linea ondolata doppia. Con k_1 e k_2 si indicano i valori dei quadrimomenti associati rispettivamente al fotone entrante e a quello uscente.

esterno si ricava dal tensore energia-impulso nell'equazione (1.154) ed è dato da

$$V^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2) = -i \frac{\kappa}{2} \left\{ (k_1 \cdot k_2 + M_V^2) C^{\mu\nu\alpha\beta} + D^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2) + \frac{1}{\xi} E^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2) \right\}, \quad (2.62)$$

dove le strutture tensoriali C , D e E sono riportate in appendice B e ξ è il parametro di gauge-fixing. Nella scelta di gauge di Feynman $\xi = 1$. Se i fotoni sono on-shell, come nel caso in questione, il vertice assume una forma semplificata, in cui non compare la struttura tensoriale E .

L'elemento di matrice di diffusione \mathcal{S}_{fi} si riferisce alla transizione a partire da uno stato iniziale caratterizzato dal quadrimomento k_1 e dalla polarizzazione λ_1 in uno stato finale descritto dal quadrimomento k_2 e stato di polarizzazione λ_2 . Si ottiene

$$i\mathcal{S}_{fi} = \frac{1}{4V\sqrt{E_1 E_2}} 2\pi\delta(q_0) h_{\mu\nu}(\vec{q}) V^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2) e_\alpha(\vec{k}_1, \lambda_1) e_\beta^*(\vec{k}_2, \lambda_2), \quad (2.63)$$

con $q = k_1 - k_2$ quadrimomento trasferito. Calcolando il modulo quadro dell'elemento di matrice di diffusione, mediando sugli stati di polarizzazione iniziali e sommando su quelli finali si ottiene il

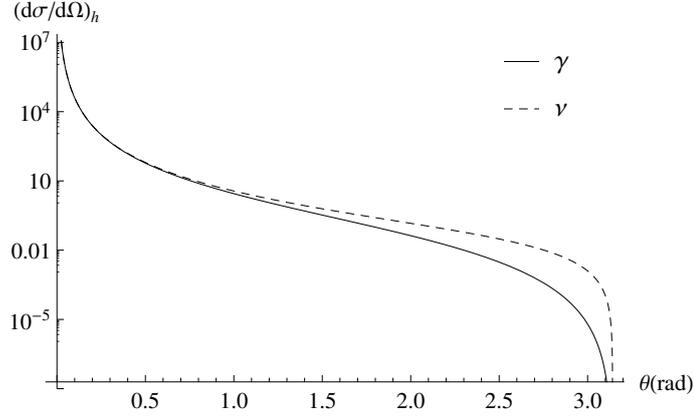


Figura 2.6: Le sezioni d'urto differenziali all'ordine principale riscalate rispetto al raggio di Schwarzschild in funzione dell'angolo ϑ per il fotone γ e il neutrino ν , rispettivamente rappresentate dalla linea continua e da quella tratteggiata. Entrambe le sezioni d'urto corrispondono a particelle con massa nulla, non dipendono dall'energia delle stesse e risultano discostarsi in modo evidente per grandi angoli.

risultato da inserire nella formula (2.37) per calcolare poi la sezione d'urto del fotone. In questo passaggio si sfrutta la relazione di completezza per i vettori di polarizzazione dei fotoni e si moltiplica il modulo quadro per il fattore di simmetria $1/2$.

La sezione d'urto differenziale all'ordine principale nel caso della diffusione di fotoni per mezzo del campo gravitazionale esterno risulta

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_\gamma} = (GM)^2 \cot^4(\vartheta/2), \quad (2.64)$$

il cui andamento è riportato nella figura 2.6.

Sia nel caso del neutrino che in quello del fotone la sezione d'urto all'ordine principale non dipende dall'energia delle particelle diffuse. Diversamente avviene per i fermioni massivi, nel qual caso è evidente la dipendenza dall'energia nell'espressione della sezione d'urto, anche se, come sottolineato in precedenza, questa dipendenza diventa sempre meno rilevante all'aumentare della stessa.

Capitolo 3

La deflessione nell'approccio semi-classico

In questa sezione faremo riferimento allo studio delle traiettorie compiute da particelle prive di massa in un campo gravitazionale. In particolare tra le particelle descritte nel Modello Standard ci riferiamo ai fotoni e ai neutrini. Tali particelle immerse in un campo gravitazionale subiscono una deviazione nella traiettoria che ne descrive il moto e che risulta essere differente da quella che le stesse compierebbero in assenza del campo. Questo fenomeno si basa sul *principio di equivalenza*, fondamento della relatività generale, che stabilisce che per ogni evento dello spazio-tempo è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate localmente inerziali, tali che in un intorno sufficientemente piccolo dell'evento, le leggi della fisica abbiano la stessa forma che hanno in un sistema di riferimento inerziale. Ciò si traduce con l'instaurarsi dell'invarianza di Lorentz locale nell'intorno dell'evento.

Se si considera un sistema di coordinate accelerato, i raggi luminosi sono deflessi per effetto delle forze inerziali. Per il principio di equivalenza gli effetti della gravità sono localmente indistinguibili da quelli delle forze inerziali, dunque anche i campi gravitazionali producono una deflessione nella traiettoria dei fotoni e tutto ciò si può estendere al caso dei neutrini.

Nel seguito si descrive il problema del moto di una generica particella a massa nulla in un campo gravitazionale generato da una massa puntiforme e si studiano le equazioni del moto dal punto di vista classico, tenendo presente che i risultati ottenuti sono validi sia per il fotone che per il neutrino. La deviazione dalla traiettoria originaria viene quantificata con l'introduzione dell'angolo di deflessione. Quindi si delinea la strategia usata per confrontare il risultato classico con quanto previsto da un'analisi semi-classica, suggerita tempo fa da Delbourgo e Phocas-Cosmetatos [16], che coinvolge la sezione d'urto quantistica calcolata nel capitolo precedente.

Per poter considerare come ragionevoli delle correzioni calcolabili a livello quantistico, occorre valutare se l'approccio finora seguito, all'ordine principale nello sviluppo perturbativo, consente di riprodurre quanto previsto dall'analisi classica del problema in esame.

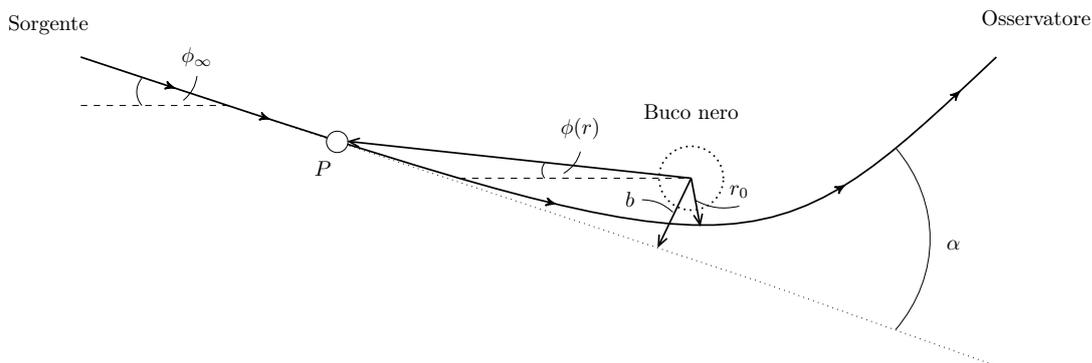


Figura 3.1: Il moto di una particella a massa nulla in presenza di un campo gravitazionale generato da un buco nero. La particella P viene emessa da una sorgente che si trova in una regione dello spazio-tempo asintoticamente piatto con angolo ϕ_∞ e la sua posizione lungo la traiettoria è descritta dall'angolo $\phi(r)$. Con r_0 si indica il parametro di massimo avvicinamento rispetto all'origine del sistema di coordinate, b è il parametro d'impatto. La presenza del buco nero causa la deviazione dalla traiettoria originaria e α è l'angolo di deflessione.

3.1 La soluzione classica

Consideriamo una particella a massa nulla immersa nel campo gravitazionale statico e isotropo generato da una massa M posta all'origine del sistema di coordinate e determiniamo le equazioni che descrivono il moto della particella. Supponiamo che lo spazio-tempo sia asintoticamente piatto, cioè la particella viene emessa da una sorgente che si trova in una regione in cui vale la metrica minkowskiana, si avvicina alla massa che genera il campo gravitazionale e infine raggiunge un osservatore, posto in una regione in cui lo spazio-tempo è nuovamente piatto. Il moto della particella è rappresentato nella figura 3.1.

Si introduce la direzione incidente della particella ϕ_∞ , il parametro di massimo avvicinamento r_0 e il parametro d'impatto b , legato a r_0 dalla relazione

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{r_0}}}. \quad (3.1)$$

L'orbita seguita dalla particella è descritta dall'espressione

$$\phi(r) = \phi_\infty + \int_r^\infty \left| \frac{d\phi}{dr} \right| dr. \quad (3.2)$$

La variazione totale dell'angolo ϕ rispetto alla coordinata radiale r che decresce dall'infinito fino a raggiungere r_0 , per poi crescere nuovamente verso l'infinito, è dunque pari a due volte la sua variazione tra infinito e r_0 . Se la traiettoria fosse una linea retta, quindi in assenza di una sorgente di campo gravitazionale, tale variazione sarebbe di π .

Si introduce l'angolo di deflessione α , come funzione del parametro di massimo avvicinamento

$$\begin{aligned} \alpha(r_0) &= 2 |\phi(r_0) - \phi_\infty| - \pi \\ &= 2 \int_{r_0}^\infty \left| \frac{d\phi}{dr} \right| dr - \pi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Per poter dare un'espressione dell'angolo di deflessione in funzione del parametro d'impatto occorre studiare il moto della particella nel sistema, per determinare $d\phi/dr$. La metrica che descrive la

curvatura dello spazio-tempo generata da una massa puntiforme è quella di Schwarzschild (con $c = 1$)

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2, \quad (3.4)$$

avendo adottato il sistema di coordinate polari (t, r, ϑ, ϕ) .

Il moto della particella è descritta nello spazio-tempo da una geodetica dipendente da un parametro λ , $x^\mu = x^\mu(\lambda)$, e con $x^\mu = (t, r, \vartheta, \phi)$. L'equazione della geodetica che descrive il moto del sistema ha la forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (3.5)$$

con $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ la connessione affine definita nella (1.111). Questa espressione è valida sia per geodetiche nulle che non nulle, parametrizzate in termini di λ . Se la curva è parametrizzata in modo che la funzione $f(\lambda)$ del parametro al secondo membro della (3.5) si annulli allora λ risulta essere un parametro privilegiato, detto *parametro affine*. L'equazione della geodetica diventa quindi

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (3.6)$$

Per definire le equazioni del moto occorre valutare le componenti della connessione affine per la metrica considerata. È comunque possibile semplificare la trattazione adottando una procedura variazionale in analogia con quanto avviene in meccanica classica. Tale procedura risulta naturale per determinare la forma delle geodetiche non nulle, perché si richiede che $d\tau/d\lambda \neq 0$. Tuttavia si può definire una procedura variazionale che permetta di generare geodetiche parametrizzate e che rimane valida per geodetiche nulle.

In meccanica classica un sistema fisico è descritto in termini di un insieme di coordinate generalizzate \tilde{x}^i che sono funzioni del tempo t . Tali coordinate generano uno spazio il cui elemento infinitesimo è

$$d\tau^2 = g_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j, \quad (3.7)$$

che è chiamato spazio delle configurazioni del sistema. La lagrangiana del sistema si costruisce a partire dall'energia cinetica e potenziale

$$\mathcal{L}_{\text{cl}} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} g_{ij} \tilde{x}'^i \tilde{x}'^j - V(\tilde{x}), \quad (3.8)$$

dove con l'apice si indica la derivata rispetto al tempo $\tilde{x}'^i = d\tilde{x}^i/dt$. Richiedendo che l'azione

$$\mathcal{S}_{\text{cl}} = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}_{\text{cl}} \quad (3.9)$$

sia stazionaria rispetto a piccole variazioni delle funzioni $\tilde{x}^i(t)$ si ottiene che le equazioni del moto sono le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{cl}}}{\partial \tilde{x}'^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{cl}}}{\partial \tilde{x}^i} = 0. \quad (3.10)$$

Scrivendo le equazioni del moto in forma estesa si ottiene

$$\tilde{x}''^i + \Gamma_{jk}^i \tilde{x}'^j \tilde{x}'^k = -g^{ij} \partial_j V. \quad (3.11)$$

Utilizzando il formalismo descritto sopra si introduce la lagrangiana associata al sistema considerato, che ha la forma [31]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (3.12)$$

dove si è introdotta la notazione $\dot{x} \equiv dx/d\lambda$, con λ il parametro affine che descrive la curva compiuta dalla particella. Le equazioni del moto sono

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.13)$$

Scriviamo la densità di lagrangiana in forma estesa, con la metrica di Schwarzschild

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\vartheta}^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2 \right\}. \quad (3.14)$$

Le quattro equazioni del moto per le variabili coinvolte sono

$$k = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t} \quad (3.15)$$

$$0 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \ddot{r} + \frac{GM}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-2} \frac{GM}{r^2} \dot{r}^2 - r (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2) \quad (3.16)$$

$$0 = \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\phi}^2 \quad (3.17)$$

$$h = r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi}. \quad (3.18)$$

Le quantità k e h nelle (3.15) e (3.18) sono costanti. L'equazione geodetica (3.17) è soddisfatta per $\vartheta = \pi/2$ e il moto della particella si svolge in un piano. Stante la simmetria sferica della metrica di Schwarzschild possiamo studiare il sistema fisico ponendoci nel piano equatoriale definito da $\vartheta = \pi/2$, senza perdere di generalità. In questo caso le equazioni geodetiche si riducono a

$$k = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t} \quad (3.19a)$$

$$0 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} \ddot{r} + \frac{GM}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-2} \frac{GM}{r^2} \dot{r}^2 - r \dot{\phi}^2 \quad (3.19b)$$

$$h = r^2 \dot{\phi}. \quad (3.19c)$$

Queste equazioni risultano valide sia per geodetiche nulle che non nulle descritte da un parametro affine. Per le geodetiche nulle si ha la condizione

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (3.20)$$

Per dare un'interpretazione fisica alle costanti h e k consideriamo il fatto che la lagrangiana (3.12) non dipende esplicitamente dalle coordinate t e ϕ , che sono dunque cicliche. Le componenti del quadrimomento p della particella p_t e p_ϕ sono conservate lungo la geodetica. Per una particella a massa nulla possiamo scegliere un appropriato parametro affine per cui si abbia $p^\mu = \dot{x}^\mu$. Allora possiamo scrivere

$$p_t = g_{tt} \dot{t} = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \dot{t} = k \quad (3.21)$$

$$p_\phi = g_{\phi\phi} \dot{\phi} = -r^2 \dot{\phi} = -h. \quad (3.22)$$

Consideriamo ora un osservatore che viaggia con quadrivelocità u^μ e osserva una particella con quadrimomento p^μ . L'energia che tale osservatore misurerebbe è data da

$$E = p \cdot u = p_\mu u^\mu. \quad (3.23)$$

Per un osservatore a riposo all'infinito il quadrivettore $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, cosicché si ha

$$E = p_t = k, \quad (3.24)$$

quindi la costante k corrisponde all'energia totale della particella nella sua orbita. Per la costante h possiamo vedere immediatamente dall'espressione (3.18) che è pari al momento angolare della particella e in particolare

$$L = -p_\phi. \quad (3.25)$$

Imponendo che la particella descriva una geodetica nulla parametrizzata da λ l'equazione (3.16) si semplifica notevolmente e le equazioni del moto risultano

$$0 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 \quad (3.26a)$$

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} \quad (3.26b)$$

$$L = -r^2 \dot{\phi}. \quad (3.26c)$$

Sostituendo le (3.26b) e (3.26c) nella (3.26a) si ottiene

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2} = 0, \quad (3.27)$$

moltiplicando ambo i membri della precedente per $(1 - 2GM/r)$ e dividendo per L^2 si ha

$$\frac{E^2}{L^2} - \frac{\dot{r}^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = 0. \quad (3.28)$$

Il secondo termine dell'espressione si può riscrivere sfruttando la definizione di L nella (3.26c)

$$\frac{\dot{r}^2}{L^2} = \frac{\dot{r}^2}{r^4 \dot{\phi}^2} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2, \quad (3.29)$$

e introducendo la costante del moto $u \equiv E/L$ si ottiene

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = 0. \quad (3.30)$$

Riordinando questa relazione si ottiene infine l'espressione utilizzata per il calcolo dell'angolo di deflessione

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{u^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \right]^{-1/2}. \quad (3.31)$$

Poiché il parametro u è una costante del moto, possiamo determinarne un'espressione utile per introdurre esplicitamente la dipendenza dal parametro di massimo avvicinamento r_0 della traiettoria compiuta dalla particella. In corrispondenza di r_0 si ha

$$u = r_0 \left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right)^{-1/2}, \quad (3.32)$$

quindi la (3.31) si può scrivere come

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \right]^{-1/2}, \quad (3.33)$$

dove il segno $+$ corrisponde alla porzione della traiettoria della particella quando la coordinata radiale aumenta come funzione dell'angolo ϕ , mentre il segno $-$ si riferisce alla porzione in cui r diminuisce al variare di ϕ .

Possiamo ora introdurre l'espressione della (3.33) nella (3.3) che descrive l'angolo di deflessione

$$\alpha(r_0) = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}} - \pi. \quad (3.34)$$

Perché la variabile di integrazione risulti una grandezza adimensionale e con lo scopo di semplificare l'espressione dell'integrale, consideriamo un cambiamento di variabile, sfruttando la lunghezza caratteristica del sistema: esprimiamo tutte le lunghezze in unità di raggi di Schwarzschild. Introduciamo quindi $x = r/(2GM)$ e definiamo $x_0 = r_0/(2GM)$

$$\alpha(x_0) = 2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x_0^2} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) - \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)}} - \pi. \quad (3.35)$$

Consideriamo un ulteriore cambiamento di variabile di integrazione, in modo da calcolare l'integrale definito in un intervallo finito, e poniamo $t = 1/x$, ottenendo

$$\begin{aligned} \alpha(x_0) &= -2 \int_{1/x_0}^0 \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{x_0^2} \left(1 - \frac{1}{x_0}\right) - t^2 (1-t)}} - \pi \\ &= 2x_0^{3/2} \int_0^{1/x_0} \frac{dt}{\sqrt{x_0^3 t^3 - x_0^3 t^2 + x_0 - 1}} - \pi. \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'integrale che si ottiene può essere scritto sotto forma di integrale ellittico di prima specie, con il metodo descritto in Appendice A. L'angolo di deflessione in funzione del parametro di massimo avvicinamento in unità di raggio di Schwarzschild x_0 è quindi [32]

$$\alpha(x_0) = -4\Sigma(x_0)F(\phi(x_0); \lambda(x_0)) - \pi, \quad (3.37)$$

con

$$F(\phi(x_0); \lambda(x_0)) = \int_0^{\phi(x_0)} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2(x_0)\varphi^2}}. \quad (3.38)$$

Le $\Sigma(x_0)$, $\phi(x_0)$, $\lambda(x_0)$ sono funzioni di x_0 , le cui espressioni sono determinate nell'Appendice A

$$\Sigma(x_0) = \sqrt{\frac{x_0^2 (x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3})}{6 - 4x_0}} \quad (3.39a)$$

$$\phi(x_0) = \arcsin(\tau(x_0)) \quad (3.39b)$$

$$\tau(x_0) = \sqrt{\frac{2}{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}} \quad (3.39c)$$

$$\lambda^2(x_0) = \frac{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}{x_0 - 3 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}. \quad (3.39d)$$

L'espressione (3.37) costituisce la soluzione esatta al problema dell'individuazione della traiettoria del moto della particella. Tuttavia per grandi valori del parametro d'impatto b la si può scrivere in forma approssimata

$$\alpha(b) \sim \frac{4GM}{b}, \quad (3.40)$$

in forza del fatto che per grandi valori del parametro di massimo avvicinamento r_0 risulta $b \sim r_0$.

3.2 La soluzione semi-classica

Per capire come sia possibile includere la sezione d'urto calcolata all'ordine principale dello sviluppo perturbativo nel problema in esame, consideriamo la teoria classica della diffusione di un fascio di particelle per mezzo di un potenziale centrale. Il fascio è costituito da particelle della stessa energia, per il quale si definisce una densità di flusso di particelle (o intensità). In questo contesto si introduce la sezione d'urto efficace di diffusione

$$d\sigma = \frac{dN}{I}, \quad (3.41)$$

dove dN si riferisce al numero di particelle del fascio diffuse nell'angolo solido $d\Omega$ nell'unità di tempo, I è l'intensità. L'energia e il momento angolare sono costanti del moto di ogni particella del fascio e sono coinvolte nella definizione dell'angolo di diffusione, l'angolo formato tra la direzione del fascio incidente e quello diffuso.

Per descrivere il processo di diffusione si introducono v_∞ e b , rispettivamente la velocità del fascio incidente e il parametro d'impatto, definito come la distanza tra la retta direttrice della velocità incidente e il centro del potenziale. Le costanti del moto sono ridefinite in termini di v_∞ e b e si esprime l'angolo di diffusione in funzione del parametro d'impatto $\vartheta(b)$.

Si assume che la funzione $\vartheta(b)$ sia biunivoca, per cui tra le particelle che costituiscono il fascio solo quelle il cui moto è caratterizzato da un parametro d'impatto b compreso tra b e $b + db$ saranno diffuse di angoli compresi tra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$. La variazione del numero di particelle con parametro d'impatto tra b e $b + db$ è pari al prodotto tra l'intensità del fascio I e l'area compresa tra le circonferenze di raggi b e $b + db$

$$dN = I 2\pi b db, \quad (3.42)$$

per cui la sezione d'urto efficace è, esplicitando la dipendenza di b dall'angolo ϑ ,

$$d\sigma = 2\pi b(\vartheta) \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| d\vartheta. \quad (3.43)$$

Piuttosto che fare riferimento alla variazione di angolo piano $d\vartheta$ si usa riferirsi alla variazione dell'angolo solido $d\Omega$ che, per ϑ compreso tra ϑ e $d\vartheta$, è $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Introducendo questa espressione nella precedente e riordinando si ha

$$b(\vartheta) \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| = \sin \vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (3.44)$$

Al crescere del valore del parametro d'impatto l'angolo di deflessione corrispondente diminuisce, come suggerito dall'analisi classica, pertanto possiamo scrivere

$$d(b^2) = -2 \sin \vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega} d\vartheta, \quad (3.45)$$

dove si è considerato il passaggio dalla variabile b a b^2 al primo membro. Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale al primo ordine a variabili separabili. Integrando si ottiene la soluzione generale

$$b^2 = -2 \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \vartheta d\vartheta + c, \quad (3.46)$$

con c una costante da determinare imponendo le opportune condizioni al contorno.

Adattando questa procedura al problema di un fotone o di un fermione interagente con il campo gravitazionale di un buco nero di Schwarzschild, possiamo provare a introdurre nell'espressione (3.46) la sezione d'urto quantistica calcolata all'ordine principale dello sviluppo perturbativo, ottenendo la forma funzionale che lega il parametro d'impatto all'angolo di deflessione. Con il formalismo del paragrafo precedente il parametro d'impatto può essere espresso in termini del parametro di massimo avvicinamento secondo la (3.1) e passando a considerare le distanze in unità di orizzonti si introduce

$$b_h(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{x_0}}}, \quad (3.47)$$

che definisce il parametro d'impatto in unità di raggi di Schwarzschild. Una volta nota la relazione funzionale tra b_h e ϑ si procede al confronto con il risultato del caso classico, in cui si è ottenuta l'espressione dell'angolo di deflessione $\alpha(x_0)$. Dal confronto qualitativo dei due approcci si potrà dare una stima dei valori di x_0 per i quali i risultati coincidono. In corrispondenza degli intervalli nel parametro x_0 per cui ciò è verificato, è ragionevole considerare la sezione d'urto quantistica all'ordine perturbativo successivo, per poi valutare l'entità del peso di tale correzione al risultato classico.

La prima questione che si pone nell'usare questo approccio riguarda la scelta della condizione al contorno per fissare la costante dell'integrale nella (3.46). Se il problema da considerare fosse la diffusione da parte di una massa puntiforme si porrebbe senza difficoltà che in corrispondenza dell'annullarsi del parametro d'impatto la particella urta elasticamente contro la sorgente e torna indietro nella direzione in cui è stata emessa, cioè $b(\pi) = 0$. Nel caso in esame, però, la massa puntiforme che produce il campo gravitazionale è un buco nero, quindi in principio se il parametro d'impatto assumesse un valore pari al raggio di Schwarzschild o addirittura minore, non avrebbe senso parlare di deflessione della traiettoria di una particella, perché sarebbe intrappolata dal forte campo gravitazionale e non potrebbe più riemergere dall'orizzonte. Tuttavia l'intera analisi fin qui condotta è basata sull'ipotesi di campo gravitazionale sia debole, approssimazione che, tradotta in termini di distanze, equivale a dire che si è molto lontani dall'orizzonte degli eventi del buco nero. Questo ci permette di considerare $b_h(\pi) = 0$ come una ragionevole approssimazione per la condizione al contorno per l'equazione differenziale. Possiamo quindi scrivere

$$b_h^2(\alpha) = 2 \int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \vartheta d\vartheta \quad (3.48)$$

e sostituirvi l'espressione della sezione d'urto. risulta evidente pertanto la scelta dell'aggettivo "semi-classico" attribuito all'approccio appena descritto. Si delinea la tipica procedura classica per descrivere il fenomeno della diffusione e si sostituisce alla sezione d'urto classica la sezione d'urto quantistica calcolata all'ordine principale dello sviluppo perturbativo.

Nel caso del neutrino, sfruttando la sezione d'urto all'ordine principale (2.60) si ottiene

$$b_{h,\nu}^2(\alpha) = -1 + \csc^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \log \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right), \quad (3.49)$$

dove il pedice ν indica il neutrino. Estraeandone la radice e nel limite di piccoli angoli di deflessione $\alpha \ll 1$ si ottiene

$$b_{h,\nu}(\alpha) = \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{6}(1 + \log 8 - 3 \log \alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (3.50)$$

Analogamente si procede per il fotone (γ), considerando la sezione d'urto calcolata nella (2.64) e si ha

$$b_{h,\gamma}^2(\alpha) = \frac{1}{2} \left(-1 + \cos \alpha + 2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} + 8 \log \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) \right). \quad (3.51)$$

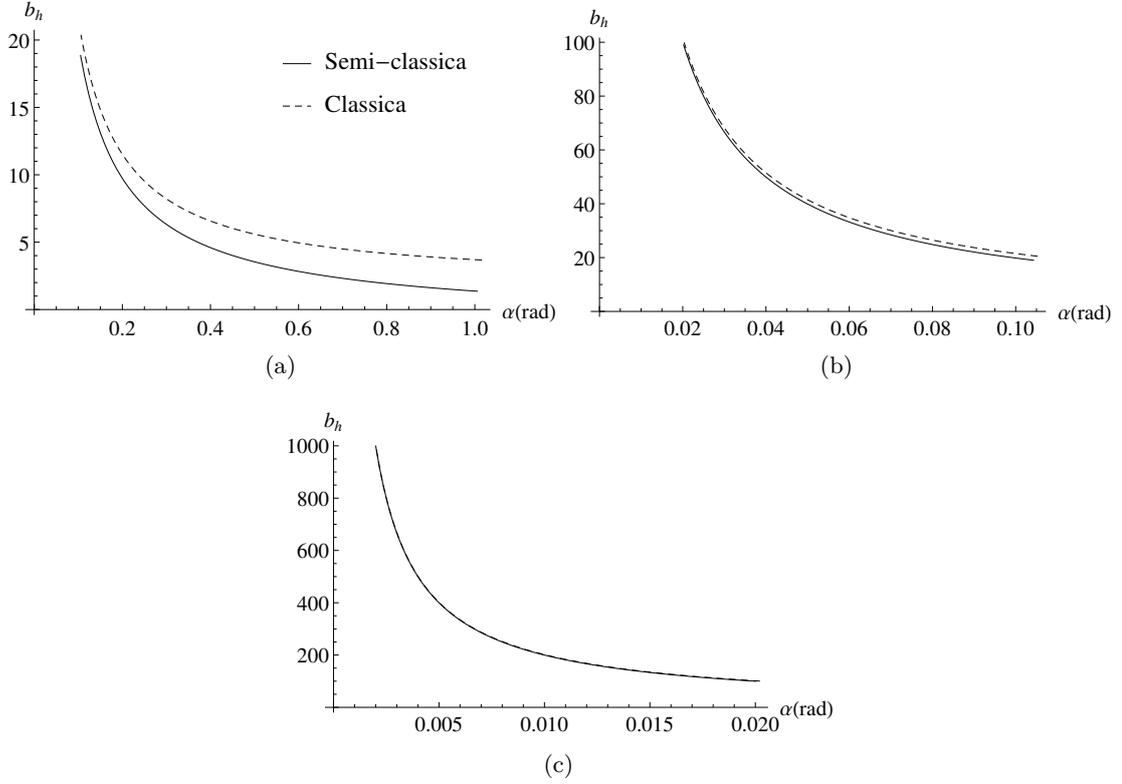


Figura 3.2: Il parametro d'impatto b_h in unità di orizzonti in funzione dell'angolo di deflessione calcolato nel caso della sezione d'urto all'ordine principale per il neutrino. Per il fotone si ottengono risultati analoghi. Il grafico (a) si riferisce alla regione vicina, con valori di b_h compresi tra 3 e 20. Il grafico (b) rappresenta la regione intermedia, con b_h che varia tra 20 e 100. Il grafico (c) si riferisce a valori di b_h tra 100 e 1000. Nei grafici la linea tratteggiata rappresenta la soluzione classica, la linea continua quella ottenuta con l'approccio semi-classico.

Nel limite di piccoli angoli di deflessione in questo caso otteniamo

$$b_{h,\gamma}(\alpha) = \frac{2}{\alpha} + \alpha \left(\frac{1}{12} - \log 2 + \log \alpha \right) + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (3.52)$$

Ripristinando momentaneamente b in luogo di b_h notiamo che entrambi gli sviluppi (3.50) e (3.52) al primo ordine risultano pari a

$$b_\nu = b_\gamma \simeq \frac{4GM}{\alpha}, \quad (3.53)$$

riproducendo l'espressione classica dell'angolo di deflessione (3.40).

3.3 Il confronto tra le due soluzioni

Per confrontare gli andamenti delle due soluzioni ottenute rispettivamente con l'approccio classico e con quello semi-classico, consideriamo alcuni intervalli per il parametro d'impatto in unità di orizzonti. Sottolineiamo che l'intera trattazione semi-classica è basata sull'ipotesi che il campo gravitazionale sia debole nelle regioni dello spazio-tempo in esame. Ci si aspetta, quindi, che si

avrà maggior accordo tra i risultati quanto più si è lontani dalla regione “critica” che, in questo contesto, corrisponde alla regione di spazio-tempo estremamente prossima all’orizzonte degli eventi e, in termini di parametro di massimo avvicinamento, per valori di b_h molto piccoli.

Consideriamo tre intervalli di valori assunti dal parametro b_h che vengono classificati rispettivamente come regioni “vicina”, “intermedia” e “lontana” rispetto al raggio di Schwarzschild. La regione “vicina” corrisponde a un intervallo per valori di b_h compresi tra 3 e 20, la regione “intermedia” per valori compresi tra 20 e 100 e quella “lontana” per valori tra 100 e 1000. Gli andamenti del parametro d’impatto b_h in unità di orizzonti in funzione degli angoli di deflessioni ϑ sono riportati nella figura 3.2. È evidente che all’aumentare del valore del parametro d’impatto le due soluzioni risultano pressoché equivalenti. L’analisi semi-classica riproduce l’andamento previsto dal caso classico non solo per grandi valori di b_h , ma anche nella regione che abbiamo chiamato “intermedia”.

Questo ci consente di considerare valido l’approccio semi-classico fin qui descritto nelle suddette regioni e di passare a studiare la sezione d’urto del processo all’ordine successivo nello sviluppo perturbativo per produrre le correzioni quantistiche da includere e studiarne la rilevanza.

Sottolineiamo che l’intera trattazione fin qui condotta può essere estesa al caso di una generica distribuzione di materia a simmetria sferica. Anche se in presenza di una sorgente di campo gravitazionale estesa, nella regione esterna alla distribuzione di materia si può considerare la massa come concentrata nel suo centro di massa e quindi approssimare la distribuzione a simmetria sferica a una puntiforme. Se non si è in presenza di un buco nero la lunghezza caratteristica del sistema non è più il raggio di Schwarzschild, ma la dimensione della sorgente estesa. Le stesse considerazioni riportate pertanto valgono per parametri d’impatto $b > R$, con R il raggio della distribuzione di materia.

Capitolo 4

Le correzioni quantistiche alla sezione d'urto

In questo capitolo presenteremo le correzioni quantistiche del Modello Standard, calcolate al primo ordine perturbativo (a un loop), all'interazione gravitazionale di fotoni e fermioni, ponendo particolare rilievo al caso del neutrino. Questi contributi costituiscono le correzioni radiative ai risultati ottenuti nel capitolo 2 e saranno necessari nello studio della lente gravitazionale radiativa e delle osservabili ad essa connesse, che affronteremo nei capitoli successivi.

Come già discusso precedentemente, il campo gravitazionale è considerato come un campo esterno e dunque non è soggetto alla quantizzazione. Per questo motivo, nello sviluppo perturbativo in termini di diagrammi di Feynman, tale campo compare solo come linea esterna e mai negli stati virtuali scambiati nei loop. Contributi di questo tipo comparirebbero invece in una teoria perturbativa della gravità quantistica che esula dagli scopi del nostro lavoro di tesi.

L'analisi delle correzioni radiative all'interazione gravitazionale dei campi del Modello Standard ha ricevuto solo un'attenzione sporadica negli ultimi decenni e, in particolare, lo studio della rinormalizzabilità della lagrangiana in uno spazio-tempo curvo, nel limite di campo debole, non è mai stato completamente affrontato. Le correzioni elettromagnetiche alla propagazione di fotoni e fermioni carichi sono state calcolate originariamente in [17], ma l'estensione all'intero Modello Standard è stata presentata solo recentemente in [26, 28, 33, 29] nel settore di gauge neutro, in particolare in connessione al problema dell'anomalia conforme, e in [34, 35, 36, 37] per fermioni massivi. Inoltre in [21] è stato presentato per la prima volta uno studio qualitativo e quantitativo delle correzioni radiative alla deflessione gravitazionale del fotone da una sorgente massiva, come una stella o un buco nero. Estenderemo quest'analisi al caso del neutrino e costruiremo un'equazione quantistica della lente gravitazionale studiandone le implicazioni sia per i neutrini che per i fotoni.

In questo capitolo forniremo i risultati espliciti delle correzioni deboli a un loop all'interazione gravitazionale del neutrino nel Modello Standard. Per completezza presenteremo anche lo sviluppo perturbativo nel caso della propagazione di un fotone e di un fermione massivo in uno spazio-tempo curvo. In quest'ultimo caso i contributi deboli ai fattori di forma sono dati nelle due regioni cinematiche in cui i momenti trasferiti che caratterizzano l'interazione sono piccoli e grandi rispetto alla scala elettrodebole. In particolare analizzeremo in dettaglio il contributo elettromagnetico. La struttura di tali correzioni, infatti, è particolarmente interessante sia dal punto di vista fenomenologico, poiché costituisce il contributo radiativo dominante nel caso di fermioni carichi, che dal punto di vista teorico, poiché è affetta da singolarità infrarosse oltre a quelle ultraviolette, rimosse dalla rinormalizzazione. L'origine delle divergenze infrarosse è nello scambio di particelle virtuali a massa nulla, fotoni e gluoni, all'interno dei loop e la loro cancellazione è

realizzata dall'inclusione delle emissioni soffici che analizziamo in dettaglio in questo capitolo.

Infine studieremo l'impatto delle correzioni radiative elettrodeboli sulle sezioni d'urto del fotone e del fermione confrontando i risultati con quelli presentati, all'ordine perturbativo più basso, nel capitolo 2. Lo studio della sezione d'urto quantistica è preliminare a quello della deflessione e della lente gravitazionale affrontati nel contesto dell'approccio semi-classico discusso in questo lavoro di tesi.

4.1 Lo sviluppo diagrammatico

Introduciamo brevemente i punti salienti della decomposizione diagrammatica. La procedura consiste nell'individuare delle classi di topologie che permettono di organizzare i diversi contributi dello sviluppo perturbativo a un loop in termini di diagrammi di Feynman. Le topologie che intervengono nei casi in esame saranno descritte nelle sezioni a seguire.

Nel calcolo dei diagrammi di Feynman coinvolti compaiono integrali in quattro dimensioni nei momenti che circolano nei loop. Poiché questi ultimi vanno integrati in tutto lo spazio dei momenti, al crescere della variabile può accadere che gli integrali non convergono perché le funzioni integrande decrescono troppo lentamente. Le divergenze che intervengono per grandi valori del momento, equivalentemente per piccole lunghezze d'onda, prendono il nome di divergenze ultraviolette. Se i campi della teoria sono tutti massivi queste sono le uniche divergenze che si presentano negli integrali. Per campi a massa nulla si osservano ulteriori divergenze per piccoli valori del momento o per grandi valori della lunghezza d'onda, chiamate infrarosse.

Per eliminare le singolarità ultraviolette si procede a regolarizzare le divergenze e quindi a rimuoverle imponendo opportune condizioni di rinormalizzazione. Esistono diverse procedure di regolarizzazione, impiegate per trattare le divergenze ultraviolette e consistono nell'introduzione di un parametro regolatore che permette di rappresentare le divergenze sotto forma di singolarità rispetto a tale parametro.

La procedura usata in questo lavoro di tesi è la regolarizzazione dimensionale, in cui si agisce sulla misura di integrazione parametrizzando la dimensione degli integrali con n , che viene trattata come una variabile complessa. Questo approccio risulta particolarmente conveniente in quanto preserva le simmetrie della teoria e in particolare l'invarianza di gauge. Si introduce il parametro $\varepsilon > 0$ e la dimensione si scrive come $n = 4 - \varepsilon$. Il risultato degli integrali si scrive come lo sviluppo di potenze di ε e le divergenze si presentano sotto forma di poli dello stesso parametro.

Nel calcolo esplicito per i diagrammi a un loop si ottengono diversi integrali tensoriali che sono stati ridotti su una base nota di integrali scalari mediante una procedura di riduzione basata sull'algoritmo di Passarino-Veltman. A causa della complessità computazionale l'algoritmo di riduzione tensoriale è stato implementato e automatizzato in un programma scritto nel linguaggio di programmazione *Mathematica*.

Si definisce il generico integrale tensoriale $T_{\mu_1 \dots \mu_R}^N$ in uno spazio dei momenti con n dimensioni. Nella notazione usata N è il numero dei fattori dei propagatori al denominatore e R il rango dell'integrale ovvero il numero dei momenti di integrazione al numeratore. La condizione per cui compaiano divergenze ultraviolette è data dalla relazione

$$R + n - 2N \geq 0. \quad (4.1)$$

Con riferimento alla figura 4.1 il generico integrale tensoriale a un loop assume la forma

$$T_{\mu_1 \dots \mu_R}^N(p_0, \dots, p_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^n l}{(2\pi i)^{n-4}} \frac{l_{\mu_1} \dots l_{\mu_R}}{D_0 D_1 \dots D_{N-1}}, \quad (4.2)$$

con i fattori al denominatore definiti come

$$D_0 = l^2 - m_0^2 \quad D_i = (l + p_i)^2 - m_i^2 \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (4.3)$$

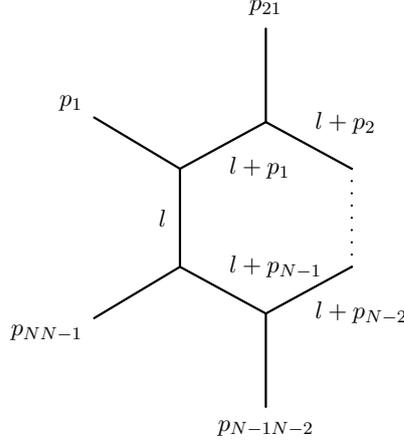


Figura 4.1: La rappresentazione delle convenzioni usate nel testo per gli integrali tensoriali a N punti a un loop. In particolare sono riportati i momenti esterni (entranti) e quelli interni.

che hanno origine dai propagatori di Feynman. Si introduce il parametro μ che ha le dimensioni di una massa per mantenere fissa la dimensione degli integrali al variare di n . Convenzionalmente gli integrali tensoriali sono chiamati $T^1 \equiv \mathcal{A}$, $T^2 \equiv \mathcal{B}$, ... e gli integrali scalari sono scritti con il pedice 0.

Sfruttando la covarianza di Lorentz, propria degli integrali tensoriali, è possibile operare una decomposizione degli stessi in strutture tensoriali costruite a partire dai momenti esterni p_i e dal tensore metrico di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. I coefficienti sono funzioni completamente simmetriche che chiamiamo $T_{i_1 \dots i_R}^N$. Si introduce il momento fittizio p_0 per scrivere i termini in $\eta_{\mu\nu}$ in maniera compatta. La decomposizione è

$$T_{\mu_1 \dots \mu_R}^N(p_1, \dots, p_{N-1}, m_0, \dots, m_{N-1}) = \sum_{i_1, \dots, i_R=0}^{N-1} T_{i_1 \dots i_R}^N p_{i_1 \mu_1} \dots p_{i_R \mu_R}. \quad (4.4)$$

Da questa espressione i termini corretti per $\eta_{\mu\nu}$ sono ottenuti selezionando quelli che contengono un numero pari di p_0 , sostituendo

$$\begin{aligned} p_{0\mu_1} p_{0\mu_2} &\rightarrow \eta_{\mu_1 \mu_2} \\ p_{0\mu_1} p_{0\mu_2} p_{0\mu_3} p_{0\mu_4} &\rightarrow \eta_{\mu_1 \mu_2} \eta_{\mu_3 \mu_4} + \eta_{\mu_1 \mu_3} \eta_{\mu_2 \mu_4} + \eta_{\mu_1 \mu_4} \eta_{\mu_3 \mu_2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

e scartando i termini in cui il momento p_0 compare un numero dispari di volte. Le riduzioni tensoriali degli integrali agli ordini più bassi sono

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu &= p_\mu \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \mathcal{B}_{00} + p_\mu p_\nu \mathcal{B}_{11} \\ \mathcal{C}_\mu &= p_{1\mu} \mathcal{C}_1 + p_{2\mu} \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} \mathcal{C}_{00} + p_{1\mu} p_{1\nu} \mathcal{C}_{11} + p_{2\mu} p_{2\nu} \mathcal{C}_{22} + (p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}) \mathcal{C}_{12} \\ \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} &= \sum_{i=1}^2 (\eta_{\mu\nu} p_{i\rho} + \eta_{\mu\rho} p_{i\nu} + \eta_{\nu\rho} p_{i\mu}) \mathcal{C}_{00i} + \sum_{i,j,k}^2 p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} \mathcal{C}_{ijk}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

I coefficienti che compaiono nei secondi membri delle espressioni precedenti possono essere espressi in una base di integrali scalari [38, 39, 40]

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0(m^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^n l \frac{1}{l^2 - m_0^2}, \\ \mathcal{B}_0(p^2, m_0^2, m_1^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^n l \frac{1}{(l^2 - m_0^2)((l+p)^2 - m_1^2)}, \\ \mathcal{C}_0(p_1^2, p_{12}^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{1}{i\pi^2} \int d^n l \frac{1}{(l^2 - m_0^2)((l+p_1)^2 - m_1^2)} \frac{1}{((l+p_2)^2 - m_2^2)},\end{aligned}\tag{4.7}$$

dove abbiamo ommesso il prefattore negli integrali e posto $p_{12} = p_1 - p_2$. Per determinare le forme dei coefficienti si considera il sistema che si ottiene contraendo le relazioni (4.6) con tutte le strutture tensoriali che compaiono sui lati destri. Per esempio per il calcolo del coefficiente \mathcal{B}_1 si considera la contrazione

$$p^\mu \mathcal{B}_\mu = p^2 \mathcal{B}_1,\tag{4.8}$$

dove il tensore \mathcal{B}_μ è scritto come

$$\mathcal{B}_\mu(p^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^n l \frac{l_\mu}{(l^2 - m_0^2)((l+p)^2 - m_1^2)}.\tag{4.9}$$

Dalle definizioni dei denominatori (4.3) si ricava l'espressione del termine che compare al numeratore nella forma esplicita della (4.8)

$$p \cdot l = \frac{1}{2} [((l+p)^2 - m_1^2) - (l^2 - m_0^2) - p^2 - m_0^2 + m_1^2].\tag{4.10}$$

Sfruttando tale relazione e riconoscendo le espressioni degli integrali scalari (4.7) si ottiene

$$p^\mu \mathcal{B}_\mu = \frac{1}{2} [\mathcal{A}_0(m_0^2) - \mathcal{A}_0(m_1^2) + (m_1^2 - m_0^2 - p^2) \mathcal{B}_0(p^2, m_0^2, m_1^2)] = p^2 \mathcal{B}_1,\tag{4.11}$$

da cui si ricava la forma di \mathcal{B}_1 . Allo stesso modo si procede per il calcolo degli altri coefficienti.

Per scrivere in forma esplicita i coefficienti occorre valutare gli integrali scalari (4.7). Da un'analisi dimensionale risulta che solo gli integrali \mathcal{A}_0 e \mathcal{B}_0 sviluppano divergenze ultraviolette che, come accennato in precedenza, vengono regolarizzate per mezzo di una continuazione analitica delle dimensioni di integrazione

$$d^4 l \rightarrow d^n l\tag{4.12}$$

con $n = 4 - \varepsilon$ e $\varepsilon > 0$. Dal calcolo esplicito si trova

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0(m^2) &= m^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 - \log \frac{m^2}{\mu^2} \right), \\ \mathcal{B}_0(p^2, m_0^2, m_1^2) &= \frac{2}{\varepsilon} + 2 - \log \frac{m_0 m_1}{\mu^2} - \frac{m_0^2 - m_1^2}{2p^2} \log \frac{m_0^2}{m_1^2} - \mathcal{R},\end{aligned}$$

dove

$$\mathcal{R} = \frac{\Lambda}{p^2} \log \frac{m_0^2 + m_1^2 - p^2 - \Lambda}{2m_0 m_1}, \quad \Lambda^2 = \lambda(p^2, m_0^2, m_1^2),\tag{4.13}$$

con $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$. Nelle precedenti è stata introdotta l'espressione

$$\frac{2}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma,\tag{4.14}$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni che compare nello sviluppo della funzione Γ di Eulero e μ è la costante arbitraria con le dimensioni di una massa che viene introdotta nella regolarizzazione dimensionale.

L'espressione dell'integrale scalare \mathcal{C}_0 è più complicata rispetto a quelle finora considerate e ci limitiamo a riportarla in forma parametrica ottenuta con il metodo di Feynman

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0(p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = & - \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(p_{21}^2 x^2 + p_1^2 y^2 + \right. \\ & + (p_2^2 - p_1^2 - p_{21}^2)xy + (m_1^2 - m_2^2 - p_{21}^2)x \\ & \left. + (m_0^2 - m_1^2 + p_{21}^2 - p_2^2)y + m_2^2 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

con $p_{21} = p_2 - p_1$.

Le divergenze che compaiono in questo stadio, prodotte dal calcolo degli integrali \mathcal{A}_0 e \mathcal{B}_0 , devono essere eliminate mediante una certa procedura di rinormalizzazione.

4.2 La rinormalizzazione dell'interazione gravitazionale

Nonostante la gravità quantistica non sia una teoria rinormalizzabile, le correzioni radiative del Modello Standard in un campo gravitazionale esterno lo sono [15, 16, 41, 17, 42, 33, 29]. Le divergenze prodotte dal calcolo degli integrali a un loop sono quindi tutte riassorbibili mediante una ridefinizione dei campi, delle masse e delle costanti di accoppiamento presenti nella densità di lagrangiana del Modello Standard.

Il termine di improvement citato nella definizione dell'azione completa nell'equazione (1.123) assume una considerevole rilevanza, in quanto responsabile della rinormalizzabilità di una classe di funzioni di Green [29]. Nel contesto dello spazio-tempo curvo i contro-termini da inserire nella trattazione possono essere prodotti a partire da quelli scritti in termini di uno spazio-tempo piatto. In particolare si promuove la densità di lagrangiana dei contro-termini \mathcal{L}_{ct} del Modello Standard in uno spazio-tempo curvo

$$\mathcal{L}_{ct} \rightarrow S_{ct} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{ct}. \quad (4.16)$$

Questa definizione permette di scrivere il contributo del tensore energia-impulso valutato per i contro-termini $T_{ct}^{\mu\nu}$, da cui estrarre la regola di Feynman corrispondente.

A partire dalla densità di lagrangiana dei contro-termini si ottiene un contributo alla matrice di interazione di un fermione in un campo gravitazionale esterno dato da

$$\hat{T}_{ct}^{\mu\nu} \equiv i \langle p_2 | T_{ct}^{\mu\nu} | p_1 \rangle = \frac{i}{4} \bar{u}(p_2) \left\{ \delta Z_L O_{C_1}^{\mu\nu} + \delta Z_R O_{C_2}^{\mu\nu} + 4 \frac{\delta m}{m} O_{C_3}^{\mu\nu} \right\} u(p_1), \quad (4.17)$$

dove δZ_L , δZ_R , δm sono rispettivamente le costanti di rinormalizzazione delle funzioni d'onda e del parametro di massa. I tensori $O_{C_{1-3}}^{\mu\nu}$ sono definiti come

$$O_{C_1}^{\mu\nu} = (\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu) P_L \quad (4.18)$$

$$O_{C_2}^{\mu\nu} = (\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu) P_R \quad (4.19)$$

$$O_{C_3}^{\mu\nu} = m \eta^{\mu\nu} \quad (4.20)$$

e verranno richiamati nuovamente nelle sezioni successive in cui si discuterà la struttura delle correzioni radiative.

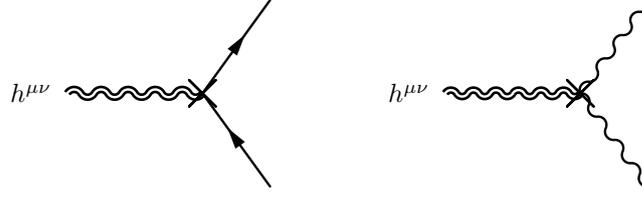


Figura 4.2: I contro-termini all'interazione di fermioni e fotoni in un campo gravitazionale esterno.

Per l'interazione di un fotone in un campo gravitazionale si ottiene il seguente contro-termini al vertice di interazione

$$\delta[TAA]^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) = \delta Z_{AA} \left\{ -p_1 \cdot p_2 C^{\mu\nu\alpha\beta} + D^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) \right\} \quad (4.21)$$

dove le strutture tensoriali $C^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $D^{\mu\nu\alpha\beta}$ sono definite in appendice B e δZ_{AA} è la costante di rinormalizzazione della funzione d'onda del fotone. Nella figura 4.2 sono rappresentati i diagrammi di Feynman dei contro-termini rispettivamente per il fermione ed il fotone.

In questo lavoro abbiamo adoperato lo schema di rinormalizzazione *on-shell* che è abitualmente utilizzato in teoria elettrodebole. In questo schema le condizioni di rinormalizzazione sono fissate in termini dei parametri fisici della teoria. Questi corrispondono alle masse delle particelle fisiche, alla carica elettrica e alla matrice di mixing di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Inoltre, le condizioni di rinormalizzazione sui campi, necessarie per definire le costanti di rinormalizzazione delle funzioni d'onda sono fissate richiedendo che il residuo della funzione a due punti completa di un dato campo sia uguale all'unità se calcolato sulla massa fisica del propagatore. In particolare otteniamo

$$\begin{aligned} \delta Z_L &= -\widetilde{\text{Re}} \Sigma^L(m^2) - m^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \widetilde{\text{Re}} \left[\Sigma^L(p^2) + \Sigma^R(p^2) + 2\Sigma^S(p^2) \right]_{p^2=m^2}, \\ \delta Z_R &= -\widetilde{\text{Re}} \Sigma^R(m^2) - m^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \widetilde{\text{Re}} \left[\Sigma^L(p^2) + \Sigma^R(p^2) + 2\Sigma^S(p^2) \right]_{p^2=m^2}, \\ \delta m &= \frac{m}{2} \widetilde{\text{Re}} \left[\Sigma^L(m^2) + \Sigma^R(m^2) + 2\Sigma^S(m^2) \right], \\ \delta Z_{AA} &= - \left. \frac{\partial \Sigma_T^{AA}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

dove $\Sigma^{L,R,S}$ sono le componenti della funzione a due punti $\Gamma^{\bar{f}f}(p)$ del fermione definite da

$$\Gamma^{\bar{f}f}(p) = i \left[\not{p} P_L \Sigma^L(p^2) + \not{p} P_R \Sigma^R(p^2) + m \Sigma^S(p^2) \right], \quad (4.23)$$

e Σ_T^{AA} è la componente trasversa della funzione a due punti del fotone $\Gamma_{\alpha\beta}^{AA}(p)$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{AA}(p) = -i \left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \right) \Sigma_T^{AA}(p^2) - i \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \Sigma_L^{AA}(p^2). \quad (4.24)$$

Il simbolo $\widetilde{\text{Re}}$ non ha alcun effetto sugli elementi della matrice di mixing CKM ma estrae solo la parte reale degli integrali scalari che compaiono nelle funzioni a due punti.

È interessante sottolineare una particolare caratteristica degli elementi di matrice che descrivono l'interazione dei campi del Modello Standard, quali i neutrini e i fotoni, in un campo gravitazionale esterno. Le espressioni rinormalizzate risultano indipendenti dalla scala di rinormalizzazione μ introdotta nelle funzioni a uno e a due punti \mathcal{A}_0 e \mathcal{B}_0 riportate nelle (4.13). Questo costituisce un risultato previsto dallo schema di rinormalizzazione on-shell. Si può mostrare, per esempio con un calcolo esplicito, che la stessa caratteristica emerge anche in uno schema di rinormalizzazione *mass-independent*, come lo schema \overline{MS} (*modified minimal subtraction*). Gli schemi on-shell e \overline{MS} differiscono per la definizione delle masse e delle costanti di accoppiamento. In particolare in \overline{MS} si opera una definizione dei parametri dipendente dalla scala μ e gli stessi generalmente non coincidono con quelli fisici della teoria. Quindi in principio in \overline{MS} si ottengono espressioni dipendenti da μ , ma nel caso qui considerato questo non accade: il risultato è lo stesso usando i due diversi schermi di rinormalizzazione. Nonostante l' \overline{MS} sia caratterizzato da espressioni per i contro-termini diverse rispetto a quelle considerate nello schema on-shell, le correzioni radiative sulle gambe esterne dei diagrammi considerati compensano la differenza con l'on-shell, dando luogo allo stesso risultato. Nello schema on-shell tali correzioni sulle gambe esterne non sono introdotte perché le condizioni di rinormalizzazione fissano i residui dei propagatori all'unità.

L'indipendenza dalla scala di rinormalizzazione μ denota una peculiarità dell'elemento di matrice completo che descrive l'interazione del fermione (o del fotone) in un campo gravitazionale esterno, dato dalla somma delle correzioni di vertice e delle eventuali correzioni di gamba. Tale elemento risulta, inoltre, intrinsecamente finito. Questa caratteristica può essere mostrata a partire dalla legge di conservazione del tensore energia-impulso e si può verificare calcolando l'elemento di matrice direttamente dalla lagrangiana non rinormalizzata (*bare*) [41].

Procediamo con l'analizzare le topologie di diagrammi a un loop che compaiono nel caso del neutrino, del fotone e di un fermione massivo e le strutture tensoriali coinvolte.

4.3 Le correzioni quantistiche per i neutrini

Le topologie di diagrammi che possono presentarsi nel caso del neutrino sono riportate nella figura 4.3. Si individuano le topologie triangolare e a bolla, la *t-bubble*. Nei diagrammi triangolari il tensore $h_{\mu\nu}$ è accoppiato a due eccitazioni virtuali, che possono essere fermioni o bosoni. Nei diagrammi t-bubble il tensore $h_{\mu\nu}$ e uno dei fermioni esterni si presentano nello stesso punto. Nei loop possono essere scambiati stati virtuali caratterizzati da bosoni vettori, fermioni o scalari. I bosoni vettori scambiati sono i bosoni di gauge massivi Z e W^\pm , tra i fermioni compaiono i leptoni e i neutrini e gli stati scalari sono le componenti non-fisiche dei bosoni di gauge massivi. I diagrammi a un loop possono comprendere uno stato iniziale e uno finale in cui i fermioni appartengono alla stessa famiglia, oppure in cui gli stessi appartengono a famiglie diverse. Nell'ultimo caso si parla di settore di *flavor-changing* che si presenta a partire dal primo ordine perturbativo e non genera contributi all'ordine principale, perché l'interazione con il gravitone non ammette lo scambio di flavor. Nella discussione limiteremo l'analisi ai diagrammi in cui i fermioni delle linee esterne appartengono alla stessa famiglia.

La tecnica di riduzione tensoriale presentata in questo capitolo permette di calcolare esplicitamente tutti i diagrammi di Feynman che compaiono nello sviluppo perturbativo a un loop e che definiscono le correzioni quantistiche all'interazione di neutrini in un campo gravitazionale esterno [22].

I diagrammi di Feynman caratterizzati dallo scambio dei bosoni di gauge Z e W^\pm virtuali sono

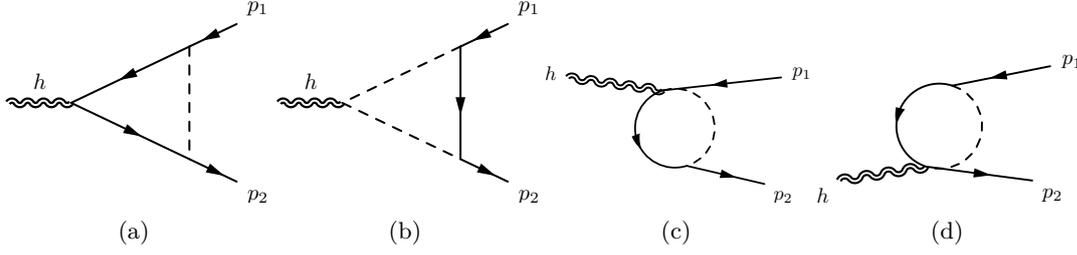


Figura 4.3: Lo sviluppo perturbativo a un loop del vertice di interazione di un neutrino in un campo gravitazionale esterno. Le linee interne tratteggiate rappresentano i bosoni di gauge massivi Z e W^\pm e i Goldstone ϕ^\pm . I diagrammi (a) e (b) sono diagrammi triangolari, (c) e (d) sono diagrammi t -bubble.

dati dalle espressioni

$$\begin{aligned} \hat{T}_{(a)Z,W}^{\mu\nu} &= \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) \left[ie C_{Z,W}^L \gamma^\alpha P_L \right] \frac{i}{\not{l} + \not{p}_2 - m_f} [T\bar{\psi}\psi]^{\mu\nu}(l + p_2, l + p_1, m_f) \\ &\quad \times \frac{i}{\not{l} + \not{p}_1 - m_f} \left[ie C_{Z,W}^L \gamma_\alpha P_L \right] u(p_1) \frac{-i}{l^2 - m_{Z,W}^2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{(b)Z,W}^{\mu\nu} &= \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) \left[ie C_{Z,W}^L \gamma_\alpha P_L \right] \frac{i}{\not{l} - m_f} \left[ie C_{Z,W}^L \gamma_\beta P_L \right] u(p_1) \\ &\quad \times \frac{-i}{(l - p_1)^2 - m_{Z,W}^2} \frac{-i}{(l - p_2)^2 - m_{Z,W}^2} [TAA]^{\mu\nu\alpha\beta}(l - p_1, l - p_2, m_{Z,W}^2), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\hat{T}_{(c)Z,W}^{\mu\nu} = \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) \left[ie C_{Z,W}^L \gamma_\alpha P_L \right] \frac{i}{\not{l} + \not{p}_2 - m_f} [T\bar{\psi}\psi A]^{\mu\nu\alpha} u(p_1) \frac{-i}{l^2 - m_{Z,W}^2}, \quad (4.27)$$

$$\hat{T}_{(d)Z,W}^{\mu\nu} = \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) [T\bar{\psi}\psi A]^{\mu\nu\alpha} \frac{i}{\not{l} + \not{p}_1 - m_f} \left[ie C_{Z,W}^L \gamma_\alpha P_L \right] u(p_1) \frac{-i}{l^2 - m_{Z,W}^2}, \quad (4.28)$$

dove i pedici (a) – (d) si riferiscono ai diagrammi rappresentati nella figura 4.3. I coefficienti $C_{Z,W}^L$ definiscono le interazioni chirali del neutrino con i bosoni di gauge deboli e sono

$$C_Z^L = \frac{T_3}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \quad (4.29)$$

$$C_W^L = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_W}, \quad (4.30)$$

con θ_W l'angolo di Weinberg, e T_3 la terza componente di isospin debole. I vertici $[T\bar{\psi}\psi]$, $[TAA]$ e $[T\bar{\psi}\psi A]$ sono definiti in appendice B. La massa m_f che compare nelle precedenti equazioni è nulla se il bosone scambiato è lo Z , oppure denota la massa del leptone m_l appartenente alla stessa famiglia del neutrino sulle linee esterne se il bosone è invece quello carico W^\pm .

Poiché i neutrini descritti nel Modello Standard hanno massa nulla si ottengono risultati non nulli alle correzioni radiative nel settore scalare solo per il caso dei bosoni di Goldstone carichi ϕ^\pm .

I diagrammi di Feynman corrispondenti sono

$$\hat{T}_{(a)\phi^\pm}^{\mu\nu} = \int \frac{dl^n}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) \left[ie C_{\phi^\pm} P_R \right] \frac{i}{\not{l} + \not{p}_2 - m_l} [T\bar{\psi}\psi]^{\mu\nu}(l + p_2, l + p_1, m_l) \times \frac{i}{\not{l} + \not{p}_2 - m_l} \left[ie C_{\phi^\pm} P_L \right] u(p_1) \frac{i}{l^2 - m_W^2} \quad (4.31)$$

$$\hat{T}_{(b)\phi^\pm}^{\mu\nu} = \int \frac{dl^n}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) \left[ie C_{\phi^\pm} P_R \right] \frac{i}{\not{l} - m_l} \left[ie C_{\phi^\pm} P_L \right] u(p_1) \times \frac{i}{(l - p_1)^2 - m_W^2} \frac{i}{(l - p_2)^2 - m_W^2} [T\phi\phi]^{\mu\nu}(l - p_1, l - p_2, m_W^2), \quad (4.32)$$

$$\hat{T}_{(c)\phi^\pm}^{\mu\nu} = \int \frac{dl^n}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) \left[ie C_{\phi^\pm} P_R \right] \frac{i}{\not{l} - m_l} [T\bar{\psi}\psi\phi]^{\mu\nu} u(p_1) \frac{i}{l^2 - m_W^2} \quad (4.33)$$

$$\hat{T}_{(d)\phi^\pm}^{\mu\nu} = \int \frac{dl^n}{(2\pi)^n} \bar{u}(p_2) [T\bar{\psi}\psi\phi]^{\mu\nu} \frac{i}{\not{l} + \not{p}_1 - m_l} \left[ie C_{\phi^\pm} P_L \right] u(p_1) \frac{i}{l^2 - m_W^2}. \quad (4.34)$$

Anche in questo caso m_l rappresenta la massa del leptone corrispondente al neutrino sulle linee esterne, i vertici $[T\phi\phi]$ e $[T\bar{\psi}\psi\phi]$ sono definiti in appendice B e si introduce il coefficiente di interazione del neutrino con i bosoni di Goldstone carichi

$$C_{\phi^\pm} = -\frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \frac{m_l}{m_W}. \quad (4.35)$$

Il risultato ottenuto dal calcolo dei diagrammi di Feynman definiti sopra può essere organizzato nella somma di tre termini

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \hat{T}_Z^{\mu\nu} + \hat{T}_W^{\mu\nu} + \hat{T}_{ct}^{\mu\nu} \quad (4.36)$$

dove i pedici indicano rispettivamente i contributi dovuti ai settori dello Z e del W e al controtermine necessario per la rinormalizzazione del vertice. Ogni termine è sviluppato su una base tensoriale determinata dalle simmetrie del sistema. Le simmetrie presenti in questo caso sono legate all'invarianza per diffeomorfismi, da cui discende la conservazione del tensore energia-impulso, e alla simmetria rispetto allo scambio degli indici μ e ν .

Nel caso dei neutrini del Modello Standard si ottiene

$$\hat{T}_Z^{\mu\nu} = i \frac{G_F}{16\pi^2 \sqrt{2}} F_\nu^Z(q^2, m_Z) \bar{u}(p_2) O_{C1}^{\mu\nu} u(p_1) \quad (4.37)$$

$$\hat{T}_W^{\mu\nu} = i \frac{G_F}{16\pi^2 \sqrt{2}} F_\nu^W(q^2, m_f, m_W) \bar{u}(p_2) O_{C1}^{\mu\nu} u(p_1), \quad (4.38)$$

dove si è introdotto l'operatore tensoriale

$$O_{C1}^{\mu\nu} = (\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu) P_L \quad (4.39)$$

con $p = p_1 + p_2$ e $P_L = (1 - \gamma^5)/2$ proiettore di chiralità sinistrorsa. Nelle precedenti equazioni G_F è la costante di Fermi, m_Z e m_W rappresentano le masse dei due bosoni di gauge massivi, mentre m_f è la massa del leptone appartenente alla stessa famiglia del neutrino.

L'espressione esplicita del fattore di forma F_ν^Z è data da

$$\begin{aligned}
F_\nu^Z(q^2, m_Z) = & -2m_Z^2 - \frac{4m_Z^4}{3q^2} + \left(2 + \frac{7m_Z^2}{3q^2}\right) \mathcal{A}_0(m_Z^2) \\
& - \left(\frac{17m_Z^2}{6} + \frac{7m_Z^4}{q^2} + \frac{4m_Z^6}{q^4}\right) \mathcal{B}_0(q^2, 0, 0) \\
& + \frac{2}{3q^4} m_Z^2 (2m_Z^2 + q^2) (3m_Z^2 + 2q^2) \mathcal{B}_0(q^2, m_Z^2, m_Z^2) \\
& - \frac{4}{q^4} m_Z^6 (m_Z^2 + q^2) \mathcal{C}_0(0, m_Z^2, m_Z^2) \\
& - \frac{1}{q^4} m_Z^2 (m_Z^2 + q^2)^2 (4m_Z^2 + q^2) \mathcal{C}_0(m_Z^2, 0, 0),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

mentre per il fattore di forma F_ν^W si ha

$$\begin{aligned}
F_\nu^W(q^2, m_f, m_W) = & \frac{m_f^2}{2} - 4m_W^2 + \frac{4}{3q^2} (m_f^4 + m_f^2 m_W^2 - 2m_W^4) \\
& - \frac{1}{3q^2} (m_f^2 + 2m_W^2) \left(\mathcal{A}_0(m_f^2) - \mathcal{A}_0(m_W^2) \right) \\
& - \frac{2}{q^2} (m_f^4 + m_f^2 m_W^2 - 2m_W^2 (m_W^2 + q^2)) \mathcal{B}_0(0, m_f^2, m_W^2) \\
& + \frac{1}{6q^4} (-24m_f^6 - 10m_f^4 q^2 + m_f^2 (72m_W^4 + 46m_W^2 q^2 + q^4) \\
& - 2m_W^2 (24m_f^4 + 42m_W^2 q^2 + 17q^4)) \mathcal{B}_0(q^2, m_f^2, m_f^2) \\
& + \frac{1}{3q^4} (12m_f^6 + 12m_f^4 q^2 + 4m_W^2 (2m_W^2 + q^2) (3m_W^2 + 2q^2) \\
& + m_f^2 (-36m_W^4 - 16m_W^2 q^2 + q^4)) \mathcal{B}_0(q^2, m_W^2, m_W^2) \\
& + 2 \left(m_f^4 + \frac{2}{q^4} (m_f^2 - m_W^2)^3 (m_f^2 + 2m_W^2) \right. \\
& \left. + \frac{1}{q^2} (3m_f^6 - 4m_f^4 m_W^2 + 5m_f^2 m_W^4 + 4m_W^6) \right) \mathcal{C}_0(m_f^2, m_W^2, m_W^2) \\
& + \frac{1}{q^2} \left(4m_f^8 + m_f^6 (q^2 - 4m_W^2) - 2m_W^2 (m_W^2 + q^2)^2 (4m_W^2 + q^2) \right. \\
& \left. - m_f^4 (2m_W^2 + q^2) (6m_W^2 + q^2) \right) \mathcal{C}_0(m_W^2, m_f^2, m_f^2) \\
& + \frac{m_f^2}{q^2} (20m_W^6 + 25m_W^4 q^2 + 6m_W^2 q^4) \mathcal{C}_0(m_W^2, m_f^2, m_f^2),
\end{aligned} \tag{4.41}$$

dove abbiamo usato una notazione compatta per l'integrale scalare a tre punti $C_0(m_0^2, m_1^2, m_2^2) \equiv C_0(0, q^2, 0, m_0^2, m_1^2, m_2^2)$.

In questo caso il contro-termine che compare nella (4.36) è caratterizzato sulle linee esterne da due neutrini e dal campo gravitazionale ed è dato da

$$\hat{T}_{\text{ct}}^{\mu\nu} = i \langle p_2 | T_{\text{ct}}^{\mu\nu} | p_1 \rangle = \frac{i}{4} \delta Z_L \bar{u}(p_2) O_{C_1}^{\mu\nu} u(p_1) \tag{4.42}$$

dove δZ_L è la costante di rinormalizzazione della funzione d'onda del neutrino. Poiché nel Modello Standard il neutrino possiede solo la componente sinistrorsa, il contro-termine risulta proporzionale ad un'unica struttura tensoriale di chiralità definita.

La costante δZ_L permette di riassorbire la divergenza ultravioletta del vertice di interazione $\hat{T}^{\mu\nu}$ a meno di un termine finito che dipende dalla schema di rinormalizzazione scelto. In particolare, per il neutrino, nello schema di rinormalizzazione on-shell da noi adottato, si ottiene

$$\delta Z_L = -\text{Re} \Sigma_L(p^2 = 0), \quad (4.43)$$

dove Σ_L è la corrispondente funzione a due punti calcolata a un loop

$$\Sigma_L(p^2) = \frac{G_F}{16\pi^2\sqrt{2}} (\Sigma_L^Z(p^2) + \Sigma_L^W(p^2)). \quad (4.44)$$

Per comodità abbiamo separato le correzioni dovute ai bosoni Z e W^\pm virtuali

$$\Sigma_L^Z(p^2) = -2m_Z^2 [2\mathcal{B}_1(p^2, 0, m_Z^2) + 1] \quad (4.45a)$$

$$\Sigma_L^W(p^2) = -4 [(m_f^2 + 2m_W^2)\mathcal{B}_1(p^2, m_f^2, m_W^2) + m_W^2] \quad (4.45b)$$

dove abbiamo definito

$$\mathcal{B}_1(p^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{m_1^2 - m_0^2}{2p^2} [\mathcal{B}_0(p^2, m_0^2, m_1^2) - \mathcal{B}_0(0, m_0^2, m_1^2)] - \frac{1}{2}\mathcal{B}_0(p^2, m_0^2, m_1^2). \quad (4.46)$$

Usando le espressioni esplicite (4.45) della funzione a due punti del neutrino si ottiene una cancellazione esatta delle divergenze ultraviolette nei fattori di forma nelle (4.40) e (4.41).

Nel caso di neutrini di bassa energia, per esempio dell'ordine del MeV, le espressioni per i due fattori di forma si semplificano notevolmente poiché il momento trasferito q^2 è piccolo rispetto alla scala elettrodebole, ossia $-q^2 \ll m_{W,Z}^2$. Questi sviluppi risultano particolarmente utili, per esempio, nel contesto della diffusione di neutrini in regioni lontane dall'orizzonte degli eventi di buchi neri, dell'ordine di $10^3 - 10^6$ raggi di Schwarzschild. In questo limite le espressioni dei fattori di forma rinormalizzati diventano

$$F_{\nu\text{ren}}^Z = -\frac{11}{18}q^2 \quad (4.47)$$

$$F_{\nu\text{ren}}^W = -\frac{q^2}{36(m_f^2 - m_W^2)^4} \left(5m_f^8 - 98m_f^6m_W^2 + 243m_f^4m_W^4 - 194m_f^2m_W^6 \right. \\ \left. + 44m_W^8 + 6(10m_f^6m_W^2 - 15m_f^4m_W^4 + 2m_f^2m_W^6) \ln(m_f^2/m_W^2) \right). \quad (4.48)$$

Come vedremo, questi sviluppi ci permettono di ottenere un'espressione analitica che include le correzioni radiative per il parametro d'impatto $b_h(\alpha)$ in funzione dell'angolo di deflessione α , valida nelle regioni cinematiche in cui il momento trasferito è piccolo.

4.4 Le correzioni quantistiche per i fermioni massivi

Se il fermione sulle linee esterne è un leptone o un quark con massa non nulla la struttura delle correzioni radiative all'interazione dello stesso in un campo gravitazionale si complica notevolmente. Se il fermione ha carica elettromagnetica o di colore allora, oltre alle correzioni deboli che abbiamo già discusso nella sezione precedente, compaiono anche nuovi contributi mediati dallo scambio di fotoni e gluoni virtuali. Inoltre la presenza di una massa non nulla modifica la struttura dei fattori deboli e introduce il contributo del bosone di Higgs. Le topologie che caratterizzano queste correzioni sono le stesse del neutrino, riportate nella figura 4.3, ma, oltre ai bosoni di gauge massivi e alle loro componenti longitudinali, anche i fotoni, i gluoni e l'Higgs appaiono sulle linee virtuali interne

e contribuiscono alle correzioni radiative. Possiamo, quindi, organizzare lo sviluppo perturbativo dell'elemento di matrice in sei settori distinti

$$\hat{T}^{\mu\nu} = \hat{T}_g^{\mu\nu} + \hat{T}_\gamma^{\mu\nu} + \hat{T}_h^{\mu\nu} + \hat{T}_Z^{\mu\nu} + \hat{T}_W^{\mu\nu} + \hat{T}_{CT}^{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

dove i pedici individuano rispettivamente il contributo del gluone, del fotone, dell'Higgs, dello Z , del W^\pm e del contro-termine. Ognuno di questi termini può essere decomposto in una opportuna base tensoriale ottenuta imponendo le identità di Ward, ossia le conseguenze dell'invarianza della teoria per diffeomorfismi [41]. La decomposizione tensoriale e il calcolo delle correzioni radiative per un fermione massivo sono state estensivamente studiate in [34, 35, 36]. Di seguito riportiamo solo alcuni risultati fondamentali che saranno utilizzati nella nostra analisi.

I contributi dei bosoni di gauge a massa nulla, i fotoni e i gluoni, e del bosone di Higgs, possono essere sviluppati su una base di quattro strutture tensoriali, $O_{V_k}^{\mu\nu}$, nella seguente forma

$$\hat{T}_g^{\mu\nu} = i \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \sum_{k=1}^4 f_k(q^2) \bar{u}(p_2) O_{V_k}^{\mu\nu} u(p_1) \quad (4.50)$$

$$\hat{T}_\gamma^{\mu\nu} = i \frac{\alpha}{4\pi} Q^2 \sum_{k=1}^4 f_k(q^2) \bar{u}(p_2) O_{V_k}^{\mu\nu} u(p_1) \quad (4.51)$$

$$\hat{T}_h^{\mu\nu} = i \frac{G_F}{16\pi^2 \sqrt{2}} m^2 \sum_{k=1}^4 f_k^h(q^2) \bar{u}(p_2) O_{V_k}^{\mu\nu} u(p_1), \quad (4.52)$$

dove la base tensoriale è definita da

$$O_{V_1}^{\mu\nu} = \gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu \quad (4.53a)$$

$$O_{V_2}^{\mu\nu} = m \eta^{\mu\nu} \quad (4.53b)$$

$$O_{V_3}^{\mu\nu} = m p^\mu p^\nu \quad (4.53c)$$

$$O_{V_4}^{\mu\nu} = m q^\mu q^\nu, \quad (4.53d)$$

con $p = p_1 + p_2$ e $q = p_1 - p_2$. Possiamo facilmente osservare dalle precedenti equazioni che le correzioni virtuali elettromagnetiche e forti sono caratterizzate dagli stessi fattori di forma. L'unica differenza è ovviamente nella costante d'accoppiamento e nella carica dei fermioni, elettromagnetica in un caso, Q^2 , e di colore nell'altro, C_F . Il coefficiente C_F è il Casimir quadratico nella rappresentazione fondamentale di $SU(3)$ e vale $4/3$ per i quark e 0 per i leptoni. Notiamo, inoltre, che le strutture tensoriali $O_{V_{2-4}}^{\mu\nu}$ sono proporzionali alla massa del fermione, quindi sottodominanti rispetto a $O_{V_1}^{\mu\nu}$ nel limite di piccola massa.

Nel settore debole la base tensoriale su cui si sviluppano le correzioni radiative è più complicata a causa della natura chirale delle interazioni dei bosoni Z e W^\pm . La base che si utilizza in questo caso è composta da sei strutture tensoriali definite come

$$O_{C_1}^{\mu\nu} = (\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu) P_L \quad (4.54a)$$

$$O_{C_2}^{\mu\nu} = (\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu) P_R \quad (4.54b)$$

$$O_{C_3}^{\mu\nu} = m \eta^{\mu\nu} \quad (4.54c)$$

$$O_{C_4}^{\mu\nu} = m p^\mu p^\nu \quad (4.54d)$$

$$O_{C_5}^{\mu\nu} = m q^\mu q^\nu \quad (4.54e)$$

$$O_{C_6}^{\mu\nu} = m (p^\mu q^\nu + q^{\mu\nu} p^\nu) \gamma^5 \quad (4.54f)$$

mentre lo sviluppo degli elementi di matrice è dato da

$$\hat{T}_{Z,W}^{\mu\nu} = i \frac{G_F}{16\pi^2 \sqrt{2}} \sum_{k=1}^6 f_k^{Z,W}(q^2) \bar{u}(p_2) O_{C_k}^{\mu\nu} u(p_1). \quad (4.55)$$

Per i fattori di forma f_k^W è conveniente utilizzare la notazione

$$f_k^W(q^2) = \sum_f V_{if}^* V_{fi} F_k^W(q^2, x_f) \quad (4.56)$$

dove V_{if} è la matrice di mixing, la CKM per il settore dei quark o la PMNS per i leptoni, con i ed f che individuano rispettivamente la famiglia del fermione sulle linee esterne e quella dei fermioni virtuali nei loop. Il parametro x_f è definito come $x_f = m_f^2/m_W^2$, dove m_f e m_W rappresentano le masse del fermione virtuale e del bosone W^\pm .

Nel seguito lavoreremo nel limite in cui la matrice di mixing coincide con la matrice identità che, per i nostri scopi, costituisce un'approssimazione più che ragionevole. Prima di presentare i fattori di forma è utile fornire qualche commento sulla dipendenza dalla massa del fermione delle diverse strutture tensoriali nelle (4.54). Nelle strutture $O_{C_{3-6}}^{\mu\nu}$ abbiamo estratto una dipendenza lineare dalla massa m del fermione esterno. Ne discende che per l'elemento di matrice $\hat{T}_Z^{\mu\nu}$ i fattori di forma dominanti nel limite di piccola massa sono i primi due. La situazione è diversa per $\hat{T}_W^{\mu\nu}$ in cui solo il primo dei fattori di forma è dominante per $m \rightarrow 0$ poiché f_2^W è soppresso da m^2 . Nonostante questa differenza si è usata una notazione uniforme per entrambi i settori deboli.

Di seguito presentiamo le espressioni esplicite dei fattori di forma in alcune regioni cinematiche. In particolare ci soffermeremo sul contributo elettromagnetico che per i leptoni carichi, come ad esempio gli elettroni, è sicuramente quello dominante. In questo contesto affronteremo il problema delle divergenze infrarosse per poi dimostrare, nelle sezioni successive, la loro cancellazione per mezzo dei contributi di emissione reale. Per il settore debole presenteremo i fattori di forma nei limiti di piccolo e grande momento trasferito. Le espressioni complete sono date in [35].

4.4.1 Il contributo dei bosoni di gauge a massa nulla

In questa sezione forniamo il contributo a un loop dei bosoni di gauge a massa nulla, fotoni o gluoni, ai fattori di forma dei fermioni. Essi dipendono dall'invariante q^2 e dal rapporto adimensionale $y = m^2/q^2$. Inoltre sono espressi in termini degli integrali scalari a uno, due e tre punti che sono stati introdotti nella (4.7) e sono dati esplicitamente da

$$\begin{aligned} f_1(q^2) = & -\frac{4y(2y+1)}{3(1-4y)^2} + \frac{(8y(7y-4)+3)}{3q^2(1-4y)^2y} \mathcal{A}_0(m^2) - \frac{2(y-1)}{3(1-4y)^2} \mathcal{B}_0(q^2, 0, 0) \\ & + \frac{(17-44y)}{48y-12} \mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) + \frac{1}{2} q^2(2y-1) \mathcal{C}_0(0, m^2, m^2) + \frac{2q^2(1-2y)y}{(1-4y)^2} \mathcal{C}_0(m^2, 0, 0), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} f_2(q^2) = & \frac{4y(32y-23)+3}{3(1-4y)^2} + \frac{2(32y^2-26y+3)}{3q^2(1-4y)^2y} \mathcal{A}_0(m^2) \\ & + \frac{2(10y-1)}{3(1-4y)^2} \mathcal{B}_0(q^2, 0, 0) + \frac{5}{3} \mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) + \frac{8q^2y^2}{(1-4y)^2} \mathcal{C}_0(m^2, 0, 0), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} f_3(q^2) = & \frac{4y(8y+19)-6}{3q^2(4y-1)^3} - \frac{4(8y-17)}{3q^4(4y-1)^3} \mathcal{A}_0(m^2) - \frac{2(26y+1)}{3q^2(4y-1)^3} \mathcal{B}_0(q^2, 0, 0) \\ & + \frac{2}{3q^2(4y-1)} \mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) - \frac{8y(y+1)}{(4y-1)^3} \mathcal{C}_0(m^2, 0, 0), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} f_4(q^2) = & \frac{-80y^2+68y-9}{3q^2(1-4y)^2} + \frac{(20y(4y-1)+3)}{3q^4(1-4y)^2y} \mathcal{A}_0(m^2) + \frac{(2-20y)}{3q^2(1-4y)^2} \mathcal{B}_0(q^2, 0, 0) \\ & - \frac{5}{3q^2} \mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) - \frac{8y^2}{(1-4y)^2} \mathcal{C}_0(m^2, 0, 0), \end{aligned} \quad (4.60)$$

dove abbiamo definito $C_0(m_0^2, m_1^2, m_2^2) \equiv C_0(m^2, q^2, m^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2)$.

Occorre sottolineare che non tutti i fattori di forma sono indipendenti poiché sono legati tra di loro dall'identità di Ward, cioè dai vincoli che discendono dall'invarianza per diffeomorfismi della teoria. Infatti è possibile mostrare che vale la seguente

$$f_2(q^2) + q^2 f_4(q^2) = -\frac{1}{2} \left[\Sigma_{g/\gamma}^L(m^2) + \Sigma_{g/\gamma}^R(m^2) + 2\Sigma_{g/\gamma}^S(m^2) \right], \quad (4.61)$$

dove le Σ rappresentano i contributi dei bosoni di gauge a massa nulla alle funzioni a due punti dei fermioni e sono date da

$$\begin{aligned} \Sigma_g^L(p^2) &= \Sigma_g^R(p^2) = \Sigma_\gamma^L(p^2) = \Sigma_\gamma^R(p^2) = -2\mathcal{B}_1(p^2, m^2, 0) - 1, \\ \Sigma_g^S(p^2) &= \Sigma_\gamma^S(p^2) = -4\mathcal{B}_0(p^2, m^2, 0) + 2, \end{aligned} \quad (4.62)$$

con \mathcal{B}_1 definito nella (4.46).

I fattori di forma f_k sono affetti dalle divergenze ultraviolette e necessitano della procedura di rinormalizzazione discussa nella sezione precedente. I contro-termini corrispondenti sono calcolati utilizzando le equazioni (4.17) e (4.22) e le espressioni esplicite delle funzioni a due punti nella (4.62).

Oltre a presentare divergenze ultraviolette, le correzioni radiative generate dallo scambio di bosoni di gauge a massa nulla all'interno dei loop sono caratterizzate anche da divergenze di tipo infrarosso. In particolare questa divergenza è sviluppata dal diagramma a topologia triangolare raffigurato nella figura 4.3(a), in cui un fotone, o un gluone, è scambiato tra due linee fermioniche. La singolarità infrarossa è contenuta nell'integrale scalare a tre punti $C_0(0, m^2, m^2)$ e si manifesta solo nel fattore di forma $f_1(q^2)$. Se regolarizziamo tale divergenza introducendo una piccola massa fittizia λ al bosone di gauge a massa nulla allora l'integrale scalare C_0 può essere scritto nella forma

$$C_0(0, m^2, m^2) = \frac{x_s}{m^2(1-x_s^2)} \left\{ -2 \log \frac{\lambda}{m} \log x_s + \dots \right\}, \quad (4.63)$$

dove abbiamo ommesso i termini finiti, non proporzionali al $\log(\lambda/m)$, e abbiamo definito

$$x_s = -\frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \text{con } \beta = \sqrt{1-4m^2/q^2}. \quad (4.64)$$

Poiché l'unico fattore di forma affetto da questa singolarità è quello associato al tensore $O_{V_1}^{\mu\nu}$, si ha che la parte divergente dell'elemento di matrice a un loop è proporzionale al vertice all'ordine principale $\hat{T}_0^{\mu\nu}$ e si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{T}_\gamma^{\mu\nu} &= i \frac{\alpha}{4\pi} Q^2 \left[-\frac{1}{y} (2y-1) \frac{x_s}{1-x_s^2} \log \frac{\lambda}{m} \log x_s \right] \bar{u}(p_2) O_{V_1}^{\mu\nu} u(p_1) + \dots \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} Q^2 \left[-\frac{1}{y} (2y-1) \frac{x_s}{1-x_s^2} \log \frac{\lambda}{m} \log x_s \right] \hat{T}_0^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (4.65)$$

L'equazione precedente è relativa alla correzione elettromagnetica. Nel caso del contributo di un gluone è sufficiente sostituire αQ^2 con $\alpha_s C_F$.

La singolarità infrarossa (IR) che compare nel fattore di forma $f_1(q^2)$ non è l'unica. L'elemento di matrice completo è affetto da un'altra divergenza dello stesso tipo che viene introdotta durante la procedura di rinormalizzazione e interviene nel contro-termini. L'origine di tale singolarità è legata alle costanti di rinormalizzazione della funzione d'onda di campi carichi e, in particolare,

alle correzioni radiative di fotoni e gluoni nelle funzioni a due punti dei fermioni. Per esempio, nel caso elettromagnetico, si ha

$$\delta Z_L \Big|_{\gamma}^{\text{IR}} = \delta Z_R \Big|_{\gamma}^{\text{IR}} = -\frac{\alpha}{4\pi} Q^2 \left\{ 4 \log \frac{\lambda}{m} + \dots \right\}. \quad (4.66)$$

La presenza di una divergenza infrarossa nell'elemento di matrice rinormalizzato $\hat{T}^{\mu\nu}$ non costituisce un problema poiché un qualunque processo ad esso associato, quale per esempio la sezione d'urto di diffusione, non è una quantità direttamente osservabile. Infatti, esso non è fisicamente distinguibile dallo stesso processo caratterizzato dall'emissione di bosoni di gauge a massa nulla soffici, ossia nel limite in cui la loro energia tende a zero. Come dimostrato nelle teorie di gauge [43, 44, 45], la somma di tutte le sezioni d'urto di un determinato processo fisico che coinvolgono l'emissione di un numero arbitrario di fotoni o gluoni soffici fornisce un'osservabile priva di singolarità infrarosse. In particolare la cancellazione delle divergenze infrarosse avviene tra le correzioni virtuali e quelle reali di bremsstrahlung ed è possibile mostrare, almeno a un loop, che tale cancellazione si verifica anche in presenza di un campo gravitazionale esterno.

Infine forniamo gli sviluppi dei fattori di forma elettromagnetici rinormalizzati a piccoli e grandi momenti trasferiti. Nel limite $-q^2 \ll m^2$ si ha

$$f_{1 \text{ ren}} = -\frac{\pi^2 \sqrt{-q^2}}{8m} - \frac{q^2}{72m^2} \left(47 - 12 \log \frac{-q^2}{\lambda^2} \right) \quad (4.67a)$$

$$f_{2 \text{ ren}} = \frac{\pi^2 \sqrt{-q^2}}{4m} + \frac{q^2}{18m^2} \left(11 - 12 \log \frac{-q^2}{m^2} \right) \quad (4.67b)$$

$$f_{3 \text{ ren}} = -\frac{\pi^2 \sqrt{-q^2}}{16m^3} + \frac{q^2}{9m^4} \left(1 + 3 \log \frac{-q^2}{m^2} \right) \quad (4.67c)$$

$$f_{4 \text{ ren}} = \frac{\pi^2}{4m\sqrt{-q^2}} - \frac{1}{18m^2} \left(11 - 12 \log \frac{-q^2}{m^2} \right), \quad (4.67d)$$

mentre per $-q^2 \gg m^2$ si ottiene

$$f_{1 \text{ ren}} = \frac{1}{12} \left[\pi^2 - 18 + 3 \log \frac{-q^2}{m^2} \left(1 + \log \frac{-q^2}{m^2} - 2 \log \frac{-q^2}{\lambda^2} \right) + 6 \log \frac{-q^2}{\lambda^2} \right] \quad (4.68a)$$

$$f_{2 \text{ ren}} = 4 - \log \frac{-q^2}{m^2} \quad (4.68b)$$

$$f_{3 \text{ ren}} = \frac{2}{q^2} \quad (4.68c)$$

$$f_{4 \text{ ren}} = -\frac{1}{q^2} \left(4 - \log \frac{-q^2}{m^2} \right). \quad (4.68d)$$

4.4.2 Il contributo del settore debole per piccoli momenti trasferiti

Le espressioni esplicite del contributo radiativo dei bosoni di gauge massivi e dell'Higgs ai fattori di forma sono state calcolate in [35]. Nel seguito consideriamo gli sviluppi a piccolo momento trasferito, $-q^2 \ll m_{W,Z}^2$, delle funzioni rinormalizzate.

Nel caso delle correzioni virtuali mediate dai bosoni W^\pm lo sviluppo a $-q^2 \ll m_W^2$ fornisce le seguenti espressioni per i fattori di forma

$$F_{1\text{ren}}^W(q^2) = \frac{q^2}{12(1-x_W)x_W^3} \left[-x_W^4 + x_W^3 - 18x_W^2 + 16x_W + (16x_W^3 - 6x_W^2 - 26x_W + 16) \log(1-x_W) \right] \quad (4.69a)$$

$$F_{2\text{ren}}^W(q^2) = \frac{q^2}{6(1-x_W)x_W^3} \left[x_W^4 + 7x_W^3 - 15x_W^2 + 6x_W + (-2x_W^3 + 14x_W^2 - 18x_W + 6) \log(1-x_W) \right] \quad (4.69b)$$

$$F_{3\text{ren}}^W(q^2) = -\frac{q^2}{6x_W^3} \left[(24\chi - 3)x_W^3 + 12x_W^2 - 12x_W + ((4 - 24\chi)x_W^3 + 8(3\chi - 2)x_W^2 + 18x_W - 12) \log(1-x_W) \right] \quad (4.69c)$$

$$F_{4\text{ren}}^W(q^2) = \frac{q^2}{6m_W^2(1-x_W)x_W^4} \left[-7x_W^3 + 20x_W^2 - 12x_W + (2x_W^3 - 16x_W^2 + 26x_W - 12) \log(1-x_W) \right] \quad (4.69d)$$

$$F_{5\text{ren}}^W(q^2) = -\frac{1}{q^2} F_{3\text{ren}}^W(q^2) \quad (4.69e)$$

$$F_{6\text{ren}}^W(q^2) = \frac{1}{q^2} (F_{2\text{ren}}^W(q^2) - F_{1\text{ren}}^W(q^2)), \quad (4.69f)$$

dove $x_W = m^2/m_W^2$ e χ è il parametro di improvement introdotto nella (1.123).

Le funzioni $F_{5\text{ren}}^W$ e $F_{6\text{ren}}^W$ sono determinate in termini degli altri fattori di forma dalle identità di Ward di conservazione del tensore energia-impulso. Inoltre, nel limite in cui la massa del fermione $m \ll m_W$, ossia $x_W \ll 1$, e scegliendo l'accoppiamento conforme per l'Higgs, $\chi = 1/6$, le precedenti equazioni diventano

$$F_{1\text{ren}}^W(q^2) = \frac{q^2}{9} (11 + 4x_W) + O(x_W^2) \quad (4.70a)$$

$$F_{2\text{ren}}^W(q^2) = \frac{q^2}{12} x_W + O(x_W^2) \quad (4.70b)$$

$$F_{3\text{ren}}^W(q^2) = -\frac{q^2}{6} (8 + 3x_W) + O(x_W^2) \quad (4.70c)$$

$$F_{4\text{ren}}^W(q^2) = \frac{q^2}{180m_W^2} (10 + 17x_W) + O(x_W^2) \quad (4.70d)$$

$$F_{5\text{ren}}^W(q^2) = \frac{1}{6} (8 + 3x_W) + O(x_W^2) \quad (4.70e)$$

$$F_{6\text{ren}}^W(q^2) = -\frac{11}{9} - \frac{13}{36} x_W + O(x_W^2). \quad (4.70f)$$

Nello stesso limite, $-q^2 \ll m_Z^2$, e al primo ordine in $x_Z = m^2/m_Z^2$ si ha

$$\begin{aligned}
f_{1\text{ren}}^Z(q^2) &= q^2 \left[(1 + 8av + 4v^2) \left(\frac{11}{72} + \frac{x_Z}{24} \log(x_Z) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_Z}{288} (17 - 40av - 60v^2) \right] + O(x_Z^2), \\
f_{2\text{ren}}^Z(q^2) &= q^2 \left[(1 - 8av + 4v^2) \left(\frac{11}{72} + \frac{x_Z}{24} \log(x_Z) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_Z}{288} (17 + 40av - 60v^2) \right] + O(x_Z^2), \\
f_{3\text{ren}}^Z(q^2) &= q^2 \left[\frac{1}{6} ((2 - 8v^2) \log(x_Z) + 1 - 20v^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_Z}{24} (4(7 - 44v^2) \log(x_Z) + 27 - 260v^2) \right] + O(x_Z^2), \\
f_{4\text{ren}}^Z(q^2) &= \frac{q^2}{m_Z^2} \left[\frac{3 - 4v^2}{72} + \frac{x_Z}{360} (120(1 - 2v^2) \log(x_Z) + 301 - 716v^2) \right] + O(x_Z^2), \\
f_{5\text{ren}}^Z(q^2) &= -\frac{1}{q^2} f_{3\text{ren}}^Z(q^2), \\
f_{6\text{ren}}^Z(q^2) &= \frac{1}{q^2} (f_{2\text{ren}}^Z(q^2) - f_{1\text{ren}}^Z(q^2)),
\end{aligned} \tag{4.71}$$

dove i parametri a e v rappresentano gli accoppiamenti assiale e vettoriale del bosone Z ai fermioni,

$$v = T_3 - 2 \sin^2 \theta_W Q, \quad a = T_3, \tag{4.72}$$

con T_3 e Q , rispettivamente, la terza componente di isospin debole e la carica elettrica del fermione sulle linee esterne, mentre θ_W è l'angolo di Weinberg.

Infine il contributo dell'Higgs fornisce

$$\begin{aligned}
m^2 f_{1\text{ren}}^h(q^2) &= \frac{q^2}{18} x_h + O(x_h^2), \\
m^2 f_{2\text{ren}}^h(q^2) &= \frac{q^2}{6} x_h (2 \log(x_h) + 5) + O(x_h^2), \\
m^2 f_{3\text{ren}}^h(q^2) &= \frac{q^2}{6m_h^2} x_h (\log(x_h) + 3) + O(x_h^2), \\
f_{4\text{ren}}^h(q^2) &= -\frac{1}{q^2} f_{2\text{ren}}^h(q^2),
\end{aligned} \tag{4.73}$$

con $x_h = m^2/m_h^2$. Dalle espressioni precedenti si evince che l'elemento di matrice $\hat{T}_h^{\mu\nu}$ si annulla nel limite $m \rightarrow 0$, come ci aspettiamo, poiché queste correzioni virtuali sono mediate dallo scambio del bosone di Higgs che si accoppia alle particelle in modo proporzionale alla loro massa.

4.4.3 Il contributo del settore debole per grandi momenti trasferiti

In questa sezione presentiamo invece gli stessi fattori di forma sviluppati per $-q^2 \gg m_{Z,W}^2$. Per momenti trasferiti molto grandi la massa del fermione può essere trascurata, ne consegue che il contributo dell'Higgs è completamente irrilevante in questa regione cinematica. All'ordine zero in

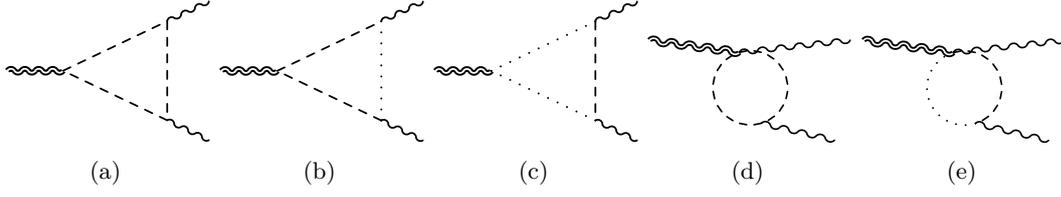


Figura 4.4: Lo sviluppo perturbativo a un loop del vertice di interazione di un fotone in un campo gravitazionale esterno. Le linee interne rappresentano i bosoni di gauge massivi Z e W^\pm , i Goldstone ϕ^\pm , i ghost e i fermioni. I diagrammi (a), (b) e (c) sono diagrammi triangolari, (d) e (e) sono diagrammi t -bubble.

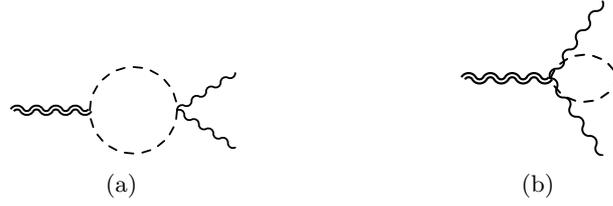


Figura 4.5: Lo sviluppo perturbativo a un loop del vertice di interazione di un fotone in un campo gravitazionale esterno. Le linee interne rappresentano i bosoni di gauge massivi Z e W^\pm e i Goldstone ϕ^\pm . Il diagramma (a) ha una topologia s -bubble, mentre il (b) è un $tadpole$.

$-m_{Z,W}^2/q^2$ si ottiene

$$F_{1\text{ren}}^W(q^2) = -\frac{m_W^2}{6} \left[33 + 4\pi^2 + 6 \log\left(-\frac{m_W^2}{q^2}\right) \left(3 + \log\left(-\frac{m_W^2}{q^2}\right) \right) \right] \quad (4.74a)$$

$$F_{3\text{ren}}^W(q^2) = -3m_W^2 \left[3 + 2 \log\left(-\frac{m_W^2}{q^2}\right) \right] \quad (4.74b)$$

$$f_{1\text{ren}}^Z(q^2) = \frac{1}{2} m_Z^2 \left[-5a^2 - (a+v)^2 \log\left(-\frac{m_Z^2}{q^2}\right) \left(2 \log\left(-\frac{m_Z^2}{q^2}\right) + 3 \right) - 12av - 5v^2 \right] \quad (4.74c)$$

$$f_{2\text{ren}}^Z(q^2) = \frac{1}{2} m_Z^2 \left[-5a^2 - (a-v)^2 \log\left(-\frac{m_Z^2}{q^2}\right) \left(2 \log\left(-\frac{m_Z^2}{q^2}\right) + 3 \right) + 12av - 5v^2 \right] \quad (4.74d)$$

$$f_{3\text{ren}}^Z(q^2) = 2m_Z^2 \left[(v^2 - 7a^2) \log\left(-\frac{m_Z^2}{q^2}\right) + 4(v^2 - 3a^2) \right]. \quad (4.74e)$$

Tutti gli altri fattori di forma non riportati nelle equazioni precedenti sono sottodominanti nel limite $-q^2 \gg m_{W,Z}^2$.

4.5 Le correzioni quantistiche per i fotoni

Nel caso del fotone, oltre alle topologie di diagrammi che compaiono già per il fermione, ma che coinvolgono particelle diverse nei loop, vedi figura 4.4, si individuano due ulteriori topologie che

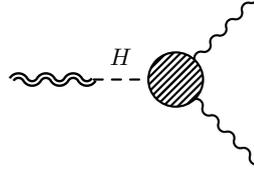


Figura 4.6: L'ampiezza con il vertice di mixing bilineare tra il campo gravitazionale esterno e tra l'Higgs H , generato dal termine di improvement. Il cerchio grigio rappresenta l'interazione a un loop nel Modello Standard tra l'Higgs e due fotoni.

prendono il nome di *s-bubble* e *tadpole* e sono rappresentate in figura 4.5. Nella topologia s-bubble il tensore $h_{\mu\nu}$ si accoppia con due bosoni massivi o con i bosoni di Goldstone e i fotoni esterni si presentano nello stesso punto. Nella topologia tadpole i fotoni esterni, il tensore $h_{\mu\nu}$ e le due linee di inserzione del bosone che viene scambiato nel loop si presentano nello stesso punto. I bosoni scambiati sono i bosoni di gauge massivi e i bosoni di Goldstone.

Le correzioni virtuali a un loop alla propagazione di un fotone in un campo gravitazionale esterno sono date da

$$\begin{aligned}\Gamma_{(1)}^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) &= -i \frac{\kappa}{2} (\Sigma^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) + \Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) + \delta[TAA]^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2)) \\ &\equiv -i \frac{\kappa}{2} \sum_{i=1}^3 \phi_i^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) \bar{\Phi}_i,\end{aligned}\quad (4.75)$$

dove i fattori di forma $\bar{\Phi}_i$ sono decomposti nei contributi elettromagnetico (QED) e debole (W), $\bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_{iQED} + \bar{\Phi}_{iW}$. Le espressioni esplicite dei $\bar{\Phi}_i$ sono state ottenute in [29, 21] e riportare nell'appendice C di questo lavoro. Le correzioni radiative possono essere organizzate nella somma di due contributi, $\Sigma^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}$ e del contro-termine di rinormalizzazione $\delta[TAA]^{\mu\nu\alpha\beta}$. Il tensore $\Sigma^{\mu\nu\alpha\beta}$ denota le correzioni *one-particle irreducible* ottenute, nello sviluppo perturbativo, da tutti quei diagrammi di Feynman che non possono essere scomposti in due sotto-diagrammi tagliando un'unica linea interna. Il contributo $\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}$, invece, è caratterizzato da un vertice di mixing bilineare tra l'Higgs e il tensore $h^{\mu\nu}$, vedi figura 4.6. Come dimostrato in [29], la presenza di quest'ultimo è necessaria per poter soddisfare le identità di Ward. Infine, $\delta[TAA]^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2)$ denota il contro-termine necessario per rimuovere le divergenze ultraviolette

$$\delta[TAA]^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) = \delta Z_{AA} \left\{ -p_1 \cdot p_2 C^{\mu\nu\alpha\beta} + D^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) \right\} = \delta Z_{AA} \phi_3^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) \quad (4.76)$$

dove i tensori $C^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $D^{\mu\nu\alpha\beta}$ sono definiti in appendice B e δZ_{AA} è la costante di rinormalizzazione della funzione d'onda del fotone. Quest'ultima è definita nello schema di rinormalizzazione on-shell dalla relazione

$$\delta Z_{AA} = - \left. \frac{\partial \Sigma_T^{AA}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}, \quad (4.77)$$

dove Σ_T^{AA} rappresenta la componente trasversa della funzione a due punti del fotone. Dal calcolo perturbativo a un loop si ottiene

$$\delta Z_{AA} = \delta Z_{AA}^{QED} + \delta Z_{AA}^W, \quad (4.78)$$

con

$$\delta Z_{AA}^{QED} = \sum_f \frac{\alpha Q_f^2}{3\pi} \left[-\frac{2}{\bar{\epsilon}} + \log \left(\frac{m_f^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (4.79)$$

$$\delta Z_{AA}^W = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{3}{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \log \left(\frac{m_W^2}{\mu^2} \right) \right], \quad (4.80)$$

dove la somma su f si estende su tutti i fermioni carichi della teoria.

Le strutture tensoriali su cui si sviluppano le correzioni radiative sono tensori a quattro indici ottenuti sfruttando le proprietà di simmetria della teoria, ossia le invarianze per diffeomorfismi e di gauge del gruppo $U(1)_{\text{em}}$. Si ottiene

$$\phi_1^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) = (q^2 \eta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) u^{\alpha\beta}(p_1, p_2) \quad (4.81a)$$

$$\phi_2^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) = -2 u^{\alpha\beta}(p_1, p_2) [q^2 \eta^{\mu\nu} + 2(p_1^\mu p_1^\nu + p_2^\mu p_2^\nu) + 4(p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu)] \quad (4.81b)$$

$$\begin{aligned} \phi_3^{\mu\nu\alpha\beta}(p_1, p_2) = & -(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu) \eta^{\alpha\beta} + \frac{q^2}{2} (\eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} + \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu}) - \eta^{\mu\nu} u^{\alpha\beta}(p_1, p_2) \\ & + (\eta^{\beta\nu} p_1^\mu + \eta^{\beta\mu} p_1^\nu) p_2^\alpha + (\eta^{\alpha\nu} p_2^\mu + \eta^{\alpha\mu} p_2^\nu) p_1^\beta, \end{aligned} \quad (4.81c)$$

dove $q = p_1 - p_2$ e il tensore $u^{\alpha\beta}(p_1, p_2)$ è definito come

$$u^{\alpha\beta}(p_1, p_2) = p_2^\alpha p_1^\beta - (p_1 \cdot p_2) \eta^{\alpha\beta}. \quad (4.82)$$

4.6 La sezione d'urto a un loop

Le correzioni quantistiche alla sezione d'urto di diffusione di fermioni e fotoni in un campo gravitazionale esterno sono ottenute utilizzando i risultati presentati nelle sezioni precedenti. Rispetto al calcolo all'ordine principale del capitolo 2, la caratteristica più importante introdotta dalle correzioni radiative è la dipendenza dall'energia. Tale dipendenza è completamente assente nelle sezioni d'urto all'ordine principale (tree-level) del neutrino e del fotone e compare debolmente solo nel caso di un fermione massivo nel rapporto m/E . Come abbiamo già osservato precedentemente, quando tale rapporto è piccolo, la dipendenza dall'energia risulta trascurabile. Nel caso dell'elettrone questa circostanza si verifica già per energie dell'ordine del GeV. Nelle sezioni successive forniremo le espressioni esplicite delle sezioni d'urto per il neutrino e il fotone, e per un generico fermione massivo del Modello Standard. In quest'ultimo caso soffermeremo la nostra attenzione sull'impatto delle correzioni elettromagnetiche investigando la cancellazione delle divergenze infrarosse di cui sono affette. Infine presenteremo un'analisi numerica delle suddette osservabili in diverse regioni cinematiche del processo di diffusione, confrontando i risultati a un loop con quelli all'ordine principale discussi nel capitolo 2.

4.6.1 La diffusione del neutrino e del fotone

Seguendo la procedura delineata nel capitolo 2 e utilizzando i risultati espliciti dei fattori di forma forniti in questo capitolo, possiamo calcolare la sezione d'urto di diffusione del neutrino

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_\nu} = (GM)^2 \frac{\cos^2(\vartheta/2)}{\sin^4(\vartheta/2)} \left\{ 1 + \frac{4G_F}{16\pi^2\sqrt{2}} \text{Re} \left[F_\nu^W(E, \vartheta) + F_\nu^Z(E, \vartheta) - \frac{1}{4} \Sigma_L^W - \frac{1}{4} \Sigma_L^Z \right] \right\} \quad (4.83)$$

dove F_ν^W e F_ν^Z sono i fattori di forma a un loop definiti nelle (4.41) e (4.40), mentre le Σ_L denotano le funzioni a due punti che determinano il contro-termine di rinormalizzazione.

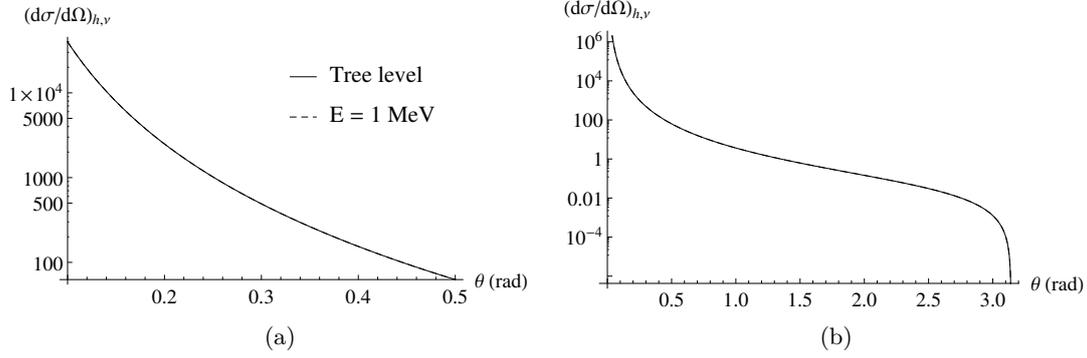


Figura 4.7: La sezione d'urto differenziale del neutrino in unità di r_S^2 per neutrini con energia $E = 1$ MeV in due diversi intervalli angolari. In questo regime cinematico le correzioni radiative, dipendenti dall'energia, sono completamente sovrapposte al contributo dell'ordine principale (tree-level).

Nella figura 4.7 sono rappresentati due grafici della sezione d'urto all'ordine principale e al primo ordine perturbativo (indicato dalla dipendenza esplicita dall'energia) per neutrini con energia di 1 MeV. Nella figura (a) la sezione d'urto è raffigurata in una particolare regione angolare, mentre nella (b) è presentata per ogni valore dell'angolo di diffusione. Notiamo inoltre che l'osservabile è riscalata rispetto alla dimensione caratteristica del sistema, riportata in unità di raggi di Schwarzschild r_S^2 .

Nel caso di neutrini con energia dell'ordine del MeV, l'espressione precedente si semplifica considerevolmente e assume la forma

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_\nu} = & (GM)^2 \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2} \left\{ 1 + \frac{G_F}{\pi^2 \sqrt{2}} \left[\frac{11}{18} + \frac{1}{36 (m_f^2 - m_W^2)^4} \left(5 m_f^8 - 98 m_f^6 m_W^2 \right. \right. \right. \\
 & + 243 m_f^4 m_W^4 - 194 m_f^2 m_W^6 + 44 m_W^8 \\
 & \left. \left. \left. + 6 \left(10 m_f^6 m_W^2 - 15 m_f^4 m_W^4 + 2 m_f^2 m_W^6 \right) \ln \frac{m_f^2}{m_W^2} \right) \right] E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

È evidente dalla figura 4.7 che, per energie di 1 MeV, i risultati all'ordine principale e a un loop sono completamente sovrapposti. Per poter mettere in risalto le differenze tra i due contributi è necessario variare l'energia dei neutrini. I risultati di questa analisi sono presentati nella figura 4.8, dove la sezione d'urto è graficata in quattro intervalli angolari e per tre valori distinti dell'energia del fascio incidente, 1 GeV, 1 TeV e 1 PeV. In generale possiamo osservare che il risultato all'ordine principale è praticamente sovrapposto a quello a un loop, con differenze che diventano significative all'aumentare dell'energia. Questo effetto è presente sia per piccoli che per grandi valori dell'angolo ϑ e comporta una riduzione della sezione d'urto rispetto al risultato ottenuto all'ordine principale. Tale comportamento influenza la dipendenza dell'angolo di diffusione α in funzione del parametro d'impatto b , e quindi il fenomeno della lente gravitazionale, quando il fascio di particelle si avvicina all'orizzonte degli eventi di un buco nero. Infatti, come abbiamo già discusso nel capitolo 3, l'angolo α è legato alla sezione d'urto, nell'approccio semi-classico, dall'equazione (3.48).

Maggiori informazioni sull'impatto delle correzioni radiative possono essere estratte dalle figure 4.9 dove abbiamo rappresentato la sezione d'urto in funzione dell'energia del neutrino per un valore fissato dell'angolo di diffusione, $\vartheta = 0.1$ rad.

Infine, nella figura 4.10 è illustrato l'andamento del rapporto K

$$K = \frac{(d\sigma/d\Omega)^{(1)}}{(d\sigma/d\Omega)^{(0)}}, \tag{4.85}$$

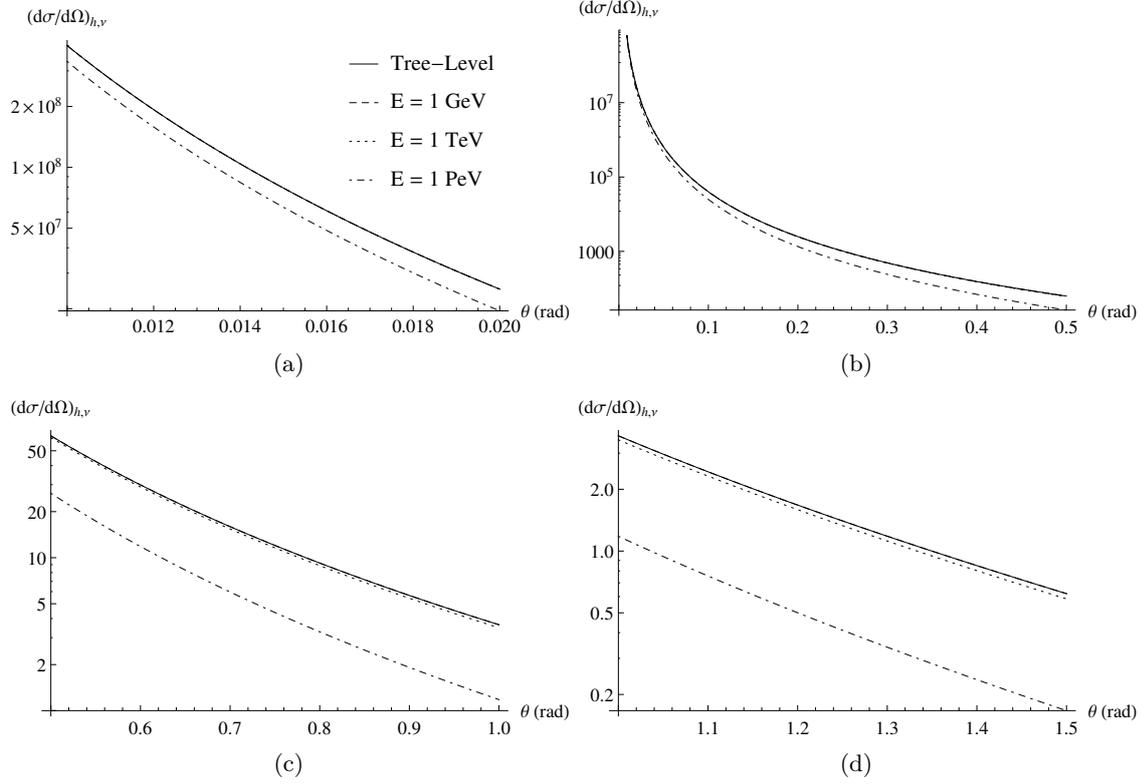


Figura 4.8: La sezione d'urto differenziale del neutrino in unità di r_S^2 all'ordine principale (tree-level) e a un loop per neutrini con energia $E = 1$ GeV, 1 TeV e 1 PeV in quattro diversi intervalli angolari. Il discostamento evidente dall'andamento della soluzione all'ordine principale si osserva per la curva che rappresenta la soluzione a un loop con energia a 1 PeV, già a partire da angoli ϑ molto piccoli. Passando a valori più grandi degli angoli anche la curva con $E = 1$ TeV inizia a discostarsi da quella all'ordine principale.

definito come il contributo a un loop normalizzato sulla sezione d'urto all'ordine principale, in funzione dell'angolo di diffusione per tre diversi valori dell'energia, nella figura 4.10(a), e, viceversa, in funzione dell'energia del neutrino per tre particolari ϑ , nella 4.10(b). Dall'analisi dei grafici risulta evidente che l'effetto delle correzioni radiative diventa più marcato all'aumentare dell'energia e per grandi valori dell'angolo di diffusione, fino a raggiungere un impatto del 50% per valori estremamente grandi dell'energia, $E \sim 1$ PeV.

Nel caso della diffusione di un fotone in un campo gravitazionale esterno, la sezione d'urto differenziale a un loop assume la forma

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_\gamma} = (GM)^2 \cot^4(\vartheta/2) [1 + \text{Re } \bar{\Phi}_3] , \quad (4.86)$$

dove $\bar{\Phi}_3$ è il fattore di forma rinormalizzato introdotto nella (4.75). Questo è ottenuto dal contributo del settore debole del Modello Standard, in particolare dalle correzioni radiative indotte dai bosoni di gauge W^\pm e dal settore di elettromagnetico mediato dai fermioni elettricamente carichi, leptoni e quark.

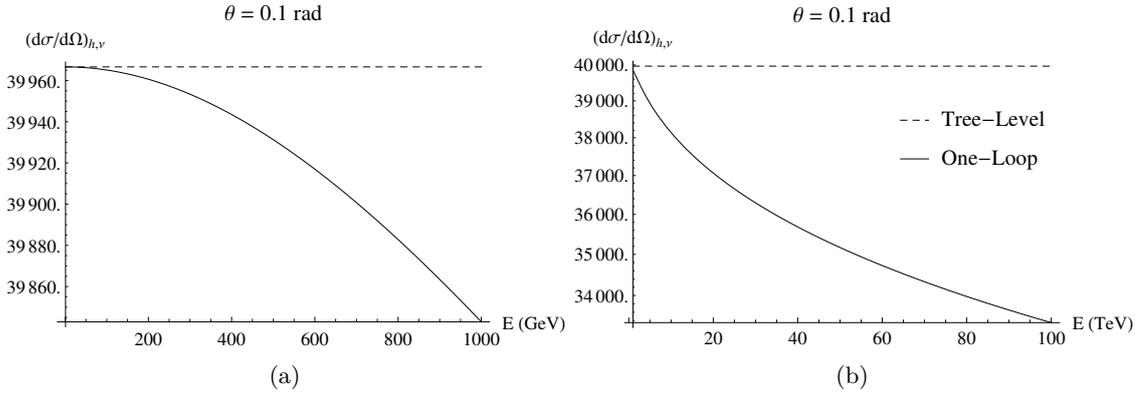


Figura 4.9: La sezione d'urto differenziale del neutrino in unità di r_S^2 in funzione dell'energia nelle regioni cinematiche (a) $100 \text{ GeV} < E < 1000 \text{ GeV}$ e (b) $10 \text{ TeV} < E < 100 \text{ TeV}$. L'angolo di diffusione è fissato a $\vartheta = 0.1 \text{ rad}$.

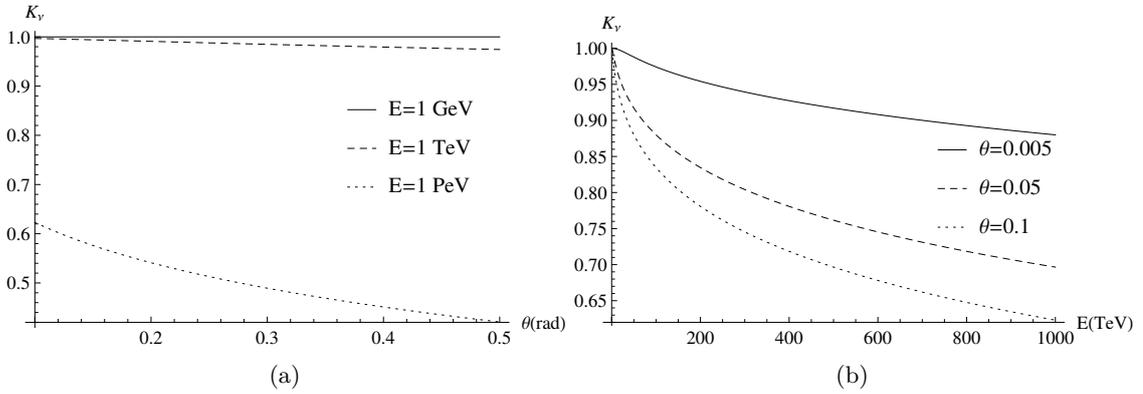


Figura 4.10: Il rapporto K , per il caso del neutrino, in funzione dell'angolo ϑ per tre valori dell'energia (a), e in funzione dell'energia E per tre diversi angoli di diffusione (b).

Analogamente a quanto già studiato per il neutrino, analizziamo l'impatto delle correzioni radiative sulla sezione d'urto di diffusione e , nello specifico, la dipendenza dall'energia. Nella figura 4.11 è rappresentata la sezione d'urto in quattro intervalli angolari e per tre diversi valori dell'energia del fotone, $E = 1 \text{ GeV}$, 1 TeV e 10 TeV . Il contributo all'ordine principale è raffigurato da una linea tratteggiata ed è indipendente dall'energia, le altre curve, invece, sono ottenute dal calcolo a un loop. Il comportamento che si è evince è analogo a quello discusso per il neutrino: l'effetto delle correzioni radiative riduce il valore della sezione d'urto rispetto a quello previsto dal calcolo all'ordine principale su tutto l'intervallo angolare. Questo comportamento diventa più rilevante per grandi valori dell'energia del fotone incidente e, seppure più debolmente, all'aumentare dell'angolo di diffusione. Nella figura 4.12 è raffigurata la sezione d'urto in funzione dell'energia per un valore fissato dell'angolo, $\vartheta = 0.1 \text{ rad}$.

Ulteriori dettagli sono forniti in figura 4.13 dove è rappresentato il rapporto K , definito come nella (4.85), per il caso del fotone. L'impatto delle correzioni radiative è mostrato in funzione dell'angolo per valori dell'energia $E = 10 \text{ GeV}$, 100 GeV , 1 TeV e 100 TeV , riportato nella figura (a), e in funzione dell'energia nell'intervallo $100 \text{ GeV} < E < 1000 \text{ GeV}$ per tre diversi angoli ϑ , nella (b). È immediato osservare come K diminuisca all'aumentare dell'energia del fotone fino a raggiungere

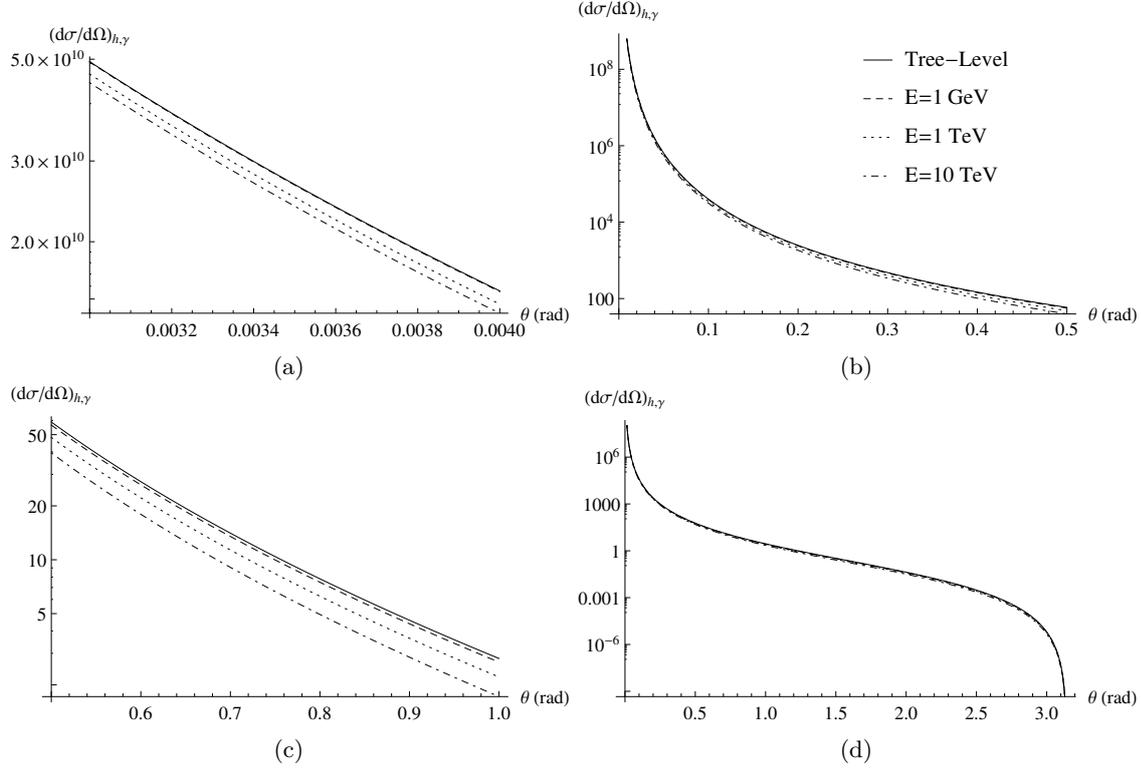


Figura 4.11: La sezione d'urto differenziale del fotone in unità di r_S^2 all'ordine principale e a un loop per fotoni con energia $E = 1$ GeV, 1 TeV e 10 TeV in quattro diversi intervalli angolari.

valori intorno al 50% per grandi angoli di diffusione $\vartheta \sim 0.3$ rad e per $E \sim 100$ TeV.

Le sezioni d'urto di interazione in un campo gravitazionale esterno, nel caso del neutrino e del fotone, saranno utilizzate nei capitoli successivi per analizzare il fenomeno della lente gravitazionale nel contesto della teoria quantistica delle perturbazioni nel Modello Standard. Prima di affrontare questo argomento, concludiamo il capitolo con uno studio della sezione d'urto di diffusione per un generico fermione massivo, focalizzando la nostra attenzione sulla struttura dei contributi elettromagnetici, assenti nel caso del neutrino.

4.6.2 La diffusione di un fermione massivo

La sezione d'urto a un loop che descrive la diffusione in un campo gravitazionale esterno di un generico fermione massivo del Modello Standard è calcolata estendendo l'analisi del capitolo 2 e utilizzando le espressioni esplicite dei fattori di forma presentati in questo capitolo. Il risultato può essere organizzato come segue

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_f} = & \left(\frac{GM}{\sin^2(\vartheta/2)} \right)^2 \left[\mathcal{F}^{(0)}(E, m, \vartheta) + \frac{\alpha Q^2}{4\pi} \text{Re } \mathcal{F}_V^{(1)}(E, m, \vartheta) + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \text{Re } \mathcal{F}_V^{(1)}(E, m, \vartheta) \right. \\ & \left. + \frac{m^2 G_F}{16\pi\sqrt{2}} \text{Re } \mathcal{F}_h^{(1)}(E, m, \vartheta) + \frac{G_F}{16\pi\sqrt{2}} \text{Re } \mathcal{F}_W^{(1)}(E, m, \vartheta) \right] \end{aligned} \quad (4.87)$$

dove $\mathcal{F}^{(0)}$ è il termine all'ordine principale, già calcolato in (2.58), mentre $\mathcal{F}_V^{(1)}$, $\mathcal{F}_h^{(1)}$ e $\mathcal{F}_W^{(1)}$ sono rispettivamente i contributi a un loop dei bosoni di gauge a massa nulla, dell'Higgs e dei bosoni

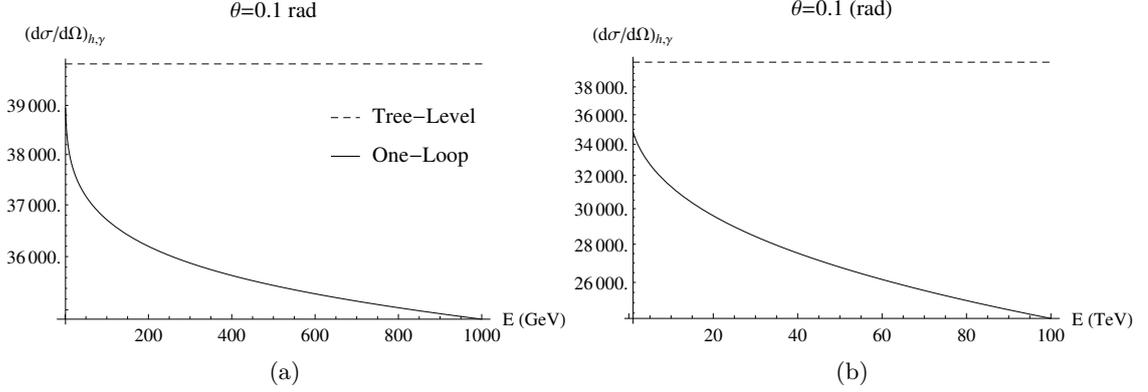


Figura 4.12: La sezione d'urto differenziale del fotone in unità di r_S^2 in funzione dell'energia nelle regioni cinematiche (a) $100 \text{ GeV} < E < 1000 \text{ GeV}$ e (b) $10 \text{ TeV} < E < 100 \text{ TeV}$. L'angolo di diffusione è fissato a $\vartheta = 0.1 \text{ rad}$.

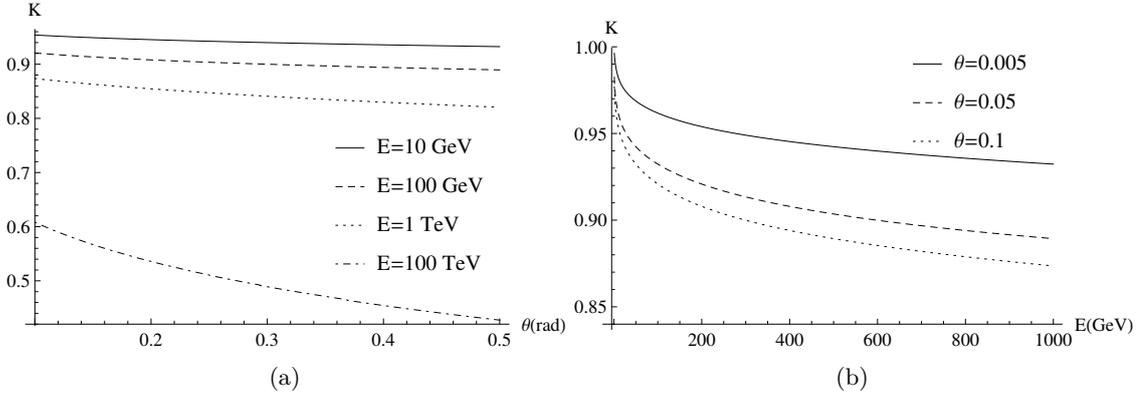


Figura 4.13: Il rapporto K , per il caso del fotone, in funzione dell'angolo ϑ per quattro valori dell'energia (a), e in funzione dell'energia E per tre diversi angoli di diffusione (b).

di gauge deboli. Il termine proporzionale a α_s è legato alle correzioni non abeliane di QCD ed è presente solo se il fermione ha una carica di colore. In particolare $C_F = 4/3$ per i quark e $C_F = 0$ per i leptoni. La funzione $\mathcal{F}^{(0)}$, che rappresenta il contributo all'ordine di Born, e le funzioni $\mathcal{F}^{(1)}$, che contengono le correzioni virtuali, possono essere scritte nella seguente forma

$$\mathcal{F}^{(0)}(E, m, \vartheta) = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad \text{con } x = \frac{m^2}{\vec{p}_1^2} \quad (4.88a)$$

$$\mathcal{F}_V^{(1)}(E, m, \vartheta) = \sum_{i=1}^4 C_V^i(E, m, \vartheta) f_{i \text{ ren}}(q^2), \quad (4.88b)$$

$$\mathcal{F}_h^{(1)}(E, m, \vartheta) = \sum_{i=1}^4 C_h^i(E, m, \vartheta) f_{i \text{ ren}}^h(q^2), \quad (4.88c)$$

$$\mathcal{F}_W^{(1)}(E, m, \vartheta) = \sum_{i=1}^6 C_W^i(E, m, \vartheta) (f_{i \text{ ren}}^Z(q^2) + f_{i \text{ ren}}^W(q^2)), \quad (4.88d)$$

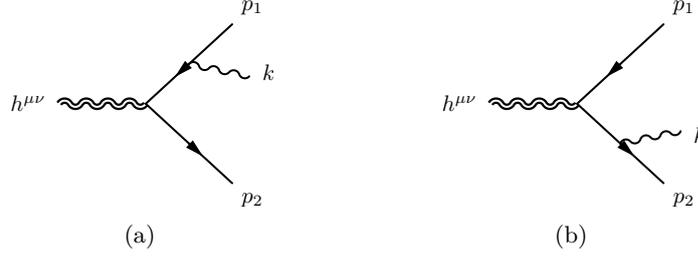


Figura 4.14: Diagrammi di emissione reale di un bosone di gauge a massa nulla di quadrimomento k .

dove i coefficienti \mathcal{C}^i sono dati da

$$C_V^1(E, m, \vartheta) = 8\mathcal{F}^{(0)}(E, m, \vartheta), \quad (4.89a)$$

$$C_V^2(E, m, \vartheta) = -x \left(2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + x \right), \quad (4.89b)$$

$$C_V^3(E, m, \vartheta) = 2m^2 \left(2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + x \right)^2, \quad (4.89c)$$

$$C_V^4(E, m, \vartheta) = 2m^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \left(2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + x \right), \quad (4.89d)$$

per il settore elettromagnetico e di QCD e

$$C_h^i(E, m, \vartheta) = C_V^i(E, m, \vartheta), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (4.90a)$$

$$C_W^1(E, m, \vartheta) = C_W^2(E, m, \vartheta) = 4\mathcal{F}^{(0)}(E, m, \vartheta), \quad (4.90b)$$

$$C_W^3(E, m, \vartheta) = C_V^2(E, m, \vartheta), \quad (4.90c)$$

$$C_W^4(E, m, \vartheta) = C_V^3(E, m, \vartheta), \quad (4.90d)$$

$$C_W^5(E, m, \vartheta) = C_V^4(E, m, \vartheta), \quad (4.90e)$$

$$C_W^6(E, m, \vartheta) = 0, \quad (4.90f)$$

per il settore debole e dell'Higgs.

Prima di quantificare l'impatto delle correzioni radiative occorre considerare la cancellazione delle divergenze infrarosse di cui sono affette, analizzando in dettaglio la struttura delle correzioni di bremsstrahlung nella regione soffice, per piccoli valori dell'energia E dei bosoni di gauge (fotoni o gluoni) emessi dalle particelle cariche ($E \rightarrow 0$).

4.6.3 La cancellazione delle divergenze infrarosse

Come abbiamo già discusso in precedenza, le correzioni virtuali elettromagnetiche e quelle di QCD alla sezione d'urto di diffusione di un fermione carico in un campo gravitazionale esterno sono affette da divergenze infrarosse. Di seguito specializzeremo la trattazione al contesto elettromagnetico ma le stesse conclusioni sono ugualmente valide nel caso della cromodinamica quantistica con l'unica sostituzione $\alpha Q^2 \rightarrow \alpha_s C_F$.

Queste singolarità possono essere eliminate considerando lo stesso processo fisico con l'emissione di un fotone soffice. Calcoleremo di seguito l'elemento di matrice con una emissione reale nell'approssimazione di *fotone soffice*, ossia di un fotone con energia $E_\gamma \rightarrow 0$, e mostreremo la cancellazione delle singolarità infrarosse tra correzioni reali e virtuali. In particolare si richiede

che l'energia del fotone sia inferiore ad un certo valore di soglia, $E_\gamma \leq \Delta E$, che solitamente, negli esperimenti ai collisori, si interpreta come la sensibilità del rivelatore.

Nell'approssimazione menzionata sopra l'elemento di matrice che descrive l'emissione reale è dato dalla somma di due contributi rappresentati nella figura 4.14 ed è dato da

$$\mathcal{M}_{\text{soft}} = \mathcal{M}_0(eQ) \left[\frac{\varepsilon(k) \cdot p_1}{k \cdot p_1} - \frac{\varepsilon(k) \cdot p_2}{k \cdot p_2} \right], \quad (4.91)$$

dove k e $\varepsilon(k)$ sono rispettivamente il momento e il vettore di polarizzazione del fotone. L'elemento di matrice \mathcal{M}_0 è, invece, l'ampiezza all'ordine principale

$$\mathcal{M}_0 = A_{\mu\nu} \hat{T}_0^{\mu\nu} \quad (4.92)$$

che, nel nostro caso, si fattorizza nel prodotto del vertice $\hat{T}_0^{\mu\nu}$ e di un termine, $A_{\mu\nu}$, che non dipende dal processo di emissione soffice.

La cancellazione delle divergenze infrarosse si compie a livello di sezione d'urto. Dobbiamo, quindi, quadrare l'elemento di matrice nella (4.91), sommare sugli stati di polarizzazione e integrare sullo spazio delle fasi del fotone. Si ottiene la sezione d'urto soffice

$$d\sigma_{\text{soft}} = -d\sigma_0 \frac{\alpha}{2\pi^2} Q^2 \int_{|\vec{k}| \leq \Delta E} \frac{d^3k}{2k_0} \left[\frac{p_1^2}{(k \cdot p_1)^2} + \frac{p_2^2}{(k \cdot p_2)^2} - 2 \frac{p_1 \cdot p_2}{k \cdot p_1 k \cdot p_2} \right] \quad (4.93)$$

dove la divergenza infrarossa, che si manifesta nel limite di integrazione inferiore $k \rightarrow 0$, è regolarizzata da una massa λ per il fotone $k_0 = \sqrt{|\vec{k}|^2 + \lambda^2}$. Gli integrali che compaiono nella sezione d'urto soffice

$$I_{ij} = \int_{|\vec{k}| \leq \Delta E} \frac{d^3k}{2k_0} \frac{2p_i \cdot p_j}{k \cdot p_i k \cdot p_j} \quad (4.94)$$

sono stati calcolati in [38]

$$\begin{aligned} I_{11} = I_{22} &= 4\pi \left[\log \frac{\Delta E}{\lambda} + \frac{1}{2\beta} \log x_s \right], \\ I_{12} &= -8\pi \left(1 - \frac{q^2}{2m^2} \right) \frac{x_s}{1 - x_s^2} \left[\log \frac{\Delta E}{\lambda} \log x_s - \text{Li}_2 \frac{-2\beta}{1 + \beta} + \frac{1}{4} \log^2 x_s \right], \end{aligned} \quad (4.95)$$

dove $x_s = -\frac{1-\beta}{1+\beta}$ e $\beta = \sqrt{1 - 4m^2/q^2}$. A partire dai risultati precedenti si determina l'espressione esplicita della sezione d'urto soffice

$$d\sigma_{\text{soft}} = -d\sigma_0 \frac{\alpha}{4\pi} Q^2 \left\{ 8 \log \frac{\Delta E}{\lambda} + \frac{8}{y} (2y - 1) \frac{x_s}{1 - x_s^2} \log \frac{\Delta E}{\lambda} \log x_s + \dots \right\}, \quad (4.96)$$

dove sono riportati solo i termini che contengono la divergenza infrarossa.

Considerando la somma dei contributi virtuali rinormalizzati e della sezione d'urto di emissione soffice, e il fatto che in entrambi i casi le divergenze sono proporzionali alla sezione d'urto a livello Born, si ottiene

$$d\sigma_{\text{e.m.}} = d\sigma_{\text{virt}} + d\sigma_{\text{soft}} = d\sigma_0 \frac{\alpha}{4\pi} Q^2 \left[1 + \frac{1}{y} (2y - 1) \frac{x_s}{1 - x_s^2} \log x_s \right] 8 \log \frac{m}{\Delta E} + \dots \quad (4.97)$$

Come avevamo anticipato, la somma delle correzioni virtuali e reali fornisce un risultato finito nel limite $\lambda \rightarrow 0$ e quindi privo di divergenze infrarosse.

Per quantificare l'impatto delle correzioni radiative elettromagnetiche consideriamo il caso della diffusione di un elettrone in un campo gravitazionale esterno. In questo contesto il contributo

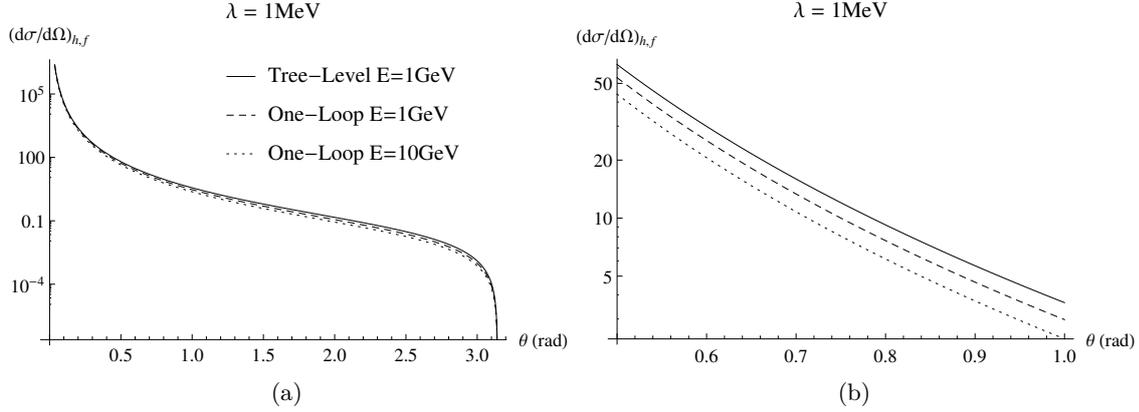


Figura 4.15: La sezione d'urto differenziale dell'elettrone in unità di r_S^2 all'ordine principale e a un loop in due intervalli angolari e per diversi valori dell'energia. Sono state considerate solo le correzioni virtuali elettromagnetiche e il regolatore infrarosso λ è stato scelto pari a 1 MeV.

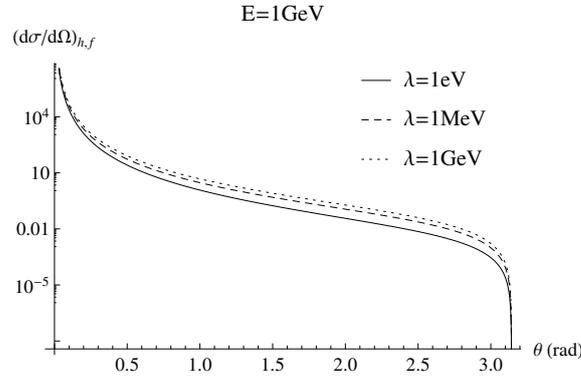


Figura 4.16: La sezione d'urto differenziale dell'elettrone in unità di r_S^2 , in cui sono state considerate solo le correzioni virtuali elettromagnetiche, per $E = 1$ GeV e per diversi valori del regolatore infrarosso λ : 1 eV, 1 MeV e 1 GeV.

dell'interazione forte è assente e possiamo trascurare anche quello mediato dal settore scalare del Modello Standard. Quest'ultimo, essendo generato dallo scambio del bosone di Higgs all'interno dei loop, risulta proporzionale alla massa dell'elettrone e , dunque, sottodominante rispetto agli altri contributi. Rispetto alle correzioni elettromagnetiche, anche quelle deboli, caratterizzate dall'interazione con i bosoni di gauge massivi Z e W^\pm , possono essere trascurate in prima approssimazione e, con riferimento alla (4.87), possiamo considerare solo i primi due termini.

Nella figura 4.15 è rappresentata la sezione d'urto di diffusione di un elettrone, in cui sono state considerate solo le correzioni virtuali, in funzione di ϑ in tutto l'intervallo angolare, 4.15(a), e in una particolare regione, 4.15(b). Sono stati raffigurati gli andamenti della sezione d'urto all'ordine principale e a un loop per diversi valori dell'energia dell'elettrone. Il contributo all'ordine principale è stato valutato esplicitamente per $E = 1$ GeV, ma, come abbiamo già discusso in precedenza, si otterrebbe lo stesso risultato per ogni valore dell'energia purché $E \gg m_e$. Inoltre, sottolineiamo che i grafici sono stati ottenuti scegliendo un particolare valore per il regolatore infrarosso, $\lambda = 1$ MeV, poiché negli stessi sono state considerate solo le correzioni virtuali. Analogamente a quanto osservato per il caso del neutrino e del fotone, l'impatto delle correzioni radiative aumenta al

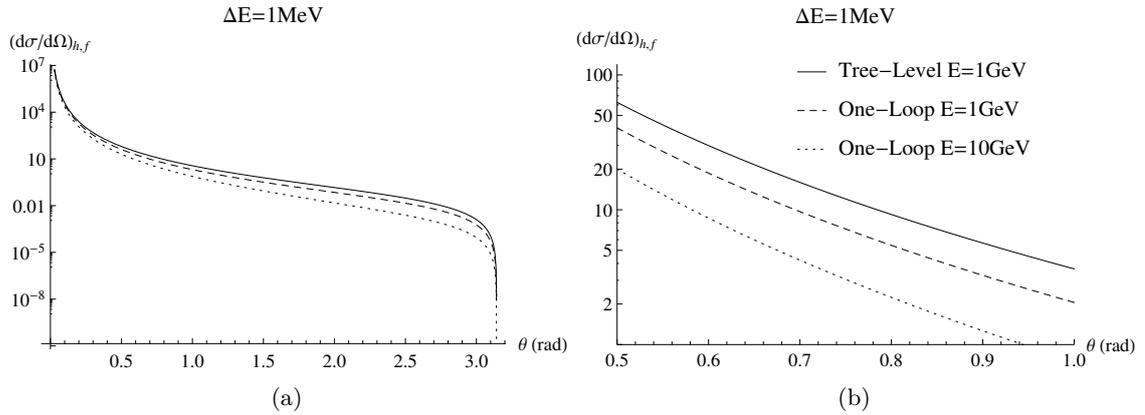


Figura 4.17: La sezione d'urto differenziale dell'elettrone in unità di r_S^2 all'ordine principale e a un loop in due intervalli angolari e per diversi valori dell'energia. È stata considerata la sezione d'urto completa data dalla somma delle correzioni virtuali elettromagnetiche e dai contributi di emissione di fotoni soffici, per $\Delta E = 1 \text{ MeV}$.

crescere dell'energia.

La dipendenza esplicita da λ è mostrata nella figura 4.16 dove la sezione d'urto è raffigurata in tutto l'intervallo angolare per un'energia dell'elettrone $E = 1 \text{ GeV}$. Il cut-off infrarosso è stato variato su un intervallo molto ampio di valori e in particolare per $\lambda = 1 \text{ eV}$, 1 MeV e 1 GeV . La divergenza infrarossa, controllata dal parametro λ , è completamente rimossa se si includono le correzioni di emissione reale. Per questo motivo, nella figura 4.17 presentiamo l'andamento della sezione d'urto completa per diversi valori dell'energia dell'elettrone e in due intervalli dell'angolo di diffusione ϑ . Come abbiamo già dimostrato, la dipendenza da λ scompare nella somma tra correzioni virtuali e reali. Sopravvive solo quella rispetto al parametro fisico ΔE che abbiamo scelto dello stesso ordine di grandezza della massa dell'elettrone e, in particolare, $\Delta E = 1 \text{ MeV}$. Notiamo infine che il comportamento della sezione d'urto in funzione dell'energia, ossia la sua decrescita all'aumentare di E indotta dalle correzioni radiative rispetto al risultato all'ordine principale, risulta più marcato dopo l'introduzione degli effetti di emissione reale.

Capitolo 5

L'equazione radiativa della lente gravitazionale

Lo studio delle lenti gravitazionali costituisce una delle più evidenti prove della teoria della relatività generale e nel corso degli anni è stato estensivamente affrontato prendendo in analisi fotoni emessi da svariate sorgenti. La deflessione delle traiettorie dei fotoni rende evidente la curvatura dello spazio-tempo e ancora oggi lo studio di sistemi che comprendono lenti gravitazionali costituisce uno strumento valido per investigare l'universo.

Come discusso nelle sezioni precedenti il moto del neutrino in presenza di uno spazio-tempo curvo subisce una deviazione dalla traiettoria originale alla stregua di quanto avviene per il fotone. Il fenomeno della lente gravitazionale si basa sulla deflessione di particelle anche prive di massa, la cui traiettoria viene deflessa per il fatto che lo spazio-tempo è curvato per la presenza di un oggetto massivo. Analogamente a quanto avviene nell'ottica geometrica è possibile determinare un'equazione che lega la posizione angolare dell'immagine, ottenuta dal fascio di particelle che arriva all'osservatore, con quella della sorgente, per mezzo dell'angolo di deflessione studiato nei capitoli precedenti [5, 4].

Con l'approccio finora descritto siamo in grado di considerare l'angolo di deflessione includendo anche le correzioni quantistiche fino al primo ordine perturbativo. Tali risultati permettono di ottenere un'equazione radiativa della lente gravitazionale. In questo contesto si analizzano gli aspetti peculiari della lente gravitazionale, quali gli ingrandimenti e la formazione di caustiche, e si mettono in risalto gli effetti delle correzioni radiative, tra i quali la dipendenza dall'energia è sicuramente il più importante e interessante. Questa dipendenza, infatti, è assente nella trattazione classica di Einstein e compare solo attraverso le correzioni quantistiche. In particolare la dipendenza dall'energia viene introdotta nelle correzioni a un loop della sezione d'urto e si propaga, attraverso la formula semi-classica (3.48), al parametro d'impatto e quindi a tutte le osservabili che descrivono il processo di diffusione e la lente gravitazionale. Ciò costituisce l'origine del fenomeno di dispersione della luce da una sorgente massiva noto anche come *arcobaleno gravitazionale*.

Ci preme sottolineare, inoltre, che l'analisi delle correzioni quantistiche al problema della deflessione, in particolare dei neutrini, è di natura esplorativa e ha lo scopo di costruire e delinare un apparato teorico con cui tentare di combinare la relatività classica di Einstein con una descrizione quantistica delle particelle elementari ad oggi note. Consci del fatto che una teoria quantistica della gravitazione non è stata ancora formulata, proponiamo di utilizzare un approccio semi-classico per calcolare effetti quantistici in gravità ed investigare questi fenomeni dal punto di vista qualitativo piuttosto che quantitativo poiché, almeno per ora, sono troppo piccoli per essere osservati sperimentalmente.

5.1 La lente gravitazionale

Il sistema fisico da studiare comprende una sorgente di particelle a massa nulla, fotoni o neutrini, una massa che curva lo spazio-tempo e funge da lente gravitazionale e un osservatore, che riceve il fascio, come schematizzato nella figura 5.1.

Le ipotesi semplificatrici per trattare il problema sono l'approssimazione di campo debole, già precedentemente discussa, e l'approssimazione dell'ottica geometrica. L'approssimazione di campo debole si traduce con la condizione

$$|\Phi| \ll 1, \quad (5.1)$$

dove Φ è il potenziale newtoniano e si è posto $c = 1$.

L'approssimazione dell'ottica geometrica consiste nel richiedere che la lunghezza d'onda λ della particella deflessa sia molto minore del raggio di curvatura caratteristico dello spazio

$$|\nabla\Phi|\lambda \ll |\Phi| \implies |\nabla\Phi|\lambda \ll 1. \quad (5.2)$$

La traiettoria seguita dalla particella, che in questo contesto chiameremo *raggio ottico*, è la proiezione di una geodetica nulla sullo spazio tridimensionale. In presenza di un campo gravitazionale stazionario, come nel caso in esame, il raggio ottico soddisfa il principio di Fermat, per il quale l'intervallo di tempo che il raggio impiega per raggiungere l'osservatore O a partire dalla sorgente S è stazionario e può pertanto essere ottenuto in termini del formalismo variazionale

$$\delta \int_S^O dt = 0, \quad (5.3)$$

dove l'integrale è calcolato lungo una generica curva congiungente O e S mentre δ costituisce una variazione arbitraria che si annulla agli estremi. Introducendo il parametro affine l , il raggio ottico può essere descritto da una funzione $\vec{r}(l)$, e in forza del fatto che la particella descrive una geodetica nulla $d\tau^2 = 0$, la stessa percorre una distanza infinitesima

$$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta_1^2 + r^2 \sin^2 \vartheta_1 d\phi^2} \quad (5.4)$$

nell'intervallo di tempo infinitesimo

$$dt = \sqrt{\frac{1 - 2\Phi}{1 + 2\Phi}} dl. \quad (5.5)$$

Sfruttando la condizione di campo debole (5.1) questa si può approssimare a

$$dt \sim (1 - 2\Phi) dl, \quad (5.6)$$

e l'integrale da considerare diventa

$$\delta \int_S^O dl (1 - 2\Phi) = 0. \quad (5.7)$$

Nell'ottica geometrica ordinaria, considerata nello spazio euclideo, il principio di Fermat si scrive come

$$\delta \int_S^O dl n(\vec{r}) = 0, \quad (5.8)$$

dove $n(\vec{r})$ rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga il raggio ottico. Possiamo quindi dire che il potenziale gravitazionale assurge al ruolo di indice di rifrazione nell'approssimazione dell'ottica geometrica

$$n(\vec{r}) = 1 - 2\Phi(\vec{r}). \quad (5.9)$$

In questo contesto deriviamo l'espressione per l'angolo di deflessione a partire dai risultati dell'ottica geometrica. La soluzione del problema variazionale (5.8) è data dall'equazione di Eulero-Lagrange della forma

$$\frac{d}{dl} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dl} \right) = \nabla n(\vec{r}), \quad (5.10)$$

che, introducendo il versore tangente a $\vec{r}(l)$

$$\hat{r} = \frac{d\vec{r}}{dl}, \quad (5.11)$$

si può scrivere come

$$\hat{r}(\hat{r} \cdot \nabla)n(\vec{r}) + \frac{d\hat{r}}{dl} = \nabla n(\vec{r}). \quad (5.12)$$

Introducendo il gradiente bidimensionale nel piano perpendicolare al raggio ottico

$$\nabla_{\perp} = \nabla - \hat{r}(\hat{r} \cdot \nabla) \quad (5.13)$$

e ricorrendo alla definizione dell'indice di rifrazione in termini del potenziale gravitazionale (5.9), la (5.12) diventa

$$\frac{d\hat{r}}{dl} = -2\nabla_{\perp}\Phi(\vec{r}). \quad (5.14)$$

La soluzione della precedente equazione è proprio il raggio ottico $\vec{r}(l)$.

Si introducono i versori tangenti al raggio ottico nella posizione della sorgente \hat{r}_S e nella posizione dell'osservatore \hat{r}_O , in modo che l'angolo di deflessione possa essere rappresentato dal vettore $\vec{\alpha} = \hat{r}_S - \hat{r}_O$ e integrando per parti l'equazione (5.14) si ottiene

$$\vec{\alpha} = 2 \int_S^O dl \nabla_{\perp}\Phi(\vec{r}). \quad (5.15)$$

Per ora, poiché stiamo considerando il sistema in uno spazio tridimensionale le posizioni angolari sono rappresentate come vettori nello spazio. In seguito, con le dovute restrizioni, si considereranno espressioni unidimensionali.

Oltre alle ipotesi già poste, consideriamo che le velocità relative di sorgente, lente e osservatore siano molto minori della velocità della luce e che lo spazio-tempo sia piatto a meno della perturbazione indotta dalla presenza della lente. Queste posizioni garantiscono la stazionarietà del campo gravitazionale, necessarie per poter utilizzare il principio di Fermat.

Come rappresentato nella figura 5.1 un raggio ottico viene emesso dalla sorgente nella posizione S e raggiunge l'osservatore O dopo essere stato deflesso di un angolo α per la presenza della lente L nella posizione V in figura. La congiungente l'osservatore con il baricentro V della lente individua l'asse ottico, il piano perpendicolare all'asse ottico passante per V è il piano della lente e quello perpendicolare all'asse e passante per S costituisce il piano della sorgente. Occorre ora utilizzare un'ipotesi semplificatrice che prende il nome di approssimazione della *lente sottile*: le distanze tra i piani coinvolte sono molto maggiori dell'estensione della lente lungo l'asse ottico e della sua estensione nel piano della lente.

Le distanze in gioco sono espresse in termini della distanza di *diametro angolare* D , definita come il rapporto tra la dimensione reale dell'oggetto e la sua dimensione angolare misurata dall'osservatore. Per distanze non cosmologiche (minori di ~ 100 Mpc) tale distanza coincide con la quella euclidea. Quando le distanze sono talmente grandi che gli effetti cosmologici diventano rilevanti, la distanza di diametro angolare non è più additiva. Nel nostro caso, poiché non siamo in questo regime, possiamo trattare le distanze come euclidee e in particolare

$$D_S = D_L + D_{LS}. \quad (5.16)$$

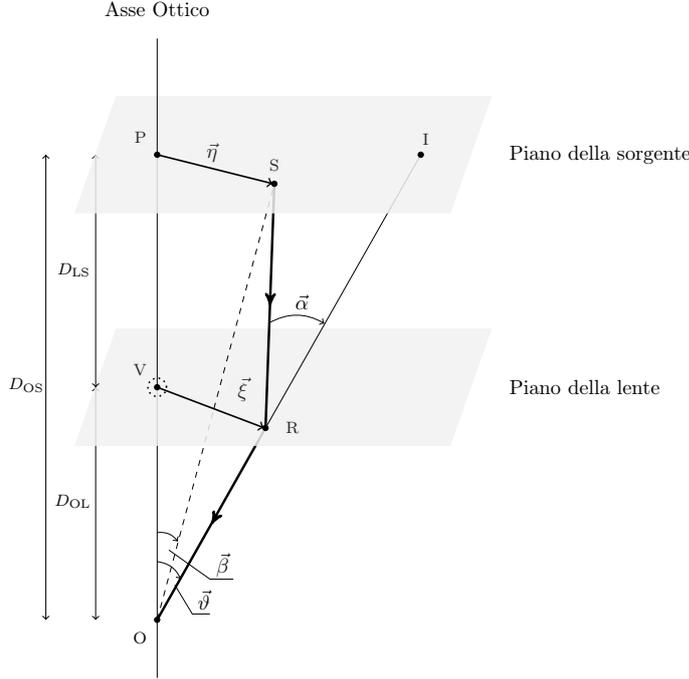


Figura 5.1: La deflessione della traiettoria di una particella in presenza di una lente gravitazionale. Il raggio ottico $\vec{r}_0(l)$ parametrizzato da l parte dalla sorgente S per raggiungere l'osservatore O e rappresenta l'approssimazione del raggio ottico reale $\vec{r}(l)$, che invece sarebbe curvo. Il baricentro della lente gravitazionale è posto in V , il punto P rappresenta la proiezione di V sul piano della lente e l'asse ottico è la retta passante per la congiungente l'osservatore e il baricentro della lente. Il raggio ottico viene deviato per la presenza della lente e l'immagine I osservata occupa una posizione nel piano della sorgente che non coincide con quella della sorgente stessa. La posizione angolare della sorgente rispetto all'osservatore è individuata da $\vec{\beta}$, la posizione dell'immagine sul piano della lente da \vec{v}_I . Con $\vec{\alpha}$ si indica l'angolo di deflessione. I vettori $\vec{\eta}$ e $\vec{\xi}$ sono i vettori posizione della sorgente e dell'immagine proiettata nel piano della lente, posta nel punto R . Le distanze riportate nella sinistra della figura si riferiscono alle distanze di diametro angolare tra i piani: D_S è la distanza tra il piano della sorgente e l'osservatore, D_L la distanza tra il piano della lente e l'osservatore e D_{LS} la distanza tra il piano della lente e quello della sorgente. Nello spazio euclideo si ha $D_S = D_L + D_{LS}$.

Introducendo D_\perp e D_\parallel per indicare rispettivamente l'estensione angolare della lente lungo l'asse ottico e quella nel piano della lente, l'approssimazione della lente sottile consiste nelle condizioni

$$D_L \gg D_\parallel, \quad D_{LS} \gg D_\parallel, \quad D_\parallel \sim D_\perp. \quad (5.17)$$

Poiché deve essere soddisfatta la condizione di campo debole, il contributo dominante alla deflessione della traiettoria della particella è dato dalla regione occupata dalla lente gravitazionale e tale campo si indebolisce all'allontanarsi dalla lente. Inoltre le velocità relative del sistema sorgente-lente-osservatore sono molto minori della velocità della luce e quindi, chiamando con Φ_0 il valore assunto dal potenziale in prossimità della lente e sfruttando la (5.15) si ha che gli angoli di deflessione devono essere piccoli

$$\alpha \sim \frac{D_\parallel |\Phi_0|}{D_\perp} \ll 1. \quad (5.18)$$

Questo comporta una notevole semplificazione, perché permette di integrare la (5.15) lungo il cammino ottico approssimato, che chiamiamo $\vec{r}_0(l)$, piuttosto che lungo il raggio ottico reale. Si

approssima la traiettoria descritta dalla particella in termini di due rette che si congiungono sul piano della lente, come rappresentato in figura. In corrispondenza della sorgente S il raggio ottico imperturbato ha lo stesso versore \hat{r}_S del reale. Assumiamo che nel punto R indicato nella figura 5.1 il parametro affine l si annulli e introduciamo la parametrizzazione

$$\vec{r}_0(l) = \vec{\xi} + l \hat{r}_S, \quad (5.19)$$

con $\vec{\xi}$ vettore appartenente al piano della lente.

Un'ulteriore condizione sulle distanze angolari che intervengono è legata all'approssimazione della lente sottile: si ha un effetto di deflessione non irrilevante se tutti gli angoli coinvolti sono piccoli, quindi se le posizioni angolari che individuano la posizione della sorgente e dell'immagine osservata soddisfano le condizioni

$$\beta \ll 1 \quad \vartheta_I \ll 1. \quad (5.20)$$

Questo perché, se così non fosse, si avrebbe che il raggio ottico che raggiunge l'osservatore intersecherebbe il piano della lente producendo un vettore ξ in modulo molto grande. In tal caso nella posizione R il campo gravitazionale sarebbe estremamente debole, portando l'angolo di deflessione a essere irrilevante $\alpha \simeq 0$.

Per le ipotesi considerate i raggi ottici reale e imperturbato sono entrambi quasi perpendicolari al piano della lente. Per stimare il contributo dominante alla deflessione possiamo supporre che tali raggi siano effettivamente perpendicolari al piano della lente, condizione che può essere riscritta come

$$\vec{\xi} \perp \hat{r}_S. \quad (5.21)$$

Allora l'integrale (5.15) può essere scritto come

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = 2 \int_S^O dl \nabla_\xi \Phi(\vec{\xi} + l \hat{r}_S), \quad (5.22)$$

dove con ∇_ξ si è indicato il gradiente bidimensionale nel piano della lente.

Generalizzando quanto posto finora al caso di una distribuzione arbitraria di materia rappresentata dalla densità $\rho(\vec{r})$ l'espressione dell'angolo di deflessione diventa

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = -2G \int_S^O dl \nabla_\xi \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{\xi} + l \hat{r}_S - \vec{r}'|}. \quad (5.23)$$

Parametrizzando $\vec{r}' = \vec{\xi}' + l' \hat{r}_S$, con $\vec{\xi}'$ nel piano della lente e sfruttando la

$$\nabla_\xi \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (5.24)$$

si ottiene

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = 2G \int d^3\vec{\xi}' (\vec{\xi} - \vec{\xi}') \int dl' \rho(\vec{\xi}' + l' \hat{r}_S) \int_S^O dl \frac{1}{(|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2 + (l - l')^2)^{3/2}}, \quad (5.25)$$

dove nel denominatore dell'ultimo termine si è sfruttata la condizione (5.21). Per l'approssimazione della lente sottile le distanze tra i piani sono molto grandi, per cui è possibile considerare il limite dell'ultimo integrale che compare nell'espressione precedente con $S \rightarrow -\infty$ e $O \rightarrow +\infty$, da cui

$$\int_S^O dl \frac{1}{(|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2 + (l - l')^2)^{3/2}} \sim \frac{2}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}. \quad (5.26)$$

Introducendo la definizione di densità superficiale

$$\Sigma(\vec{\xi}') = \int dl' \rho(\vec{\xi}' + l' \hat{r}_S) \quad (5.27)$$

si ottiene

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = 4G \int d^3\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \quad (5.28)$$

per cui nell'approssimazione di lente sottile l'angolo di deflessione non dipende dalla struttura tridimensionale, ma dalla densità superficiale della lente nel piano. Si può immaginare, quindi, che la deflessione dei raggi causata da una lente sottile avvenga unicamente e istantaneamente in corrispondenza del piano della lente.

L'angolo di deflessione è dipendente dal gradiente del potenziale gravitazionale nel piano della lente, per cui risulta naturale rappresentare l'angolo di deflessione come il gradiente di quello che prende il nome di potenziale di deflessione, indicato in letteratura con $\psi(\vec{\xi})$

$$\vec{\alpha}(\vec{\xi}) = \nabla_{\xi} \psi(\vec{\xi}). \quad (5.29)$$

Se definiamo il potenziale gravitazionale bidimensionale $\phi(\vec{\xi})$ come

$$\phi(\vec{\xi}) = \int dz \Phi(\vec{\xi}, z) \quad (5.30)$$

questo soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla_{\xi}^2 \phi(\vec{\xi}) = 4\pi G \Sigma(\vec{\xi}), \quad (5.31)$$

con Σ la densità superficiale. Una soluzione dell'equazione precedente si può scrivere come

$$\phi(\vec{\xi}) = 4\pi G \int d^2\xi' \mathcal{G}^{(2)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}') \Sigma(\vec{\xi}'), \quad (5.32)$$

in termini di una funzione di Green bidimensionale che soddisfa la

$$\nabla_{\xi} \mathcal{G}^{(2)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}') = \delta^{(2)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}'). \quad (5.33)$$

La funzione di Green bidimensionale cercata assume la forma

$$\mathcal{G}^{(2)}(\vec{\xi} - \vec{\xi}') = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \quad (5.34)$$

in modo che la generica soluzione dell'equazione di Poisson si possa scrivere come

$$\phi(\vec{\xi}) = 2G \int d^2\xi' \Sigma(\vec{\xi}') \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'| + \phi_0(\vec{\xi}), \quad (5.35)$$

dove $\phi_0(\vec{\xi})$ è un'arbitraria funzione armonica. Ora, l'espressione che definisce l'angolo di deflessione (5.22), poiché l'integrale è preso lungo il raggio ottico e il gradiente è calcolato nel piano della lente, può essere scritta come

$$\vec{\alpha} = 2\nabla_{\xi} \int_S^O dl \Phi(\vec{\xi} + l \hat{r}_S). \quad (5.36)$$

Per la definizione del potenziale gravitazionale bidimensionale (5.30) si ha

$$\psi(\vec{\xi}) = 2\phi(\vec{\xi}) \quad (5.37)$$

e poiché $\phi(\vec{\xi})$ soddisfa la (5.31), allora per $\psi(\vec{\xi})$ si può scrivere l'equazione di Poisson

$$\nabla_{\xi}^2 \psi(\vec{\xi}) = 8\pi G \Sigma(\vec{\xi}). \quad (5.38)$$

Sfruttando la (5.35) si ottiene la soluzione dell'equazione precedente

$$\psi(\vec{\xi}) = 4G \int d^2 \vec{\xi}' \Sigma(\vec{\xi}') \ln |\vec{\xi} - \vec{\xi}'|, \quad (5.39)$$

che delinea la forma del potenziale di deflessione in termini della densità superficiale della lente.

Nel caso di lenti con simmetria sferica l'espressione di $\vec{\alpha}(\vec{\xi})$ si semplifica notevolmente. In particolare per il caso di una lente puntiforme la densità superficiale è data da

$$\Sigma(\vec{\xi}) = M \delta^{(2)}(\vec{\xi}) \quad (5.40)$$

e l'angolo di deflessione risulta

$$\alpha(\xi) = \frac{4GM}{\xi}. \quad (5.41)$$

Introducendo il raggio di Schwarzschild associato alla lente la precedente diventa

$$\alpha(\xi) = \frac{2r_S}{\xi}, \quad (5.42)$$

mentre la condizione di campo debole descritta dalla (5.18) si traduce in

$$\xi \gg r_S. \quad (5.43)$$

In tal modo ritroviamo la condizione che si era posta nello studio del problema della deflessione in presenza del campo gravitazionale, in quel caso espressa in termini del parametro d'impatto.

5.2 L'equazione della lente

Nelle approssimazioni considerate tutti gli angoli inclusi nella trattazione sono piccoli $\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$ e $\vartheta_I \ll 1$. La relazione che lega le posizioni angolari della sorgente, della lente e dell'immagine prende il nome di equazione della lente. Per definirla stabiliamo delle relazioni geometriche facendo riferimento alla figura 5.1.

Nel piano della sorgente I rappresenta la posizione dell'immagine osservata e individua il punto di intersezione della retta OR con il piano della sorgente e P è la proiezione del baricentro della lente nel piano della sorgente. La relazione geometrica che si può scrivere è

$$\overline{PI} = \overline{PS} + \overline{SI}. \quad (5.44)$$

Inoltre ricordando che $\vec{\beta}$ individua la posizione angolare della sorgente e $\vec{\vartheta}_I$ quella dell'immagine e per le approssimazioni considerate

$$\overline{PI} = \vec{\vartheta}_I D_S, \quad \overline{PS} = \vec{\beta} D_S, \quad (5.45)$$

e poiché la retta SR è considerata ortogonale al piano della lente possiamo anche porre

$$\overline{SI} = \vec{\alpha}(\vec{\xi}) D_{LS}. \quad (5.46)$$

In questo modo la (5.44) si può scrivere come

$$\vec{\vartheta}_I D_S = \vec{\beta} D_S + \vec{\alpha}(\vec{\xi}) D_{LS}, \quad (5.47)$$

da cui otteniamo la posizione angolare dell'immagine in funzione di quella della sorgente, ossia l'equazione della lente

$$\vec{\beta} = \vec{\vartheta}_I - \frac{D_{LS}}{D_S} \vec{\alpha}(\vec{\xi}), \quad (5.48)$$

dove l'espressione per l'angolo di deflessione è data dalla (5.28).

Dalla figura risulta inoltre che $\vec{\xi} = \vec{\vartheta}_I D_L$ da cui si ricava

$$\vec{\beta} = \vec{\vartheta}_I - \frac{D_{LS}}{D_S} \vec{\alpha}(\vec{\vartheta}_I D_L), \quad (5.49)$$

ottenendo una relazione in cui intervengono esclusivamente le posizioni angolari. Oppure si può introdurre il vettore $\vec{\eta} = \vec{\beta} D_S$, per cui l'equazione della lente diventa

$$\vec{\eta} = \frac{D_S}{D_L} \vec{\vartheta}_I - D_{LS} \vec{\alpha}(\vec{\xi}). \quad (5.50)$$

Per lenti dotate di simmetria assiale i vettori $\vec{\eta}$ e $\vec{\xi}$ giacciono sullo stesso piano, (individuato dai punti S, V e O nella figura 5.1) e l'espressione precedente si scrive in forma unidimensionale. Nel corso della discussione ci riferiremo all'equazione della lente scritta in termini di $\vec{\xi}$ e $\vec{\beta}$ o a quella scritta in termini di $\vec{\beta}$ e $\vec{\vartheta}_I$ in maniera equivalente, sfruttando quella che nel contesto specifico risulta conveniente.

Sottolineiamo ora due aspetti rilevanti dell'equazione della lente. Dal punto di vista matematico l'equazione scritta nella forma (5.50) stabilisce una corrispondenza $\varphi: \vec{\xi} \mapsto \vec{\eta}$ dal piano della lente al piano della sorgente. Questa corrispondenza è univocamente determinata dalla densità superficiale $\Sigma(\vec{\xi})$, poiché le distanze tra i piani che entrano in gioco si suppongono preassegnate. In generale la corrispondenza tra i piani è non lineare, perché tale è la funzione $\vec{\alpha}(\vec{\xi})$. Un caso particolare è quello di una lente con simmetria assiale e densità superficiale costante Σ , perché in tal caso l'equazione (5.50) è unidimensionale e diventa

$$\vec{\eta} = \left(\frac{D_S}{D_L} - 4\pi G \Sigma D_{LS} \right) \vec{\xi}. \quad (5.51)$$

Dal punto di vista fisico, invece, il problema principale consiste nell'individuare tutte le immagini che si producono data una configurazione del sistema che comprende la sorgente, la lente e l'osservatore. Tale richiesta si traduce con l'inversione della suddetta corrispondenza φ , che consiste nel risolvere l'equazione della lente in $\vec{\xi}$. In generale la corrispondenza è non lineare e, di conseguenza, lo è anche l'equazione della lente. Un'equazione non lineare possiede in generale più soluzioni e questo comporta che a un singolo valore di $\vec{\eta}$ corrispondono più valori di $\vec{\xi}$. In altri termini si producono immagini multiple della sorgente. Anche nel caso in cui l'equazione della lente è lineare è possibile che sia prodotta una moltitudine di immagini. Infatti, con riferimento all'equazione (5.51) si ha $\vec{\eta} = 0$ per qualunque valore di $\vec{\xi}$ quando la densità superficiale coincide con la densità superficiale critica Σ_{cr} , definita come

$$\Sigma_{cr} = \frac{1}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}. \quad (5.52)$$

Ciò significa che nel caso in cui la sorgente, la lente e l'osservatore sono allineati tutti i raggi ottici diretti sul piano della lente raggiungono l'osservatore.

Introducendo scale caratteristiche è possibile riscrivere l'equazione della lente in forma adimensionale. Per questo introduciamo la lunghezza caratteristica ξ_0 , che dipenderà dalle peculiarità della lente, e la corrispondente lunghezza caratteristica nel piano della sorgente $\eta_0 = \xi_0 D_S / D_L$. Si introducono quindi i vettori adimensionali

$$\vec{x} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}, \quad \vec{y} = \frac{\vec{\eta}}{\eta_0} \quad (5.53)$$

e l'angolo di deflessione riscaldato

$$\hat{\alpha}(\vec{x}) = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \vec{\alpha}(\xi_0 \vec{x}). \quad (5.54)$$

Sostituendo queste grandezze nell'equazione (5.50) si ottiene un'espressione compatta e adimensionale

$$\vec{y} = \vec{x} - \hat{\alpha}(\vec{x}). \quad (5.55)$$

Inoltre si definisce la densità superficiale adimensionale come

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{\Sigma(\vec{\xi})}{\Sigma_{cr}}, \quad (5.56)$$

sfruttando l'espressione della densità superficiale critica, data nella (5.52). Questa consente di riscrivere l'angolo di deflessione $\hat{\alpha}(\vec{x})$ in termini di grandezze adimensionali

$$\hat{\alpha}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \vec{x}' \kappa(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}. \quad (5.57)$$

Analogamente a quanto discusso in precedenza è possibile esprimere l'angolo di deflessione in termini del gradiente del potenziale di deflessione adimensionale, definito come

$$\tilde{\psi}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi} \int d^2 \vec{x}' \kappa(\vec{x}') \ln |\vec{x} - \vec{x}'|, \quad (5.58)$$

che è connesso al potenziale di deflessione $\psi(\vec{\xi})$ e soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla_x^2 \tilde{\psi}(\vec{x}) = 2\kappa(\vec{x}). \quad (5.59)$$

L'equazione della lente fin qui considerata vale in condizioni di campo gravitazionale debole, ma nelle regioni più vicine alla distribuzione puntiforme di massa si ha campo gravitazionale forte. In prossimità della sorgente gravitazionale le particelle possono anche percorrere traiettorie che ruotano attorno alla sorgente gravitazionale diverse volte prima di essere nuovamente emesse e produrre le immagini osservate. Tali immagini prendono il nome di *immagini relativistiche* che, seppure presentino caratteristiche per cui risultano difficilmente osservabili, in principio costituiscono un ottimo mezzo per investigare i sistemi fisici di questo tipo [46]. Per poter studiare il fenomeno della lente gravitazionale nei diversi regimi, piuttosto che fare riferimento alle equazioni precedentemente discusse, sfruttiamo il risultato ottenuto da Virbhadra e Ellis [7] per una lente puntiforme

$$\tan \beta = \tan \vartheta_I - \frac{D_{LS}}{D_S} [\tan \vartheta_I + \tan(\alpha - \vartheta_I)]. \quad (5.60)$$

D'ora in avanti, poiché la deflessione è studiata in presenza di una lente gravitazionale puntiforme, utilizzeremo quantità unidimensionali.

Occorre sottolineare che anche in questo caso l'equazione della lente non è derivata in maniera esatta, ma è anch'essa frutto di approssimazioni, seppure meno stringenti di quelle utilizzate nel caso dell'equazione della lente studiata in precedenza. L'equazione della lente di Virbhadra e Ellis vale, in particolare, fin tanto che il rapporto $D_{LS}/D_S > 0$. Per consistenza con la notazione usata nei capitoli precedenti reintroduciamo il parametro d'impatto in questo caso definito come

$$b = D_L \sin \vartheta_I. \quad (5.61)$$

A partire dalla (5.60) è possibile definire diverse grandezze che quantificano gli effetti peculiari del fenomeno della lente gravitazionale. Poiché l'equazione della lente è data in termini dell'angolo

di deflessione è possibile sfruttare i risultati ottenuti nei capitoli 2 e 3 utilizzando l'approccio semi-classico. All'ordine principale dello sviluppo perturbativo, come già studiato, si ottiene un andamento analogo a quanto previsto classicamente, ma l'aspetto più interessante consiste nell'analizzare l'espressione dell'angolo di deflessione data al primo ordine nello sviluppo perturbativo delle correzioni quantistiche.

5.3 Le immagini e il fattore di amplificazione

Finora si è discussa la deflessione di un singolo raggio ottico per la presenza della lente gravitazionale, ma quello che si osserva è un fascio emesso da una sorgente astronomica. Ogni raggio ottico viene deflesso in funzione della distanza che intercorre tra il raggio e la lente nel piano della lente. Questo implica che non solo il fascio è globalmente deflesso, ma subisce anche una deflessione differenziale che genera una variazione della sezione del fascio. Il fenomeno della lente gravitazionale quindi, oltre a produrre immagini multiple di una singola sorgente, ne modifica la superficie. Ciò comporta che la luminosità apparente di un'immagine risulta differente da quella della sorgente.

Per quantificare la variazione della sezione del fascio emesso dalla sorgente occorre fare riferimento alla corrispondenza che si stabilisce tra il piano della lente e quello della sorgente tramite l'equazione della lente. Consideriamo la forma adimensionale dell'equazione (5.55). A un elemento infinitesimo $\Delta\vec{x}$ nel piano della lente corrisponde un elemento infinitesimo

$$\Delta\vec{y} = \vec{y}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{y}(\vec{x}) \quad (5.62)$$

nel piano della sorgente e si ha, indicando con gli indici le due componenti dei vettori bidimensionali,

$$\Delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Delta x_j. \quad (5.63)$$

A una superficie infinitesima ΔA_I nel piano della lente corrisponde una superficie infinitesima ΔA_S nel piano della sorgente data da

$$\Delta A_S = \left(\frac{D_S}{D_L} \right)^2 \det \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right| \Delta A_I. \quad (5.64)$$

La variazione della sezione del fascio è quindi descritta a partire dal determinante della matrice jacobiana associata alla corrispondenza φ definita dall'equazione della lente. Poniamo quindi

$$\mathcal{J}_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}. \quad (5.65)$$

Sfruttando l'equazione della lente (5.55) e il fatto che l'angolo di deflessione adimensionale possa essere scritto come il gradiente del potenziale di deflessione adimensionale la forma esplicita dello jacobiano diventa

$$\mathcal{J}_{ij}(\vec{x}) = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (5.66)$$

Il potenziale di deflessione, quindi, non solo determina l'andamento del singolo raggio ottico, ma anche la variazione globale del fascio luminoso.

Convenzionalmente la matrice $\mathcal{J}(\vec{x})$ viene scritta come

$$\mathcal{J}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa(\vec{x}) - \gamma_1(\vec{x}) & -\gamma_2(\vec{x}) \\ -\gamma_2(\vec{x}) & 1 - \kappa(\vec{x}) + \gamma_1(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (5.67)$$

dove i termini introdotti sono definiti da

$$\kappa(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.68)$$

$$\gamma_1(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.69)$$

$$\gamma_2(\vec{x}) = \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (5.70)$$

In particolare $\kappa(\vec{x})$ è chiamata *convergenza* e corrisponde alla densità superficiale adimensionale, γ_1 e γ_2 sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di quello che prende il nome di *shear*

$$\gamma(\vec{x}) = \gamma_1(\vec{x}) + i\gamma_2(\vec{x}). \quad (5.71)$$

Poiche la matrice $\mathcal{J}(\vec{x})$ è una matrice 2×2 i suoi autovalori si possono calcolare a partire dal determinante e dalla traccia della stessa. Si trova che tali autovalori sono

$$j_{\pm}(\vec{x}) = 1 - \kappa(\vec{x}) \pm |\gamma(\vec{x})|. \quad (5.72)$$

Consideriamo la variazione della luminosità prodotta dal campo gravitazionale. L'intensità del fascio luminoso osservata si indica con I_{ν} , dove ν indica la frequenza ed è associata alla brillantezza superficiale B_{ν}

$$B_{\nu} = \frac{dE}{d\nu dt d\Omega dA}, \quad (5.73)$$

definita come la variazione infinitesima di energia E nell'intervallo infinitesimo di tempo dt , nell'angolo solido infinitesimo $d\Omega$, nell'area dA e nell'intervallo di frequenza $d\nu$. Il fenomeno della lente gravitazionale produce immagini caratterizzate dalla stessa brillantezza della sorgente. La luminosità apparente della sorgente è allora

$$\mathcal{F}_S = B_{\nu} \delta\Omega_S, \quad (5.74)$$

dove $\delta\Omega_S$ è l'angolo solido sotteso dalla sorgente. Analogamente la luminosità apparente di un'immagine I è data da

$$\mathcal{F}_I = B_{\nu} \delta\Omega_I. \quad (5.75)$$

Si definisce dunque il fattore di amplificazione μ di una generica immagine I come il rapporto tra la sua luminosità apparente e quella della sorgente

$$\mu = \frac{\mathcal{F}_I}{\mathcal{F}_S} \quad (5.76)$$

e per le precedenti si ha

$$\mu = \frac{\delta\Omega_I}{\delta\Omega_S}. \quad (5.77)$$

Esprimendo gli angoli solidi con grandezze legate a sorgente, lente e osservatore troviamo

$$\mu = \left(\frac{D_S}{D_L} \right)^2 \frac{\delta A_I}{\delta A_S} \quad (5.78)$$

e sfruttando la (5.64) si scrive

$$\mu(\vec{x}) = \frac{1}{\det \mathcal{J}(\vec{x})}. \quad (5.79)$$

A partire dall'espressione esplicita dello jacobiano (5.67) si ha

$$\mu(\vec{x}) = \frac{1}{(1 - \kappa(\vec{x}))^2 - |\gamma(\vec{x})|^2}, \quad (5.80)$$

che mostra come il fattore di amplificazione di un'immagine è determinato dalla convergenza e dal modulo dello shear.

In questo contesto un ruolo particolarmente rilevante è svolto dai *punti critici*, appartenenti al piano della lente e definiti dalla condizione

$$\det \mathcal{J}(\vec{x}) = 0. \quad (5.81)$$

L'insieme di tutti i punti critici delinea la *curva critica* nel piano della lente. Il fattore di amplificazione in corrispondenza dei punti critici diverge e questo effetto è sintomatico del fatto che l'approssimazione dell'ottica geometrica costituisce una descrizione non adeguata nell'intorno di tali punti. Seppure non divergente, l'amplificazione reale risulta estremamente elevata in prossimità delle curve critiche. Nonostante quindi l'angolo di deflessione sia molto piccolo è possibile che si producano effetti estremamente evidenti per la presenza della lente gravitazionale nelle suddette regioni.

Nel caso particolare di simmetria assiale si trova che le curve critiche sono due circonferenze: la circonferenza critica *tangenziale*, detta anche *anello di Einstein*, e la circonferenza critica *radiale*. La circonferenza critica tangenziale permette di definire il *raggio di Einstein*, in corrispondenza del quale la densità superficiale media coincide con quella critica (5.52) ed è dato da

$$1 = \frac{\bar{\Sigma}}{\Sigma_{\text{cr}}} = \frac{M}{\pi R_E^2 \Sigma_{\text{cr}}} \implies R_E = \sqrt{4GM \frac{D_L D_{LS}}{D_S}}. \quad (5.82)$$

Il raggio di Einstein è una lunghezza caratteristica del sistema della lente gravitazionale e pertanto possiamo scegliere il parametro ξ_0 pari a R_E , rendendo così adimensionali le lunghezze nel piano della lente. A partire dal raggio di Einstein si definisce l'angolo caratteristico ϑ_E , rispetto al quale si possono riscalarare gli angoli che entrano nella trattazione

$$\vartheta_E = \frac{R_E}{D_L}. \quad (5.83)$$

La continuità della funzione $\det \mathcal{J}(\vec{x})$ permette una suddivisione del piano della lente rispetto alle curve critiche in regioni in cui tale funzione ha un segno definito. Questo aspetto permette di introdurre il concetto di *parità* positiva, se $\det \mathcal{J}(\vec{x}) > 0$ e negativa se $\det \mathcal{J}(\vec{x}) < 0$. Un'immagine che non contiene punti critici si dice *ordinaria* e risulta completamente contenuta in una delle due regioni e con parità assegnata. Nelle regioni molto lontane dalla lente nel suo piano si ha $\det \mathcal{J}(\vec{x}) > 0$ e compare una sola immagine, perché l'effetto del lensing è poco rilevante. Se questa condizione valesse ovunque, la corrispondenza φ tra gli elementi del piano della lente e quelli del piano della sorgente risulterebbe completamente invertibile e non esisterebbero immagini multiple. Perché si producano immagini multiple occorre che esista almeno un punto nel piano in cui lo jacobiano sia negativo. Data la continuità della funzione questo implicherebbe che la stessa si annulla in qualche punto del piano, i punti critici. Le immagini multiple e i punti critici sono due effetti dello stesso fenomeno che prende il nome di *lensing forte*. Si parla di *lensing debole* in assenza di immagini multiple.

Alle curve critiche nel piano della lente corrispondono le *caustiche* nel piano della sorgente. Tutta la discussione svolta per le curve critiche vale anche per le caustiche. In particolare, seppure la deflessione sia estremamente piccola, una sorgente sufficientemente vicina a una caustica subisce un'amplificazione considerevole. Quando la sorgente è esterna a tutte le caustiche si ha una singola

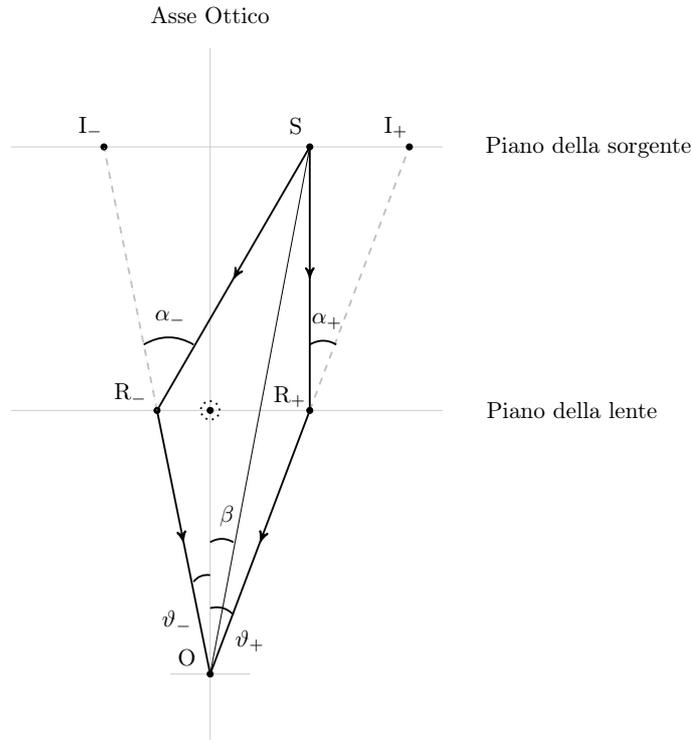


Figura 5.2: Rappresentazione della formazione delle immagini primaria e secondaria in un tipico fenomeno di lensing gravitazionale nel caso in cui sorgente, lente e osservatore giacciono sullo stesso piano. I due raggi ottici considerati sono emessi dalla sorgente S e raggiungono l'osservatore O dopo essere deflessi dalla lente posta al centro della figura. Il prolungamento dei raggi ottici che raggiungono l'osservatore individuano le posizioni delle immagini primaria e secondaria, indicate rispettivamente da I_+ e I_- . Con β si indica la posizione angolare della sorgente, i punti R_+ e R_- sono i punti di intersezione dei raggi ottici nella proiezione del piano della lente, gli angoli α_+ e α_- sono gli angoli di deflessione e ϑ_+ e ϑ_- sono rispettivamente le posizioni angolari delle immagini primaria e secondaria. Sottolineiamo che gli angoli rappresentati sono esageratamente grandi.

immagine. Questa situazione corrisponde a dire che la sorgente risulta estremamente lontana dalla proiezione del baricentro della lente sul piano della sorgente. Se invece la sorgente si avvicina a tale proiezione il numero delle immagini aumenta di due ogni volta che attraversa una caustica.

L'equazione della lente da analizzare non è un'equazione lineare e pertanto a diversi valori che individuano la posizione angolare della sorgente β corrispondono differenti valori che individuano la posizione angolare dell'immagine ϑ_1 . Senza considerare la formazione di immagini relativistiche, quindi considerando particelle che passano non troppo in prossimità alla lente gravitazionale, si ha la formazione di due immagini che chiamiamo primaria e secondaria, come mostrato nella figura 5.2. L'immagine primaria si forma nella parte di piano che contiene la sorgente rispetto all'asse ottico, mentre l'immagine secondaria si forma nella regione che non contiene la sorgente. Convenzionalmente gli angoli che rappresentano le posizioni angolari della sorgente e delle immagini prodotte hanno segno positivo se si formano nella regione che contiene la sorgente (rispetto all'asse ottico) e negativo altrimenti. Nel caso in questione quindi β e ϑ_+ hanno segno positivo, mentre ϑ_- ha segno negativo.

L'equazione della lente, nel caso in cui questa sia sottile e puntiforme, assume una forma

particolarmente semplice supponendo valida l'approssimazione classica

$$\alpha = \frac{4GM}{b}, \quad (5.84)$$

con $b \simeq \vartheta_I D_L$ e si può scrivere coinvolgendo l'angolo di Einstein come

$$\beta = \vartheta_I - \frac{\vartheta_E^2}{\vartheta_I}. \quad (5.85)$$

Risolvendo questa equazione rispetto a ϑ_I troviamo le posizioni delle immagini primaria e secondaria che indichiamo rispettivamente con ϑ_+ e ϑ_-

$$\vartheta_{\pm} = \frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 + 4\vartheta_E^2}. \quad (5.86)$$

Il risultato (5.85) costituisce il punto di partenza per un'estensione che includa le correzioni radiative ottenute nei capitoli precedenti.

5.4 L'equazione radiativa della lente gravitazionale

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto l'equazione lineare della lente sottile e quella non lineare di Virbhadra e Ellis e abbiamo ricavato alcune relazioni utili per descrivere il fenomeno del lensing gravitazionale, quali la posizione delle immagini primaria e secondaria e il fattore di ingrandimento. Possiamo, dunque, intraprendere uno studio degli effetti quantistici, estendendo i risultati classici della relatività generale e definendo una equazione radiativa della lente gravitazionale. A questo proposito, le correzioni radiative elettrodeboli studiate nel capitolo 4 costituiscono il punto di partenza della nostra analisi. Infatti, nel contesto del formalismo semi-classico che abbiamo adottato, il parametro d'impatto che caratterizza il fascio deflesso è legato all'angolo per mezzo della sezione d'urto, secondo la (3.48). Ma per poter studiare le equazioni della lente gravitazionale si ha la necessità di invertire la relazione in modo da ricavare l'angolo di deflessione in funzione del parametro d'impatto.

Delineiamo, quindi, uno schema per ottenere α in funzione di b_h . Per esempio, richiamiamo lo sviluppo (3.50) per piccoli angoli di deflessione del neutrino

$$b_{h,\nu}(\alpha) = \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{6}(1 + \log 8 - 3 \log \alpha) + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (5.87)$$

da cui si ricava

$$\alpha = \left(\frac{b_{h,\nu}}{2} - \frac{\alpha}{12}(1 + \log 8 - 3 \log \alpha) \right)^{-1}. \quad (5.88)$$

Poiché consideriamo uno sviluppo a piccoli valori di α ed equivalentemente a grandi valori di $b_{h,\nu}$ sostituiamo ad α al secondo membro il valore approssimato $\alpha_0 \equiv 4GM/b_\nu = 2/b_{h,\nu}$ derivato nella (3.40). In questo modo è possibile definire una procedura iterativa basata sul metodo del punto fisso, in cui la condizione iniziale è α_0 e i termini successivi sono dati da

$$\alpha_{i+1} = \left(\frac{b_{h,\nu}}{2} - \frac{\alpha_i}{12}(1 + \log 8 - 3 \log \alpha_i) \right)^{-1}. \quad (5.89)$$

Sfruttando questo schema e sviluppando in serie di Taylor rispetto a $1/b_{h,\nu}$ per grandi valori di $b_{h,\nu}$ otteniamo l'espressione di α

$$\alpha = \frac{2}{b_{h,\nu}} - \frac{2}{b_{h,\nu}^3} \left(\log b_{h,\nu} + \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{b_{h,\nu}^5} \left(\log^2 b_{h,\nu} - \frac{1}{5} \right) + \mathcal{O}(1/b_{h,\nu}^7). \quad (5.90)$$

Analogamente procediamo per il fotone. Partiamo dallo sviluppo (3.52)

$$b_{h,\gamma}(\alpha) = \frac{2}{\alpha} + \alpha \left(\frac{1}{12} - \log 2 + \log \alpha \right) + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad (5.91)$$

e considerando lo schema iterativo precedentemente descritto si ha

$$\alpha = \frac{2}{b_{h,\gamma}} + \frac{1}{b_{h,\gamma}^3} \left(\frac{1}{3} - 4 \log b_{h,\gamma} \right) + \frac{1}{b_{h,\gamma}^5} \left(-\frac{17}{20} - 10 \log b_{h,\gamma} + 12 \log^2 b_{h,\gamma} \right) + \mathcal{O}(1/b_{h,\gamma}^7). \quad (5.92)$$

Questo approccio può essere esteso includendo gli effetti radiativi calcolati in teoria perturbativa elettrodebole o, se necessario, le correzioni post-Newtoniane che discuteremo nel capitolo successivo. I termini logaritmici che compaiono nelle equazioni precedenti sono un risultato caratteristico dell'approccio semi-classico, mentre sono assenti nella formula classica della deflessione.

Infatti lo studio classico della deflessione permette di determinare direttamente l'angolo in funzione del parametro d'impatto, la cui soluzione esatta è scritta in termini dell'integrale ellittico (3.37). Questa espressione può essere sviluppata in una serie di potenze di $1/b_h$, per b_h grande, come

$$\alpha = \frac{a_1}{b_h} + \frac{a_2}{b_h^2} + \frac{a_3}{b_h^3} + \frac{a_4}{b_h^4} + \frac{a_5}{b_h^5} + \dots, \quad (5.93)$$

dove i coefficienti a_i sono

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{15}{16}\pi, \quad a_3 = \frac{16}{3}, \quad a_4 = \frac{3465}{1024}\pi, \quad a_5 = \frac{112}{5}. \quad (5.94)$$

L'aggiunta dei termini di ordine superiore risulta importante nel caso di lensing forte [47, 12] e fornisce una semplice generalizzazione dell'approccio classico standard al problema della deflessione. Da un confronto tra le espressioni di α nelle (5.90), (5.92) e (5.93) possiamo scrivere un'espressione di carattere generale dello sviluppo di α

$$\alpha = \frac{2}{b_h} + \sum_{k=1} \frac{a_{2k}}{b_h^{2k}} + \sum_{k=1} \frac{1}{b_h^{2k+1}} (a_{2k+1} + d_0 \log b_h + d_1 \log^2 b_h + \dots). \quad (5.95)$$

In particolare osserviamo che l'espressione classica di α si riproduce con i coefficienti $d_i = 0$, mentre quelle determinate a partire dalla formulazione semi-classica contengono termini logaritmici e non prevedono la comparsa di potenze pari in $1/b_h$. Queste due proprietà costituiscono un'interessante differenza tra i due tipi di approcci che appare evidente già a livello Born, prima di includere le correzioni radiative.

Risulta quindi chiaro che una prima estensione dell'equazione della lente discussa in questo capitolo, rimanendo nel contesto classico della relatività generale, consiste nel considerare lo sviluppo di α classico in potenze $1/b^n$ definito in (5.93). A partire dall'equazione della lente (5.85) e sfruttando lo sviluppo (5.93) si ha quindi

$$\beta = \vartheta_I - \frac{\vartheta_E^2}{\vartheta_I} - \sum_{n \geq 2} \frac{\vartheta_E^{(n)}}{\vartheta_I^n}, \quad (5.96)$$

con

$$\vartheta_E^{(n)} = r_S^n a_n \frac{D_{LS}}{D_S D_L^n}, \quad (5.97)$$

dove abbiamo usato l'approssimazione a piccoli angoli, $b_h \simeq \vartheta_I D_L$, e i coefficienti a_n sono definiti nelle equazioni (5.94).

Nell'ambito dell'approccio semi-classico, la comparsa di termini logaritmici modifica profondamente la struttura della (5.96) e l'equazione della lente sottile è data dalla formula generale

$$\beta = \vartheta_I - \alpha \frac{D_{LS}}{D_S}, \quad (5.98)$$

dove l'angolo di deflessione α assume la forma data nella (5.95). In questo caso i coefficienti a_i e d_i sono ottenuti dalla relazione di inversione del parametro d'impatto, calcolato con la formula semi-classica (3.48) che lo lega alla sezione d'urto di diffusione. Nel caso specifico del neutrino o del fotone, le relazioni in questione sono rispettivamente le (5.90) e (5.92).

Se le sezioni d'urto del neutrino e del fotone sono calcolate all'ordine principale, i coefficienti a_i e d_i della (5.95) sono costanti e non dipendono dall'energia. Per tenere conto degli effetti quantistici fino al primo ordine perturbativo in teoria elettrodebole occorre utilizzare i risultati ottenuti nel capitolo 4. Si ottiene dunque un'equazione radiativa della lente gravitazionale sottile

$$\beta = \vartheta_I - \alpha(E) \frac{D_{LS}}{D_S}, \quad (5.99)$$

la cui peculiarità è nella dipendenza dall'energia dell'angolo di deflessione $\alpha(E)$ della particella diffusa, assente sia nella formulazione classica che in quella semi-classica all'ordine principale.

In generale l'equazione radiativa della lente deve essere studiata ricorrendo a metodi numerici a causa della complessità della sezione d'urto a un loop. Ma nel limite di piccoli momenti trasferiti, $-q^2 \ll m_W^2$, i fattori di forma che definiscono le correzioni radiative assumono un'espressione più semplice ed è possibile derivare una formula esplicita del parametro d'impatto in funzione dell'angolo di deflessione. Ad esempio, nel caso del neutrino, utilizzando gli sviluppi (4.47) e (4.48) e, dunque, la sezione d'urto (4.84), si ottiene

$$\begin{aligned} b_{h,\nu}^2(E, \alpha) = & \left[-1 + \csc^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \log \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] + C_1(E) \left[1 + \cos \alpha + 4 \log \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ & + C_2(E) \cos^4 \frac{\alpha}{2} + 20 D_2(E) \log \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right) - 4 F_2(E) \cos \alpha \\ & - 2 D_2(E) (4 \cos \alpha + \cos 2\alpha) \log \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - G_2(E) \cos 2\alpha - E_2(E), \end{aligned} \quad (5.100)$$

dove abbiamo esplicitamente evidenziato la dipendenza dall'energia dei coefficienti C_1 , C_2 , E_2 , F_2 e G_2 riportati in appendice D. La relazione precedente può essere invertita nel limite di piccoli angoli seguendo la procedura delineata sopra ricavando

$$\alpha(E) = \frac{2}{b_{h,\nu}} - \frac{1}{b_{h,\nu}^3} \left((2 + 4C_1(E)) \log b_{h,\nu} + \mathcal{A}(E) \right) + \mathcal{O}(1/b_{h,\nu}^5), \quad (5.101)$$

con

$$\mathcal{A}(E) = -2C_1(E) - C_2(E) + E_2(E) + 4F_2(E) + G_2(E) + \frac{2}{3}. \quad (5.102)$$

Come abbiamo già discusso, l'equazione della lente proposta da Virbhadra e Ellis è più generale dell'equazione della lente sottile, perché permette di studiare il fenomeno del lensing gravitazionale anche in condizioni di campo gravitazionale forte, in cui fotoni e neutrini sono prossimi alla sfera fotonica e ruotano attorno alla lente gravitazionale, producendo diverse immagini chiamate *relativistiche*. L'equazione in presenza di un angolo di deflessione dipendente dall'energia è modificata come segue

$$D_S \tan \beta = D_S \tan \vartheta_I - D_{LS} (\tan \vartheta_I + \tan(\alpha(E) - \vartheta_I)). \quad (5.103)$$

Con quanto fin qui introdotto possiamo intraprendere uno studio della fenomenologia del lensing gravitazionale includendo anche gli effetti delle correzioni radiative.

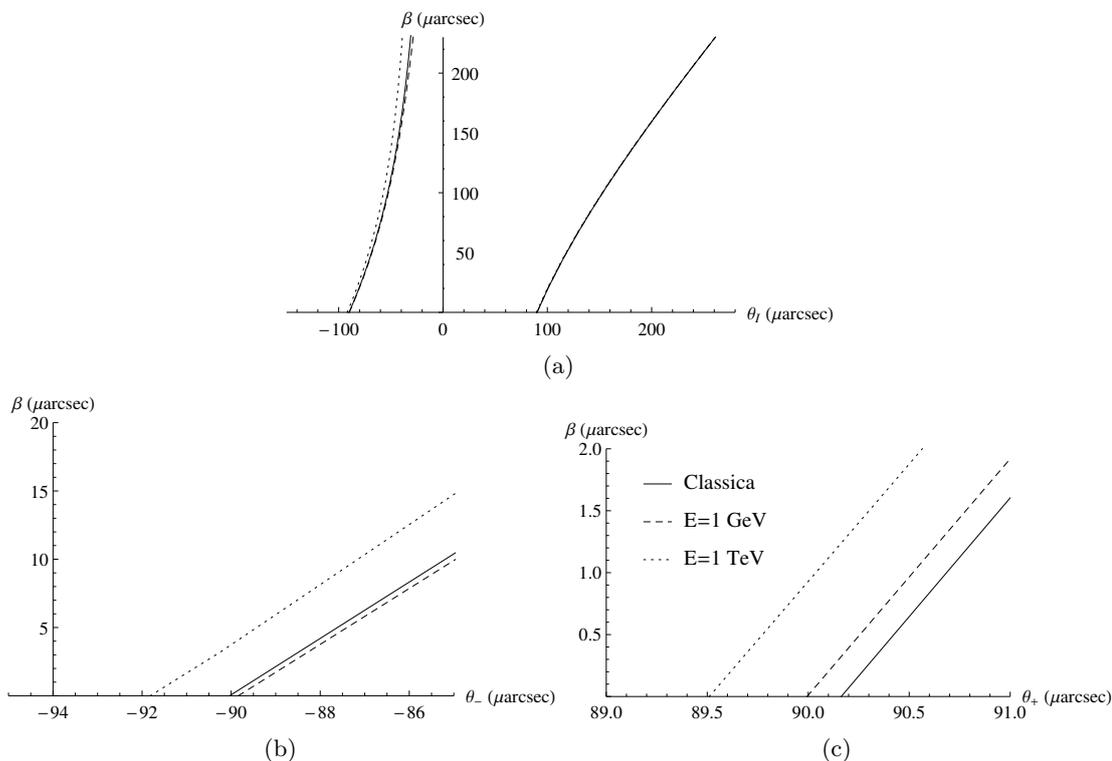


Figura 5.3: La posizione angolare della sorgente fotonica β in funzione della posizione dell'immagine ϑ_I per una lente gravitazionale di massa $M = 10^6 M_\odot$ posta a distanza $D_L = 10$ kpc dall'osservatore e $D_S = 11$ kpc. Le tre curve riportate corrispondono agli andamenti prodotti usando l'equazione di Virbhadra-Ellis (Classica) e la stessa equazione in cui sono incluse le correzioni radiative per valori di energia $E = 1$ GeV e 1 TeV. In (a) l'immagine primaria si individua nella regione di piano in cui β e ϑ_I sono entrambi positivi, la secondaria per valori di ϑ_I negativi. In (b) e (c) sono mostrati gli andamenti delle stesse funzioni per l'immagine secondaria ϑ_- e primaria ϑ_+ rispettivamente. Si osserva un discostamento più evidente per gli andamenti delle funzioni per l'immagine secondaria.

Un punto importante da sottolineare è che il lensing gravitazionale non comporta alcun effetto di assorbimento o emissione di energia. Quindi anche nel caso in cui l'angolo di deflessione dipende dall'energia della particella incidente, la stessa non varia per l'interazione con il campo gravitazionale. Questo permette di usare le relazioni descritte nel formalismo generale della lente gravitazionale, con particolare attenzione al fattore di amplificazione.

5.5 Il lensing del neutrino e del fotone: l'analisi numerica

Per il caso del fotone e del neutrino sono stati graficati gli andamenti delle funzioni che descrivono la posizione della sorgente β in termini della posizione dell'immagine ϑ_I a partire dalla lente di Virbhadra ed Ellis.

Nella figura 5.3 sono riportati i risultati per un fascio di fotoni proveniente da una sorgente posta a distanza $D_S = 11$ kpc dall'osservatore deflesso da una lente gravitazionale con massa $M = 10^6 M_\odot$, posta a distanza $D_L = 10$ kpc dall'osservatore. Le tre curve rappresentate sono rispettivamente ottenute considerando l'equazione "classica" della lente e l'equazione che include

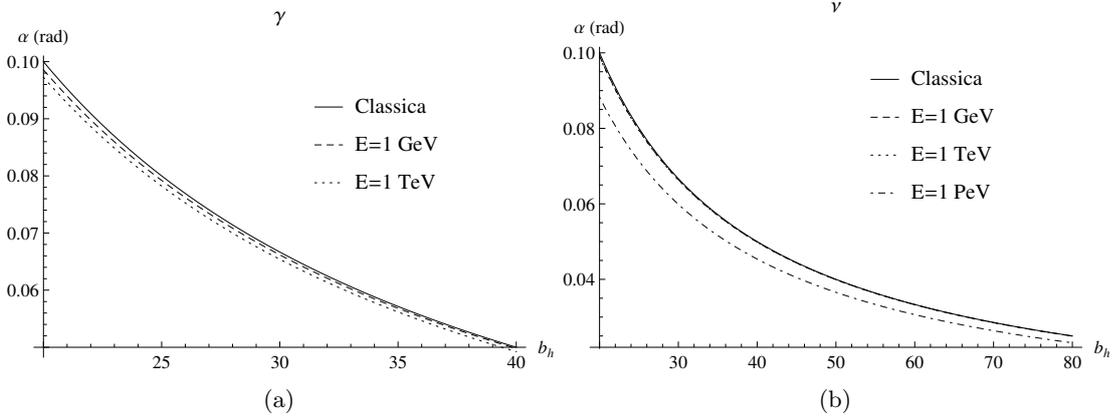


Figura 5.4: L'andamento dell'angolo di deflessione α in funzione del parametro d'impatto in unità di orizzonti b_h per il caso del fotone (a) e del neutrino (b). Le curve rappresentano la soluzione classica e le funzioni prodotte includendo le correzioni radiative e presentate per diversi valori dell'energia.

le correzioni radiative per valori di energia $E = 1 \text{ GeV}$ e 1 TeV . In (a) è graficata la funzione rispetto a un intervallo di posizioni angolari per le immagini che comprende valori positivi e negativi. Quello che si osserva è che all'aumentare della distanza della sorgente dall'asse ottico, rappresentata da β , l'immagine primaria, corrispondente alla parte di grafico nel primo quadrante, si allontana "seguendo" β , mentre la secondaria, nel secondo quadrante, si avvicina all'asse ottico. I punti in cui le curve intersecano l'asse delle ascisse corrispondono all'angolo di Einstein, corrispondenti alle posizioni angolari delle immagini per la configurazione in cui sorgente lente e osservatore sono allineati sull'asse ottico. Si osserva un discostamento per le funzioni con le correzioni radiative rispetto alla relazione classica evidente per le immagini secondarie, soprattutto per posizioni angolari ϑ_- in modulo piccole, come ci aspettavamo (si vedano i grafici 5.4). Infatti, le posizioni angolari sono determinate a partire dal parametro d'impatto $b = D_L \sin \vartheta_I$, i cui discostamenti maggiori si osservano per piccoli valori. Tra le due immagini la secondaria è quella che più si può avvicinare all'asse ottico (b piccolo) e pertanto si producono discostamenti più evidenti in questa regione. Nelle immagini (b) e (c) sono rappresentate le stesse curve su intervalli più piccoli per l'immagine secondaria ϑ_- e primaria ϑ_+ rispettivamente. In entrambi i casi si denota un impatto maggiore delle correzioni radiative per energie maggiori. Tuttavia, come si può osservare dagli intervalli scelti per graficare gli andamenti, i discostamenti per l'immagine primaria sono dell'ordine di decimi di μarcsec .

Un altro aspetto rilevante nel contesto del lensing gravitazionale è legato al fattore di amplificazione μ . Per graficare questa grandezza abbiamo usato la relazione [46]

$$\mu = \mu_t \mu_r, \quad (5.104)$$

dove μ_t si riferisce al fattore di amplificazione tangenziale, μ_r al fattore di amplificazione radiale, rispettivamente definiti come

$$\mu_t = \left(\frac{\sin \beta}{\sin \vartheta_I} \right)^{-1} \quad \mu_r = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \vartheta_I} \right)^{-1}. \quad (5.105)$$

I punti in cui i fattori di amplificazione divergono corrispondono alle curve critiche tangenziali e radiali nel piano della lente e alle caustiche tangenziali e radiali nel piano della sorgente. Il fattore di amplificazione può anche essere usato per assegnare la parità delle immagini: $\mu > 0$ per immagini primarie, $\mu < 0$ per immagini secondarie.

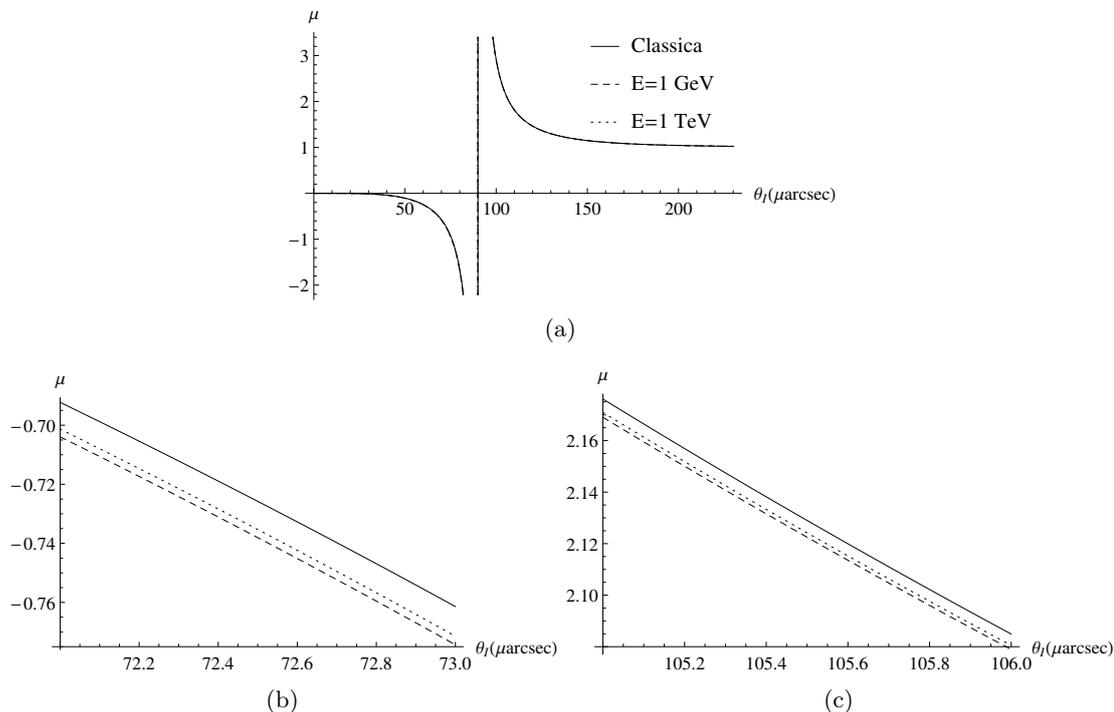


Figura 5.5: Il fattore di amplificazione μ per una sorgente fotonica in funzione della posizione dell'immagine ϑ_I per una lente gravitazionale di massa $M = 10^6 M_\odot$ posta a distanza $D_L = 10$ kpc dall'osservatore, con la sorgente a $D_S = 11$ kpc. In (a) l'andamento per la primaria si individua nella regione di piano in cui μ è positivo, la secondaria per valori di μ negativi. In (b) e (c) sono mostrati gli andamenti delle stesse funzioni per l'immagine secondaria e primaria rispettivamente. Anche in questo caso osserviamo un discostamento più evidente per gli andamenti delle funzioni per l'immagine secondaria.

Nella figura 5.5 si presentano gli andamenti del fattore di amplificazione per fotoni emessi da una sorgente a $D_S = 11$ kpc, deflessi da una lente a $D_L = 10$ kpc caratterizzata da una massa $M = 10^6 M_\odot$. Le tre curve rappresentate sono relative alla relazione priva di correzioni radiative (Classica) e alle funzioni che includono le correzioni per valori di energia del fascio di fotoni pari a $E = 1$ GeV e 1 TeV. In (a) è rappresentato l'andamento di μ in termini dell'angolo ϑ_I . Riconosciamo la parte relativa all'immagine primaria dai valori positivi di μ e la secondaria da quelli negativi. Per l'immagine primaria il fattore di amplificazione è sempre maggiore dell'unità, con la conseguenza che tale immagine produce sempre un ingrandimento della sorgente. In corrispondenza dell'angolo di Einstein si osserva la divergenza e il fattore di amplificazione diventa formalmente infinito. Per angoli molto grandi invece la funzione si assesta attorno all'unità, con la conseguenza che l'immagine non produce un ingrandimento della sorgente. Il fattore di amplificazione per l'immagine secondaria, invece, può assumere anche valori compresi tra 0 e 1, con la conseguenza che in questa regione l'immagine presenta un rimpicciolimento della sorgente. La situazione cambia quando si è in prossimità dell'angolo di Einstein, per cui si ha un ingrandimento anche per l'immagine secondaria. Questo comporta che se la sorgente è molto distante dall'asse ottico l'immagine secondaria risulta pressoché invisibile e infatti questa configurazione corrisponde al regime di weak lensing, in cui si osserva solo l'immagine primaria che, come abbiamo precedentemente osservato, non produce un ingrandimento della sorgente.

Analogamente possiamo considerare una sorgente che emette un fascio di neutrini. Nella

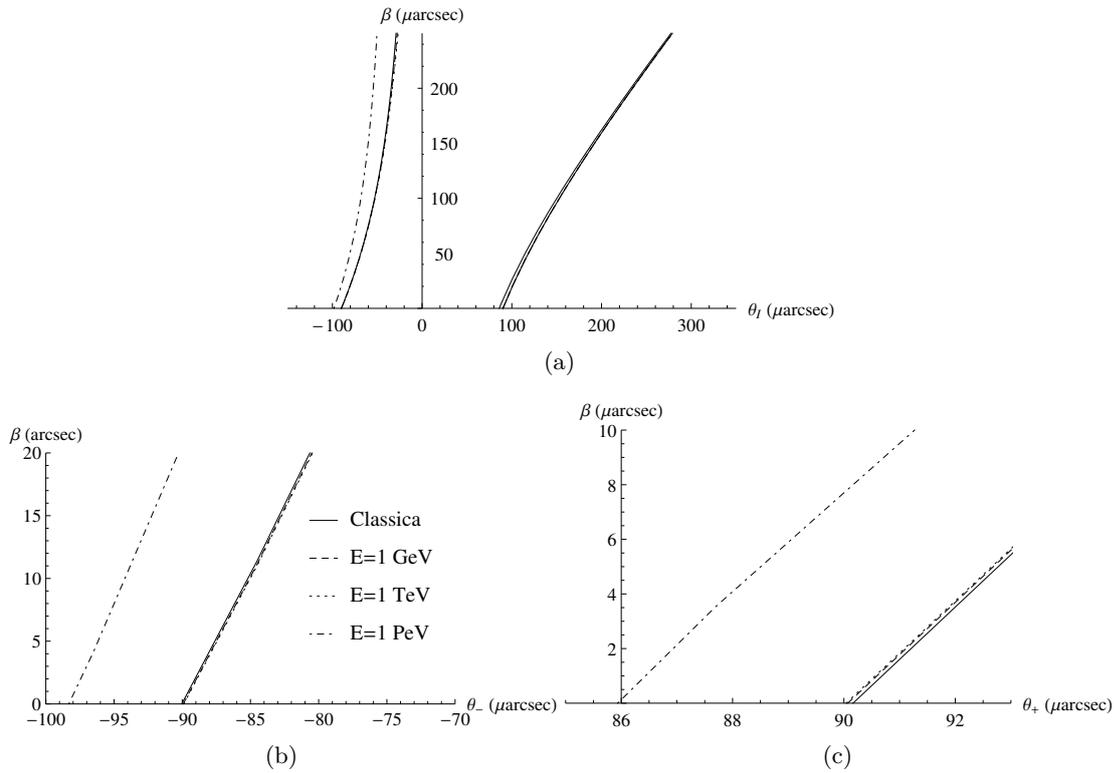


Figura 5.6: La posizione angolare della sorgente neutrिनica β in funzione della posizione dell'immagine ϑ_I per una lente gravitazionale di massa $M = 10^6 M_\odot$ posta a distanza $D_L = 10$ kpc dall'osservatore e $D_S = 11$ kpc. Le quattro curve riportate corrispondono agli andamenti prodotti usando l'equazione di Virbhadra-Ellis (Classica) e la stessa equazione in cui sono incluse le correzioni radiative per valori di energia del fascio di neutrini $E = 1$ GeV, 1 TeV e 1 PeV. In (a) l'immagine primaria si individua nella regione di piano in cui β e ϑ_I sono entrambi positivi, la secondaria per valori di ϑ_I negativi. In (b) e (c) sono mostrati gli andamenti delle stesse funzioni per l'immagine secondaria ϑ_- e primaria ϑ_+ rispettivamente. Osserviamo un discostamento più evidente per gli andamenti delle funzioni per l'immagine secondaria, ma anche per la primaria per un fascio con energia 1 PeV la funzione risulta significativamente discostarsi da quelle prodotte con energie minori e dalla classica.

figura 5.6 sono riportati gli andamenti della posizione della sorgente β in funzione della posizione angolare delle immagini ϑ_I per una sorgente neutrिनica posta a $D_S = 11$ kpc e una lente a $D_L = 10$ kpc, con massa $M = 10^6 M_\odot$. Ritroviamo gli stessi aspetti discussi nel caso del fotone, con la differenza che per un fascio di neutrini di energia $E = 1$ PeV il discostamento è molto evidente e quindi in particolare in questo caso l'impatto delle correzioni radiative può essere considerato rilevante, almeno in termini di questa prima analisi qualitativa.

Nella figura 5.7 sono riportati gli andamenti del fattore di amplificazione in funzione della posizione dell'immagine ϑ_I nel caso in cui la sorgente emette fasci di neutrini.

Il risultato più rilevante dell'analisi qui presentata consiste nella dipendenza dall'energia dell'angolo di deflessione, dell'equazione della lente e del fattore di amplificazione. Tale dipendenza risulta più marcata per piccoli valori del parametro d'impatto che, nel contesto della geometria della lente gravitazionale, possono essere legati solo all'immagine secondaria. Tuttavia dallo studio dei fattori di amplificazione si deduce che quando si verifica questa circostanza l'immagine secondaria risulta pressoché invisibile, perché in tal caso la sorgente è piuttosto lontana dall'asse ottico. Ciò non di

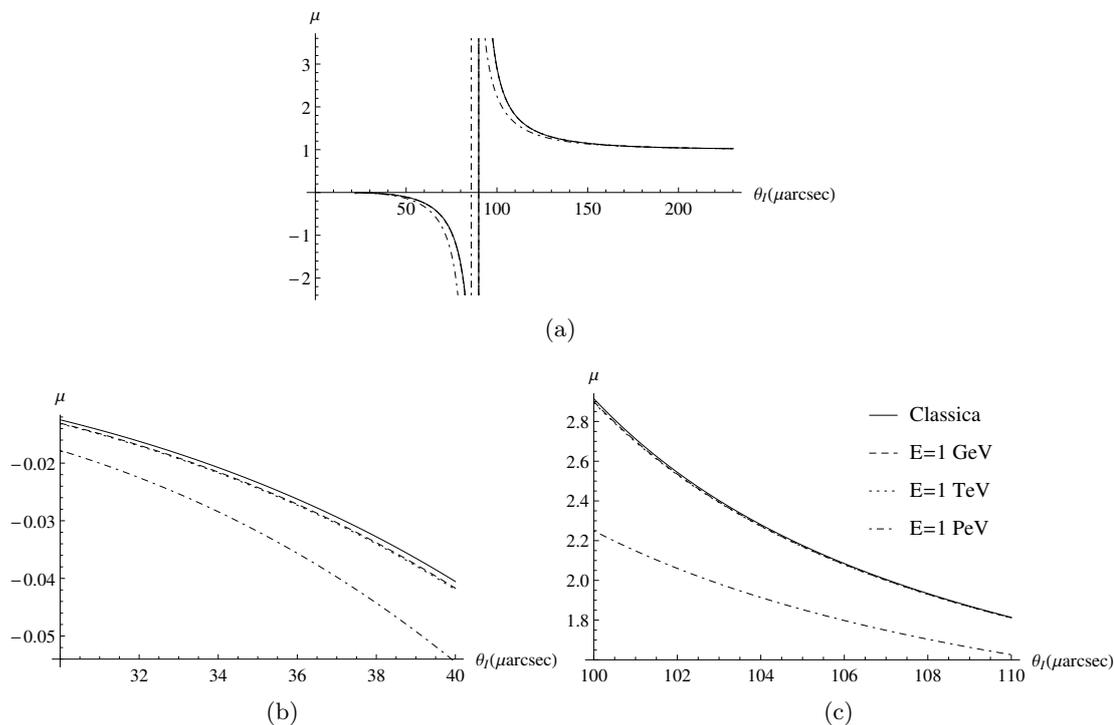


Figura 5.7: Il fattore di amplificazione μ nel caso di una sorgente neutrinica in funzione della posizione dell'immagine ϑ_I per una lente gravitazionale di massa $M = 10^6 M_\odot$ posta a distanza $D_L = 10$ kpc dall'osservatore, con la sorgente a $D_S = 11$ kpc. In (a) l'andamento per la primaria si individua nella regione di piano in cui μ è positivo, la secondaria per valori di μ negativi. In (b) e (c) sono mostrati gli andamenti delle stesse funzioni per l'immagine secondaria e primaria rispettivamente.

meno, è possibile osservare delle differenze per le funzioni associate a entrambe le immagini per valori più grandi del parametro d'impatto e all'aumentare dell'energia del fascio di fotoni e neutrini, fino a ottenere delle correzioni significative per fotoni a 1 TeV e neutrini a 1 PeV.

Infine consideriamo per una sorgente neutrinica una differente configurazione, in cui una lente con $M = 4 \times 10^6 M_\odot$ si trova a una distanza $D_L = 8$ kpc dall'osservatore e la sorgente è molto vicina alla lente $D_{LS} = 1$ mpc. I risultati sono riportati nella 5.8.

Con questa configurazione le posizioni angolari coinvolte risultano essere dell'ordine dei marcsec. In particolare focalizziamo l'attenzione nell'intervallo di posizioni angolari in cui abbiamo maggiore discostamento tra le funzioni, per valori del parametro d'impatto b_h tra 20 e 100. Graficando in questo intervallo rispetto alla posizione dell'immagine ϑ_I otteniamo l'immagine primaria per valori positivi di β e l'immagine secondaria per valori negativi. Quello che si osserva è un discostamento piuttosto evidente delle funzioni considerate che, come nei casi precedentemente analizzati, diventa considerevole all'aumentare dell'energia.

Un'applicazione della configurazione appena analizzata si può avere considerando il buco nero supermassivo Sagittarius A* al centro della nostra galassia, supponendo che una sorgente neutrinica si trovi a una distanza di 1 mpc dal buco nero. I valori utilizzati nei grafici proposti si riferiscono proprio a questo caso particolare.

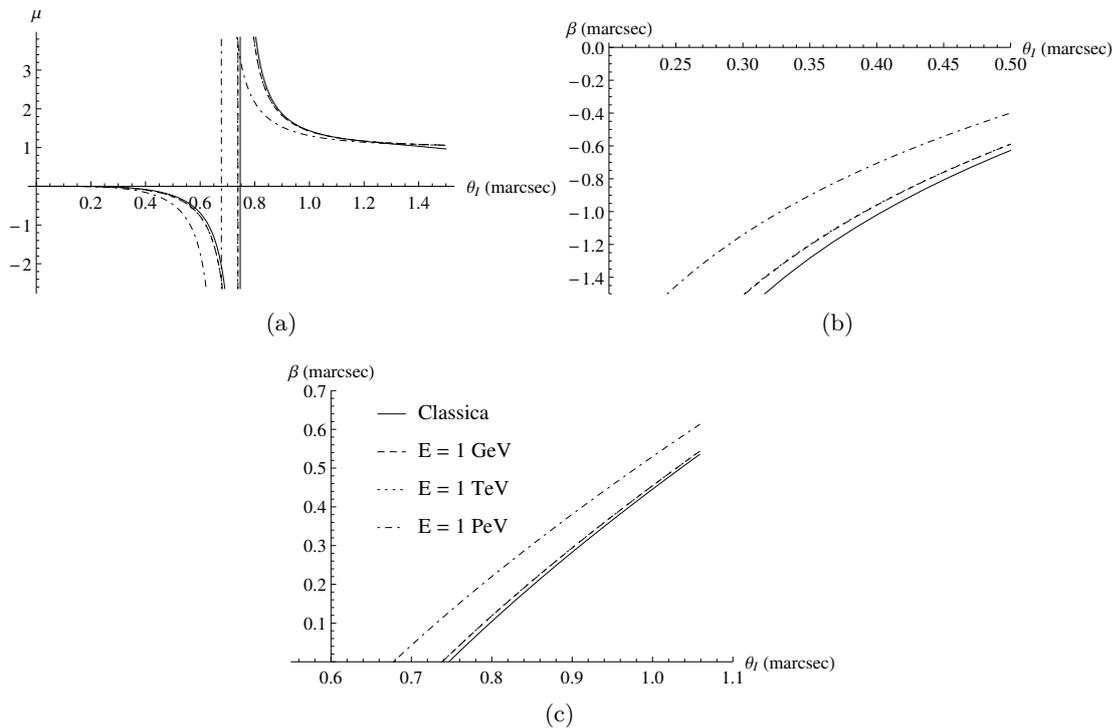


Figura 5.8: Il fattore di amplificazione μ e la posizione della sorgente β nel caso di una sorgente neutrinica in funzione della posizione dell'immagine ϑ_I per una lente gravitazionale di massa $M = 4 \times 10^6 M_\odot$ posta a distanza $D_L = 8$ kpc dall'osservatore, con distanza tra lente e sorgente a $D_{LS} = 1$ mpc. In (a) si grafica l'andamento di μ per la primaria si individua nella regione di piano in cui μ è positivo, la secondaria per valori di μ negativi. In (b) si mostra l'andamento della posizione della sorgente β in funzione di ϑ_I per l'immagine secondaria, in (c) per la primaria.

Capitolo 6

Le correzioni al campo gravitazionale

La trattazione finora presentata è svolta a partire dall'approssimazione di campo debole della metrica di Schwarzschild all'ordine principale. Questa può essere migliorata introducendo termini a ordini più alti per il potenziale gravitazionale. Per includere correzioni di questo tipo si introduce il formalismo *post-newtoniano* (PN), valido per distanze molto grandi dalla sorgente del campo gravitazionale.

Sfruttando gli strumenti descritti nei capitoli precedenti è possibile calcolare le sezioni d'urto per i processi di diffusione di fotoni e neutrini, valutati in termini di uno sviluppo parallelo: da un lato si includono le correzioni quantistiche per i campi discusse nel capitolo 4, dall'altro le correzioni di natura post-newtoniana al campo gravitazionale.

Come vedremo i risultati ottenuti non possono essere inclusi in uno scenario che coinvolge buchi neri ordinari, o macroscopici. Occorre invece riferirsi a buchi neri microscopici, i *buchi neri primordiali*, per i quali le correzioni calcolate risultano essere non solo ragionevoli, ma anche significative.

6.1 L'approssimazione post-newtoniana

Lo schema di approssimazione proposto consiste nel considerare la descrizione newtoniana della gravità all'ordine principale e gli effetti della relatività generale agli ordini successivi nello sviluppo.

Nell'approccio post-newtoniano si introduce uno sviluppo per la metrica di Schwarzschild (2.2), nell'ambito dell'approssimazione di campo debole, ad alti ordini nel parametro

$$\Phi = -\frac{GM}{r}. \quad (6.1)$$

Scrivendo la metrica di Schwarzschild utilizzando il sistema di coordinate sferiche standard

$$d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\phi^2), \quad (6.2)$$

consideriamone lo sviluppo per le funzioni $A(r)$ e $B(r)$, seguendo il procedimento di Sarmiento [10] e Keeton e Petters [12]

$$A(r) \simeq 1 + 2\Phi \quad (6.3a)$$

$$B(r) \simeq 1 - 2\Phi + 4\Phi^2 - 8\Phi^3. \quad (6.3b)$$

Per considerare uno sviluppo in cui il potenziale gravitazionale compare allo stesso ordine nelle funzioni della parte temporale e spaziale della metrica valutiamo il passaggio alle coordinate isotrope. La metrica è allora scritta in forma generale come

$$d\tau^2 = \tilde{A}(\tilde{r})d\tilde{t}^2 - \tilde{B}(\tilde{r}) [d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 (d\tilde{\vartheta}^2 + \sin^2 \tilde{\vartheta} d\tilde{\phi}^2)] \quad (6.4)$$

e lo sviluppo post-newtoniano per le funzioni coefficienti $\tilde{A}(\tilde{r})$ e $\tilde{B}(\tilde{r})$ è dato da

$$\tilde{A}(\tilde{r}) \simeq 1 + a_1 \tilde{\Phi} + a_2 \tilde{\Phi}^2 + a_3 \tilde{\Phi}^3 \quad (6.5a)$$

$$\tilde{B}(\tilde{r}) \simeq 1 + b_1 \tilde{\Phi} + b_2 \tilde{\Phi}^2 + b_3 \tilde{\Phi}^3, \quad (6.5b)$$

dove i coefficienti a_i e b_i sono ottenuti dal confronto con le (6.3), poiché la metrica non dipende dalla scelta del sistema di coordinate. La relazione che intercorre tra il sistema di coordinate isotrope e le coordinate standard si ottiene imponendo le condizioni

$$\begin{cases} A(r) = \tilde{A}(\tilde{r}) \\ B(r)dr^2 = \tilde{B}(\tilde{r})d\tilde{r}^2 \\ r^2 = \tilde{B}(\tilde{r})\tilde{r}^2. \end{cases} \quad (6.6)$$

Dalle ultime due equazioni segue

$$\log \tilde{r} = \int dr \frac{\sqrt{B(r)}}{r} + c, \quad (6.7)$$

dove c è una costante scelta opportunamente in modo che per $r \rightarrow \infty$ si abbia $\tilde{r}/r \rightarrow 1$.

Introducendo tale relazione nelle (6.5) e confrontando con le (6.3) si ottiene lo sviluppo nella metrica isotropa

$$\tilde{A}(\tilde{r}) \simeq 1 + 2\tilde{\Phi} + 2\tilde{\Phi}^2 + \frac{3}{2}\tilde{\Phi}^3 \quad (6.8a)$$

$$\tilde{B}(\tilde{r}) \simeq 1 - 2\tilde{\Phi} + \frac{3}{2}\tilde{\Phi}^2 - \frac{1}{2}\tilde{\Phi}^3. \quad (6.8b)$$

Le (6.8) costituiscono il punto di partenza per definire il tensore associato al campo gravitazionale $h_{\mu\nu}$ con le correzioni post-newtoniane.

6.2 La fluttuazione della metrica post-newtoniana

Con il formalismo del capitolo 2 si introduce il tensore che rappresenta le fluttuazioni della metrica Minkowskiana $h_{\mu\nu}$ che compare nello sviluppo della metrica completa $g_{\mu\nu}$ nella (2.1).

Per poter calcolare la sezione d'urto dei processi che coinvolgono il campo gravitazionale esterno a partire dall'elemento di matrice di diffusione, occorre valutare il tensore $h_{\mu\nu}$ con le correzioni post-newtoniane nello spazio dei momenti. Per distinguere il tensore qui considerato da quello calcolato nell'approssimazione di campo debole all'ordine principale introduciamo la notazione $\tilde{h}_{\mu\nu}$.

Con l'ipotesi di una sorgente gravitazionale statica possiamo scrivere

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(q) = 2\pi \delta(q_0) \tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{q}). \quad (6.9)$$

Il tensore delle fluttuazioni della metrica assume una struttura differente rispetto a quello ottenuto nel capitolo 2 nella (2.31). Ne consegue che la parte tensoriale debba essere organizzata introducendo due diversi fattori di forma $h_0(\vec{q})$ e $h_1(\vec{q})$ e si ottiene

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{q}) = h_0(\vec{q})\delta_\mu^0\delta_\nu^0 + h_1(\vec{q}) (\eta_{\mu\nu} - \delta_\mu^0\delta_\nu^0). \quad (6.10)$$

Per valutare le espressioni dei fattori di forma $h_0(\vec{q})$ e $h_1(\vec{q})$ consideriamo le trasformate di Fourier delle funzioni $\tilde{A}(\vec{r})$ e $\tilde{B}(\vec{r})$ per la metrica scritta in termini di coordinate isotrope e rifacendoci allo sviluppo perturbativo al primo ordine della metrica completa $g_{\mu\nu}$ (2.1). Per alleggerire la notazione introduciamo le coordinate spaziali per la metrica isotropa $\vec{x} \equiv \vec{r}$. I fattori di forma sono dati da

$$h_0(\vec{q}) = -\frac{2}{\kappa} \int d^3\vec{x} \left\{ \Phi + \Phi^2 + \frac{3}{4}\Phi^3 \right\} e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}} \quad (6.11a)$$

$$h_1(\vec{q}) = -\frac{2}{\kappa} \int d^3\vec{x} \left\{ -\Phi + \frac{3}{4}\Phi^2 - \frac{1}{4}\Phi^3 \right\} e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}}. \quad (6.11b)$$

Per ottenere le espressioni esplicite di $h_0(\vec{q})$ e $h_1(\vec{q})$ occorre valutare integrali del tipo

$$\mathcal{I}_n(\vec{q}) = \int d^3\vec{x} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right)^n e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}} \quad \text{con } n = 1, 2, 3. \quad (6.12)$$

L'integrale \mathcal{I}_1 è già stato calcolato nell'ambito dell'approssimazione di campo debole nel capitolo 2 nella (2.29), che riportiamo

$$\mathcal{I}_1(\vec{q}) = \frac{4\pi}{|\vec{q}|}. \quad (6.13)$$

Gli integrali \mathcal{I}_2 e \mathcal{I}_3 si calcolano passando alle coordinate polari sferiche

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(\vec{q}) &= \int d^3\vec{x} \frac{1}{x^2} e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}} \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 \frac{1}{r^2} e^{i x q \cos \vartheta} d(\cos \vartheta) \\ &= \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \int_0^\infty \frac{\sin(|\vec{q}|r)}{r} dr = \frac{2\pi^2}{|\vec{q}|}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(\vec{q}) &= \int d^3\vec{x} \frac{1}{|\vec{x}|^3} e^{i\vec{x}\cdot\vec{q}} \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 \frac{1}{r^3} e^{i x q \cos \vartheta} d(\cos \vartheta) \\ &= \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \int_0^\infty \frac{\sin(|\vec{q}|r)}{r^2} dr. \end{aligned} \quad (6.15)$$

L'ultimo integrale produce una divergenza logaritmica per $r \rightarrow 0$. Introduciamo una regolarizzazione dell'integrale per controllare la divergenza includendo un cut-off ultravioletto Λ e l'integrale (6.15) diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3(\vec{q}, \Lambda) &= \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \int_\Lambda^\infty \frac{\sin(|\vec{q}|r)}{r^2} dr \\ &= \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \left(\frac{\sin(\Lambda|\vec{q}|)}{\Lambda} - |\vec{q}| \text{Ci}(\Lambda|\vec{q}|) \right), \end{aligned} \quad (6.16)$$

dove con Ci indichiamo il coseno integrale, definito come

$$\text{Ci}(x) = \int_\infty^x dt \frac{\cos t}{t}. \quad (6.17)$$

Il comportamento logaritmico della divergenza è reso evidente se scriviamo il coseno integrale nella forma

$$\begin{aligned} \text{Ci}(x) &= - \int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t} \\ &= \gamma + \log x + \int_0^x dt \frac{\cos t - 1}{t}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni. Introducendo l'espressione del potenziale gravitazionale (6.1) nelle (6.11) e sfruttando i risultati degli integrali (6.13), (6.14) e (6.16) i fattori di forma risultano

$$h_0(\vec{q}) = -\frac{2}{\kappa} \left[-\frac{4\pi}{|\vec{q}|^2} GM + \frac{2\pi^2}{|\vec{q}|} (GM)^2 - \frac{3}{4} \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \left(\frac{\sin(\Lambda|\vec{q}|)}{\Lambda} - |\vec{q}| \text{Ci}(\Lambda|\vec{q}|) \right) (GM)^3 \right] \quad (6.19)$$

$$h_1(\vec{q}) = -\frac{2}{\kappa} \left[\frac{4\pi}{|\vec{q}|^2} GM + \frac{3}{4} \frac{2\pi^2}{|\vec{q}|} (GM)^2 + \frac{1}{4} \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \left(\frac{\sin(\Lambda|\vec{q}|)}{\Lambda} - |\vec{q}| \text{Ci}(\Lambda|\vec{q}|) \right) (GM)^3 \right]. \quad (6.20)$$

Una scelta fisicamente ragionevole del regolatore in questo caso consiste nel porre $\Lambda \sim r_S$, essendo $r \gg r_S$ e il raggio di Schwarzschild della sorgente del campo gravitazionale la scala di lunghezza caratteristica del problema.

6.3 La sezione d'urto all'ordine 2PN

La procedura per il calcolo della sezione d'urto all'ordine principale è descritta nel paragrafo 2.2. Le espressioni dell'elemento di matrice di diffusione S_{fi} nell'approssimazione post-newtoniana per i processi analizzati, che rispettivamente coinvolgono il neutrino e il fotone, si distinguono per la forma dei vertici di interazione. Introducendo il tensore generico $\mathcal{J}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2)$, funzione dei quadrimomenti iniziale e finale il quadrato dell'ampiezza di diffusione, si può scrivere come

$$\langle |iS_{fi}|^2 \rangle = \frac{\kappa^2}{16V^2 E_1 E_2} 2\pi\delta(q_0) \mathcal{T} \frac{1}{2} \mathcal{J}^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2) \tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{q}) \tilde{h}_{\rho\sigma}(\vec{q}), \quad (6.21)$$

dove il prodotto di \tilde{h} è

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{\mu\nu}(\vec{q}) \tilde{h}_{\rho\sigma}(\vec{q}) &= \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} h_1^2(\vec{q}) + \left(\eta_{\mu\nu} \delta_\rho^0 \delta_\sigma^0 + \eta_{\rho\sigma} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \right) \left(h_0(\vec{q}) h_1(\vec{q}) - h_1^2(\vec{q}) \right) \\ &\quad + \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \delta_\rho^0 \delta_\sigma^0 \left(h_0(\vec{q}) - h_1(\vec{q}) \right)^2, \end{aligned} \quad (6.22)$$

con $h_0(\vec{q})$ e $h_1(\vec{q})$ definiti rispettivamente nelle (6.19) e (6.20).

Introduciamo la notazione n -PN per indicare l'ordine di approssimazione post-newtoniana considerato, dove n è dato dall'esponente dell'ordine più alto del potenziale gravitazionale che compare nello sviluppo come Φ^{n+1} . Con questa notazione l'approssimazione di campo debole consiste nell'ordine zero dello sviluppo post-newtoniano e si indica con 0PN, gli sviluppi presentati nelle (6.8) sono di ordine 2PN e se consideriamo il troncamento a Φ^2 otteniamo l'ordine 1PN.

Per calcolare la sezione d'urto post-newtoniana 2PN per il neutrino all'ordine principale in teoria elettrodebole consideriamo l'elemento di matrice (6.21), in cui il tensore $\mathcal{J}^{\mu\nu\rho\sigma}$ è definito in termini del vertice di interazione $V^{\mu\nu}$ tra il fermione e il campo gravitazionale esterno descritto nel capitolo 2 nella (2.40) con $m = 0$

$$\mathcal{J}_\nu^{\alpha\beta\rho\sigma}(p_1, p_2) = \text{tr} \left[\not{p}_2 V^{\alpha\beta}(p_1, p_2) \not{p}_1 V^{\rho\sigma}(p_1, p_2) \right], \quad (6.23)$$

dove il pedice ν indica il neutrino. Il calcolo della traccia è analogo a quello presentato nel capitolo 2. Contraendo gli indici tra le strutture tensoriali (6.23) e (6.22) e sfruttando le condizioni $p_1^2 = p_2^2 = 0$, risulta che l'unico termine che dà un contributo non nullo è quello prodotto dall'ultimo termine della (6.22). Chiamando ϑ l'angolo compreso tra le parti spaziali dei quadrimomenti, la sezione d'urto per il neutrino diventa

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_{\nu \text{ 2PN}}} = \frac{\kappa^2}{4\pi^2} |\vec{q}|^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} (h_0(\vec{q}) - h_1(\vec{q}))^2 \quad (6.24)$$

e sfruttando le (6.19) e (6.20) si ottiene

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_{\nu \text{ 2PN}}} = \frac{|\vec{q}|^2}{\pi^2} \left\{ \frac{8\pi}{|\vec{q}|^2} GM - \frac{\pi^2}{2|\vec{q}|} (GM)^2 + \frac{4\pi}{|\vec{q}|} \left[\frac{\sin(\Lambda|\vec{q}|)}{\Lambda} - |\vec{q}| \text{Ci}(\Lambda|\vec{q}|) \right] (GM)^3 \right\}^2. \quad (6.25)$$

L'espressione ottenuta può essere scritta in termini della sezione d'urto all'ordine 0PN calcolata nella (2.60) e sfruttando l'espressione del momento trasferito q nella (2.57) dipendente dall'energia del neutrino E e dall'angolo ϑ , si ha

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_{\nu \text{ 2PN}}} = \mathcal{K}(E, \vartheta)_{\text{2PN}} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_{\nu \text{ 0PN}}}, \quad (6.26)$$

dove abbiamo introdotto la funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(E, \vartheta)_{\text{2PN}} = & \left\{ 1 - \frac{\pi}{8} (GM) E \sin \frac{\vartheta}{2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (GM)^2 E \sin \frac{\vartheta}{2} \left[\frac{1}{\Lambda} \sin \left(2\Lambda E \sin \frac{\vartheta}{2} \right) - 2E \sin \frac{\vartheta}{2} \text{Ci} \left(2\Lambda E \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Notiamo che con questo tipo di correzioni sulla metrica si introduce una dipendenza dall'energia che non è legata alle correzioni quantistiche, ma derivante esclusivamente dagli ordini successivi dello sviluppo post-newtoniano.

L'analisi fin qui condotta può essere estesa considerando anche le correzioni quantistiche alla sezione d'urto calcolate nel capitolo 4. In tal caso otteniamo un'espressione che include da un lato le correzioni di natura quantistica del Modello Standard e dall'altro le correzioni alla metrica all'ordine 2PN. Per la sezione d'urto dei neutrini al primo ordine nello sviluppo perturbativo e all'ordine 2PN nella metrica si ottiene

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_{\nu \text{ 2PN}}} = \left[1 + \frac{4G_{\text{F}}}{\sqrt{2}16\pi^2} \left(F_{\nu}^W(E, \vartheta) + F_{\nu}^Z(E, \vartheta) - \frac{1}{4} \Sigma_L^W - \frac{1}{4} \Sigma_L^Z \right) \right] \mathcal{K}(E, \vartheta)_{\text{2PN}} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_{\nu \text{ 0PN}}}, \quad (6.28)$$

con F_{ν}^W e F_{ν}^Z i fattori di forma rispettivamente nel settore dei bosoni vettori W^{\pm} e Z riportati nelle (4.40) e (4.41), mentre Σ_L^W e Σ_L^Z sono le funzioni introdotte dalla rinormalizzazione e riportate nelle (4.45). La (6.28) può anche essere scritta in una forma compatta

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_{\nu \text{ 2PN}}} = \mathcal{K}(E, \vartheta)_{\text{2PN}} \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega_{\nu \text{ 0PN}}}, \quad (6.29)$$

evidenziando il fatto che le correzioni post-newtoniane e quelle quantistiche possono essere fattorizzate.

Analogamente si procede per il caso del fotone. La quantità $\mathcal{J}^{\alpha\beta\rho\sigma}$ è scritta in termini del vertice di interazione tra i fotoni e il campo gravitazionale $V^{\alpha\beta\rho\sigma}$ riportato nella (2.62) e ha la forma

$$\mathcal{J}_{\gamma}^{\alpha\beta\rho\sigma}(k_1, k_2) = V^{\alpha\beta\kappa\lambda}(k_1, k_2) e_{\kappa}(k_1, \lambda_1) e_{\lambda}^*(k_2, \lambda_2) V^{\rho\sigma\mu\nu}(k_1, k_2) e_{\mu}(k_2, \lambda_2) e_{\nu}^*(k_1, \lambda_1), \quad (6.30)$$

dove il pedice γ si riferisce al fotone. Si introduce questa espressione nella (6.21) e si sfrutta la (6.22) per il prodotto che coinvolge le $\tilde{h}_{\mu\nu}$. Dalla contrazione degli indici tensoriali e avendo imposto le condizioni $k_1^2 = k_2^2 = 0$ si ottiene un risultato analogo a quanto calcolato per il neutrino, ovvero l'unico valore non nullo è quello dato dalla contrazione con l'ultimo termine della (6.22). La sezione d'urto per il fotone risulta dunque

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}_{\gamma\ 2\text{PN}} = \frac{\kappa^2}{4\pi^2} |\vec{q}| \cot^4 \frac{\vartheta}{2} (h_0(\vec{q}) - h_1(\vec{q}))^2 \quad (6.31)$$

e fattorizzando il contributo della sezione d'urto in approssimazione di campo debole all'ordine 0PN, data dalla (2.64), si ottiene

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}_{\gamma\ 2\text{PN}} = \mathcal{K}(E, \vartheta)_{2\text{PN}} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}_{\gamma\ 0\text{PN}}. \quad (6.32)$$

Le correzioni di natura post-newtoniana si presentano nel caso del fotone e del neutrino allo stesso modo, attraverso la funzione (6.27). Infatti il fotone e il neutrino nel contesto del Modello Standard sono particelle a massa nulla e poiché le correzioni post-newtoniane sono essenzialmente legate alla forma della metrica è ragionevole che agiscano allo stesso modo in entrambi i casi.

Con queste posizioni è facile estendere il risultato al caso della sezione d'urto del fotone calcolata al primo ordine perturbativo con le correzioni quantistiche

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega}_{\gamma\ 2\text{PN}} = \mathcal{K}(E, \vartheta)_{2\text{PN}} \frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega}_{\gamma\ 0\text{PN}}, \quad (6.33)$$

dove al membro di destra compare la sezione d'urto a un loop per il fotone calcolata nel capitolo 4.

6.4 L'approccio semi-classico nel caso post-newtoniano: i buchi neri primordiali

Le sezioni d'urto calcolate con le correzioni post-newtoniane possono essere utilizzate nel calcolo del parametro d'impatto seguendo l'approccio descritto nel capitolo 3. In questo modo è possibile considerare il parametro d'impatto in funzione dell'angolo di deflessione nei diversi ordini dello sviluppo post-newtoniano. Con riferimento alla (3.48) consideriamo l'espressione del parametro d'impatto all'ordine $n\text{PN}$

$$b^2(\alpha)_{n\text{PN}} = 2 \int_{\alpha}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}_{n\text{PN}} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (6.34)$$

I risultati ottenuti nei capitoli precedenti, scritti in termini delle sezioni d'urto all'ordine principale o a un loop, sono calcolati all'ordine 0PN. All'ordine 1PN la funzione delle correzioni post-newtoniane è data da

$$\mathcal{K}(E, \vartheta)_{1\text{PN}} = \left\{ 1 - \frac{\pi}{8} (GM) E \sin \frac{\vartheta}{2} \right\}^2, \quad (6.35)$$

per cui la sezione d'urto all'ordine principale in teoria elettrodebole con approssimazione 1PN per il neutrino e il fotone si scrive come

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}_{\nu\ 1\text{PN}} = \mathcal{K}(E, \vartheta)_{1\text{PN}} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}_{\nu\ 0\text{PN}} \quad (6.36)$$

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}_{\gamma\ 1\text{PN}} = \mathcal{K}(E, \vartheta)_{1\text{PN}} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega}_{\gamma\ 0\text{PN}}. \quad (6.37)$$

Introducendo le espressioni precedenti nella (6.34) otteniamo il parametro d'impatto all'ordine 1PN nel limite di piccoli angoli di deflessione, $\alpha \ll 1$, per il caso del neutrino

$$b^2(\alpha)_{\nu 1\text{PN}} = 4(GM)^2 \left(-1 + \csc^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \log \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \pi E (GM)^3 \left(4 + (\cos \alpha - 3) \csc \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{\pi^2}{32} E^2 (GM)^4 \left(1 + \cos \alpha + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \quad (6.38)$$

e per il caso del fotone

$$b^2(\alpha)_{\gamma 1\text{PN}} = 2(GM)^2 \left(-1 + 2 \csc^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha + 8 \log \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{2}{3} \pi E (GM)^3 \left(1 + 3 \csc \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{4} \right)^6 - \frac{\pi^2}{256} E^2 (GM)^4 \left(11 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + 32 \log \sin \frac{\alpha}{2} \right). \quad (6.39)$$

Con quanto discusso nel capitolo precedente possiamo invertire le suddette espressioni al fine di ottenere l'angolo di deflessione in termini del parametro d'impatto in unità di orizzonti b_h . Dalle precedenti si ha nel caso del neutrino

$$\alpha(b)_{\nu 1\text{PN}} = \frac{2}{b_h} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{b_h^2} E (GM) - \frac{1}{b_h^3} \left[\frac{2}{3} + 2 \log b_h - \pi E (GM) - \frac{\pi^2}{32} \left(\log b_h + \frac{3}{2} \right) E^2 (GM)^2 \right], \quad (6.40)$$

e nel caso del fotone

$$\alpha(b)_{\gamma 1\text{PN}} = \frac{2}{b_h} - \frac{1}{b_h^2} \frac{\pi}{2} E (GM) - \frac{1}{b_h^3} \left[\log b_h \left(4 - \frac{1}{16} \pi^2 E^2 (GM)^2 \right) - \frac{1}{64} \pi^2 E^2 (GM)^2 - \frac{4}{3} \pi E (GM) - \frac{1}{3} \right]. \quad (6.41)$$

Quello che risulta evidente già all'ordine 1PN è la comparsa del parametro EGM nella funzione $\mathcal{K}(E, \vartheta)$ (6.35). In situazioni ordinarie, in cui il raggio di Schwarzschild $r_S \sim GM$ ha dimensioni macroscopiche, il termine EGM intacca il carattere perturbativo dello sviluppo post-newtoniano. Lo sviluppo rimarrebbe valido nel caso in cui $E \lesssim 1/GM$, cioè nel lontano infrarosso anche per valori di $M \simeq M_\odot$ e quindi non di rilevanza per l'analisi dei buchi neri macroscopici. Al contrario, tale formalismo trova applicazione nell'ambito dei buchi neri primordiali.

Nella figura 6.1 è rappresentato l'andamento del parametro d'impatto in funzione dell'angolo di deflessione per l'approssimazione 0PN, 1PN e 2PN per un buco nero primordiale dotato di massa $10^{-16} M_\odot$ a cui è associato un raggio di Schwarzschild microscopico $r_S = 300$ fm e per un fascio di fotoni con energia

$$E = \frac{1}{GM} = 0.6 \text{ MeV}. \quad (6.42)$$

Le correzioni post-newtoniane risultano in questo caso significative, dovute alla considerevole variazione nella funzione $\mathcal{K}(E, \vartheta)$ per i termini di ordine 1PN e 2PN. Tali correzioni potrebbero pertanto assumere un ruolo significativo negli eventi di lensing mediati da buchi neri primordiali.

La relatività generale permette di considerare buchi neri con qualunque massa ed è stata teorizzata l'esistenza di buchi neri microscopici, dotati di massa molto inferiore alla massa solare M_\odot . A differenza dei buchi neri ordinari i buchi neri primordiali non hanno origine dal collasso gravitazionale di una stella, ma si sono formati nelle prime fasi di espansione dell'universo a causa della presenza di perturbazioni di densità di materia, tali che la loro auto-gravità sia più consistente rispetto alla pressione di supporto. Una volta formati, i buchi neri primordiali emettono particelle

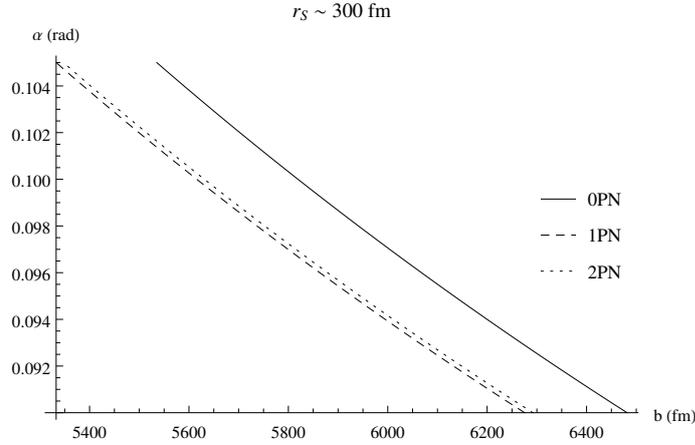


Figura 6.1: Andamento dell'angolo di deflessione α in funzione del parametro d'impatto b per il fotone nel caso di deflessione dovuta alla presenza di un buco nero primordiale dotato di massa $m_{\text{PBH}} = 10^{-16} M_{\odot}$ e raggio di Schwarzschild $r_S \sim 300 \text{ fm}$. L'energia del fascio di fotoni è fissata a 0.6 MeV. Sono riportati gli andamenti delle funzioni all'ordine 0PN, 1PN e 2PN nello sviluppo post-newtoniano e risulta evidente il discostamento dall'approssimazione newtoniana.

mediante la *radiazione di Hawking*. Alla base di questo fenomeno si ha la produzione di una coppia di particelle virtuali nel vuoto in prossimità dell'orizzonte degli eventi. Una delle due particelle viene catturata dal buco nero, mentre l'altra sfugge e si allontana dall'orizzonte. Il risultato netto di questo processo è la perdita di massa da parte del buco nero. La teoria che descrive questi fenomeni prende il nome di *termodinamica dei buchi neri* e prevede che quanto più un buco nero perde massa, tanto più aumenta la sua temperatura e tanto più rapidamente evapora, fino a raggiungere valori prossimi alla massa di Planck. Il raggio di Schwarzschild del buco nero diventa estremamente piccolo e confrontabile con la lunghezza d'onda di fotoni gamma. In questo contesto i buchi neri primordiali sono da considerare oggetti di natura quantistica e una volta raggiunto lo stadio in cui hanno massa pari a quella di Planck non sono più in grado di assorbire energia gravitazionalmente come un buco nero classico, nè di emettere materia per radiazione di Hawking. In questo senso potrebbero essere considerati oggetti stabili e per le loro caratteristiche possibili candidati a WIMP (*weakly interacting massive particle*), conseguentemente a costituenti della materia oscura.

Poiché in generale qualunque tipo di oggetto compatto dotato di una massa significativa dal punto di vista cosmologico può dare origine al fenomeno del lensing gravitazionale, i buchi neri primordiali possono fungere da lenti gravitazionali e deflettere la radiazione emessa da una sorgente puntiforme molto distante dall'osservatore, dando origine ai classici effetti del lensing gravitazionale. Tuttavia, a causa della piccola massa della lente gravitazionale, immagini multiple della sorgente non sarebbero distinguibili, perché separate da una distanza dell'ordine dei femtoarcosecondi. In questo caso si parla di *femtolensing* e nonostante l'impossibilità di risolvere immagini tanto ravvicinate è possibile comunque valutare effetti osservabili legati al fenomeno della lente gravitazionale. Il femtolensing è associato a emissioni di radiazione molto energetiche, i *lampi gamma* o GRB (*gamma-ray burst*) [48], che possono subire il fenomeno del lensing anche in presenza di lenti gravitazionali caratterizzate da masse $10^{17} \text{ g} < m_{\text{PBH}} < 10^{20} \text{ g}$ [6]. Lo studio del lensing in cui la sorgente è un GRB è proprio volto a ricercare oggetti compatti dal punto di vista cosmologico come i buchi neri primordiali, caratterizzati da masse molto piccole, anche dell'ordine di $\sim 10^{-16} M_{\odot}$. Lo studio di questo fenomeno è basato sull'analisi delle frange di interferenza, messe in relazione con lo spettro energetico dei GRB. Seppure non si possano risolvere le immagini, lo studio delle frange di interferenza può portare a valutare il ritardo temporale con cui si formano le immagini,

approssimativamente pari al tempo caratteristico di un raggio gamma. Quello che si cerca è quindi un'impronta caratteristica che gli oggetti compatti, quali i buchi neri primordiali, dovrebbero produrre rispetto alla disposizione delle frange di interferenza.

Dai numerosi dati raccolti dal Gamma-ray Monitor sul satellite FERMI sono in corso diverse analisi per valutare fenomeni di femtolensing per oggetti compatti con masse $10^{17} \text{ g} < m_{\text{PBH}} < 10^{20} \text{ g}$. L'assenza di una quantità consistente di fenomeni di femtolensing e l'ipotesi che sia presente una distribuzione isotropa di GRB nell'universo, ha portato a fissare un limite sulla frazione di materia oscura i cui costituenti sono i buchi neri primordiali, con la soglia dell'1% [49].

Conclusioni

La nostra incapacità di formulare una teoria quantistica della gravitazione consistente è sicuramente una delle cause principali della nostra limitata conoscenza dei fenomeni dell'universo. Ciò non di meno i tentativi di combinare la relatività classica di Einstein con la meccanica quantistica del mondo microscopico sono numerosi e spaziano dall'impiego di modelli effettivi alla formulazione di teorie di stringa. In questo ambito proponiamo di utilizzare un approccio semi-classico per quantificare gli effetti delle correzioni radiative del Modello Standard alla gravità studiando, in particolare, alcune tipiche osservabili astrofisiche.

In questo lavoro di tesi abbiamo presentato il fenomeno del lensing gravitazionale per sorgenti fotoniche e neutriniche, nel contesto della teoria quantistica dei campi, sfruttando l'approccio semi-classico. Questo permette di coinvolgere le correzioni radiative nelle sezioni d'urto che descrivono i processi di interazione delle particelle con il campo gravitazionale, incluso come campo esterno. Abbiamo individuato le condizioni in cui l'approccio semi-classico, con la sezione d'urto all'ordine principale, riproduce i risultati previsti dalla relatività generale per l'espressione dell'angolo di deflessione. Quindi abbiamo esteso la trattazione calcolando le sezioni d'urto a un loop per il caso del neutrino e del fotone.

Abbiamo studiato la fenomenologia del lensing gravitazionale in presenza di una lente di Schwarzschild per i due tipi di sorgenti considerate, analizzando in particolare l'approssimazione della lente sottile e l'espressione dell'equazione della lente di Virbhadra ed Ellis. Per includere i risultati ottenuti con l'approccio semi-classico è stato necessario implementare un algoritmo basato sul punto fisso per invertire le funzioni ottenute nella prima parte del lavoro di tesi. L'inclusione delle correzioni radiative fa emergere un aspetto interessante, non previsto dalla relatività generale: l'angolo di deflessione dipende esplicitamente dall'energia, con la conseguente comparsa di un effetto di dispersione.

A partire dall'angolo di deflessione da noi calcolato abbiamo proposto un'equazione radiativa della lente gravitazionale, estendendo quella di Virbhadra ed Ellis. Abbiamo comparato le grandezze osservabili tipiche del lensing gravitazionale, quali la posizione angolare della sorgente in funzione di quella dell'immagine e il fattore di amplificazione, calcolate con il formalismo classico e con l'approccio da noi sviluppato. Dall'analisi dei risultati si evincono delle differenze che diventano significative per grandi valori dell'energia delle particelle deflesse, superiori al TeV.

Abbiamo inoltre calcolato le correzioni all'angolo di deflessione sfruttando lo sviluppo post-newtoniano della metrica di Schwarzschild, dalle quali discende una dipendenza dall'energia anche in questo caso, e abbiamo mostrato come tali correzioni possano essere fattorizzate definendo un'appropriata funzione post-newtoniana. Tali correzioni trovano un'interessante applicazione nel contesto della deflessione di fotoni emessi dai gamma-ray burst da parte di buchi neri primordiali. Dal confronto delle espressioni dell'angolo di deflessione ai diversi ordini dello sviluppo sono state osservate delle promettenti differenze che riteniamo essere importanti per lo studio della distribuzione di questi oggetti massivi nell'universo e per la loro caratterizzazione come costituenti a materia oscura.

Lo studio presentato in questo lavoro è stato condotto adottando la metrica di Schwarzschild attorno a buchi neri macroscopici e microscopici e in approssimazione di campo debole. Si potrebbe estendere la trattazione considerando buchi neri rotanti, con la metrica di Kerr, ed eventualmente carichi, con quella di Kerr-Newman. Un altro fronte di possibili sviluppi futuri concerne l'applicazione della lente radiativa alle immagini relativistiche, prodotte in regime di campo gravitazionale forte.

Sottolineiamo, infine, che le differenze ottenute nello studio della lente radiativa rispetto alla formulazione classica della relatività generale, nello specifico per la posizione della sorgente in funzione delle immagini primaria e secondaria, necessitano di parametri d'impatto tra 20 e 100 circa raggi di Schwarzschild per poter essere pienamente apprezzate. Questa configurazione può essere realizzata, per esempio, se si considera il caso di eventi di lente dal buco nero supermassivo Sagittarius A* al centro della nostra galassia con distanze angolari delle immagini inferiori al miliardesimo ($b_h \sim 100$). Pertanto, le risoluzioni angolari richieste in questo caso sono difficilmente rilevabili dai telescopi moderni. Tuttavia un perfezionamento del potere risolutivo di questi strumenti potrebbe permettere in futuro di apprezzare gli effetti previsti, osservando in diverse bande energetiche.

Appendice A

L'integrale ellittico di prima specie

Consideriamo un integrale indefinito della forma

$$\int dz \frac{f(z)}{\sqrt{R(z)}}, \quad (\text{A.1})$$

dove $R(z)$ è un polinomio in z , in generale di ordine n

$$R(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n, \quad (\text{A.2})$$

con c_i coefficienti costanti. Quando n è più grande di 4 l'integrale si dice essere *iperellittico*, quando $n = 3, 4$ si dice *ellittico*, quando $n = 2$ lo si può esprimere mediante funzioni trigonometriche circolari. In generale si possono definire due tipologie di integrali ellittici [50]

$$I_k = \int dz \frac{z^k}{\sqrt{R(z)}}, \quad \text{con } k = 0, 1, \dots, n-2 \quad (\text{A.3})$$

$$H_{-(n-2)} = \int dz \frac{(z-b)^{n-2}}{\sqrt{R(z)}} \quad \text{con } R(b) \neq 0. \quad (\text{A.4})$$

Tuttavia tra gli integrali della tipologia $H_{-(n-2)}$ solo H_1 non può effettivamente essere ridotto a un integrale ellittico della tipologia I_k . Per gli integrali ellittici se $n = 4$ si ottengono gli integrali I_0, I_1, I_2 e H_1 , mentre se $n = 3$ si ha I_0, I_1 e H_1 . Gli integrali di tipo I_1 sono riconducibili a integrali elementari. I restanti, secondo la definizione introdotta da Legendre, sono

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} && \text{integrale ellittico di } \textit{prima specie} \\ I_2 &= \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{R(z)}} && \text{integrale ellittico di } \textit{seconda specie} \\ H_1 &= \int \frac{dz}{(z-b)\sqrt{R(z)}} && \text{integrale ellittico di } \textit{terza specie}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Poiché l'integrale che compare nell'espressione dell'angolo di deflessione (3.3) è un integrale ellittico di prima specie, consideriamo I_0 . Un integrale di questo tipo può scriversi nella forma normale di Legendre

$$I_0 = \int \frac{C d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \quad (\text{A.6})$$

dove k è il modulo dell'integrale ellittico. In generale questo parametro può assumere qualunque valore, ma nelle applicazioni pratiche alla geometria e alla fisica compare solitamente come reale e minore di 1. A partire da questa espressione si definisce l'integrale ellittico incompleto di prima specie, scritto nella forma di Jacobi

$$F(x; k) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad (\text{A.7})$$

che può anche essere scritto mediante un opportuno cambiamento di variabile come

$$F(\phi; k) = \int_0^\phi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}. \quad (\text{A.8})$$

L'integrale ellittico di prima specie completo differisce da quello incompleto per il fatto che la funzione integranda è valutata tra 0 e 1. Richiamiamo l'espressione dell'angolo di deflessione

$$\alpha(x_0) = 2x_0^{3/2} \int_0^{1/x_0} \frac{dt}{\sqrt{x_0^3t^3 - x_0^3t^2 + x_0 - 1}} - \pi, \quad (\text{A.9})$$

dove al denominatore compare un polinomio di terzo grado nella variabile di integrazione sotto il segno di radice. Per poter scrivere l'integrale indefinito corrispondente nella forma normale di Legendre, per poi passare a considerare l'espressione dell'integrale di Jacobi, seguiamo il metodo implementato da Weierstrass. Dobbiamo considerare un cambiamento della variabile di integrazione. Torniamo alla forma più generale di una funzione razionale che compare in un integrale ellittico di prima specie e chiamiamo e_i , con $i = 1, 2, 3$ le radici del polinomio $R(t)$

$$I_0 = \int \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{1}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}. \quad (\text{A.11})$$

La sostituzione da valutare è della forma

$$t = a + \frac{b}{z^2}, \quad (\text{A.12})$$

con a e b costanti. La (A.10) diventa

$$\frac{2dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{-b dz}{\sqrt{((a-e_1)z^2+b)((a-e_2)z^2+b)((a-e_3)z^2+b)}} \quad (\text{A.13})$$

e ponendo $a = e_3$ si ha

$$\frac{2dt}{\sqrt{R(t)}} = \frac{-b dz}{\sqrt{((e_3-e_1)z^2+b)((e_3-e_2)z^2+b)}}. \quad (\text{A.14})$$

Se inoltre poniamo

$$b = e_1 - e_3 \quad (\text{A.15})$$

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad (\text{A.16})$$

la (A.10) si riduce a

$$\frac{2dt}{\sqrt{R(t)}} = -\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \quad (\text{A.17})$$

Quindi mediante la trasformazione

$$t = e_3 - \frac{e_1 - e_3}{z^2} \quad (\text{A.18})$$

si passa dalla forma di Weierstrass per l'integrale ellittico a quella normale di Legendre. Applicando questa procedura al caso d'interesse otteniamo l'espressione esatta dell'angolo di deflessione in funzione del parametro di massimo avvicinamento sotto forma di integrale ellittico incompleto di prima specie. Consideriamo il polinomio

$$x_0^3 t^3 - x_0^3 t^2 + x_0 - 1 = 0, \quad (\text{A.19})$$

ne calcoliamo le radici e chiamiamo

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2x_0} \left(x_0 - 1 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3} \right) \\ e_2 &= \frac{1}{2x_0} \left(x_0 - 1 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3} \right) \\ e_3 &= \frac{1}{x_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Da queste posizioni si ha che la trasformazione da considerare è

$$t = \frac{1}{x_0} - \frac{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}{2x_0 z^2}. \quad (\text{A.21})$$

Scritto con la forma di Legendre l'integrale indefinito risulta

$$I_0 = -\sqrt{\frac{8x_0}{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2(x_0)z^2)}}, \quad (\text{A.22})$$

con

$$k^2(x_0) = \frac{x_0 - 3 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}. \quad (\text{A.23})$$

Nella (A.9) compare l'integrale definito e diventa

$$\alpha(x_0) = -4\Sigma(x_0) \int_{\Delta(x_0)}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2(x_0)z^2)}}, \quad (\text{A.24})$$

con

$$\Delta(x_0) = \sqrt{\frac{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}{2x_0}}. \quad (\text{A.25})$$

Gli estremi dell'integrale definito che appare nella (A.24) non sono quelli che entrano nella definizione della forma di Jacobi, per cui occorre considerare l'ulteriore sostituzione $z \rightarrow \zeta = 1/z$ e l'integrale risulta

$$\int_{\Delta(x_0)}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2(x_0)z^2)}} = \frac{1}{k(x_0)} \int_0^{\tau(x_0)} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2(x_0)\zeta^2)}}, \quad (\text{A.26})$$

con $\tau(x_0) = (\Delta(x_0))^{-1}$ e $\lambda^2(x_0) = (k^2(x_0))^{-1}$. Il fattore a fronte dell'integrale ottenuto viene riassorbito nella definizione di $\Sigma(x_0)$ e possiamo scrivere l'espressione dell'angolo di deflessione mediante l'integrale ellittico della forma (A.8)

$$\alpha(x_0) = -4\Sigma(x_0)F(\phi(x_0); \lambda(x_0)) - \pi, \quad (\text{A.27})$$

con

$$\Sigma(x_0) = \sqrt{\frac{x_0^2 (x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3})}{6 - 4x_0}} \quad (\text{A.28a})$$

$$\phi(x_0) = \arcsin(\tau(x_0)) \quad (\text{A.28b})$$

$$\tau(x_0) = \sqrt{\frac{2}{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}} \quad (\text{A.28c})$$

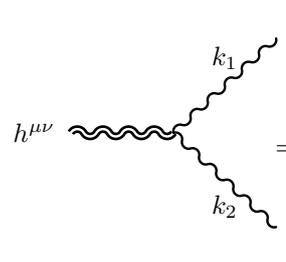
$$\lambda^2(x_0) = \frac{x_0 - 3 - \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}{x_0 - 3 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0 - 3}}. \quad (\text{A.28d})$$

Appendice B

Le regole di Feynman

Di seguito sono riportate le regole di Feynman usate in questo lavoro di tesi che includono un gravitone e le altre particelle coinvolte. I diagrammi sono costruiti dai diagrammi inclusi nel Modello Standard, in ognuno dei quali viene inserito il campo esterno associato al gravitone. Tutti i momenti sono considerati entranti.

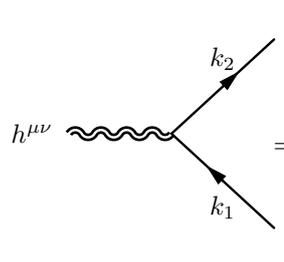
1. Il vertice con un gravitone e due bosoni di gauge



$$= -i\frac{\kappa}{2} \left\{ (k_1 \cdot k_2 + M_V^2) C^{\mu\nu\alpha\beta} + D^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2) + \frac{1}{\xi} E^{\mu\nu\alpha\beta}(k_1, k_2) \right\}$$

dove V indica i bosoni di gauge Z e W e ξ è il parametro di gauge-fixing.

2. Il vertice con un gravitone e due fermioni



$$= -i\frac{\kappa}{8} \left\{ \gamma^\mu (k_1 - k_2)^\nu + \gamma^\nu (k_1 - k_2)^\mu - 2\eta^{\mu\nu} (\not{k}_1 - \not{k}_2 - 2m_f) \right\}$$

3. Il vertice con un gravitone e due scalari

$$\begin{aligned}
 &= i \frac{\kappa}{2} \left\{ k_{1\rho} k_{2\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} - M_S^2 \eta^{\mu\nu} \right\} \\
 &\quad - i \frac{\kappa}{2} 2\chi \left\{ (k_1 + k_2)^\mu (k_1 + k_2)^\nu - \eta^{\mu\nu} (k_1 + k_2)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

dove S indica i bosoni di Goldstone ϕ e ϕ^\pm . La prima linea corrisponde al contributo del tensore energia-impulso minimale mentre la seconda al termine di improvement.

4. Il vertice con un gravitone, uno scalare e due fermioni

$$= \frac{\kappa}{2} \left(C_{S\bar{\psi}\psi}^L P_L + C_{S\bar{\psi}\psi}^R P_R \right) \eta^{\mu\nu}$$

dove i coefficienti sono definiti come

$$\begin{aligned}
 C_{\phi^+\bar{\psi}\psi}^L &= i \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_{\bar{\psi}}}{m_W}, & C_{\phi^+\bar{\psi}\psi}^R &= -i \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_\psi}{m_W} \\
 C_{\phi^-\bar{\psi}\psi}^L &= -i \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_{\bar{\psi}}}{m_W}, & C_{\phi^-\bar{\psi}\psi}^R &= i \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \frac{m_\psi}{m_W}.
 \end{aligned}$$

Gli apici L e R si riferiscono alla chiralità e in particolare si riferiscono a sinistrorso e destrorso. Con P_L e P_R si indicano i proiettori

$$\begin{aligned}
 P_L &= \frac{1 - \gamma^5}{2} \\
 P_R &= \frac{1 + \gamma^5}{2}
 \end{aligned}$$

5. Il vertice con un gravitone, un bosone di gauge e due fermioni

$$= -\frac{\kappa}{2} \left(C_{V\bar{\psi}\psi}^L P_L + C_{V\bar{\psi}\psi}^R P_R \right) C^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\beta$$

con

$$C_{Z\bar{\psi}\psi}^L = i\frac{e}{2s_W c_W}(v+a), \quad C_{Z\psi\psi}^R = i\frac{e}{2s_W c_W}(v-a),$$

$$C_{W^+\bar{\psi}\psi}^L = i\frac{e}{\sqrt{2}s_W}V_{\bar{\psi}\psi}, \quad C_{W^-\bar{\psi}\psi}^L = i\frac{e}{\sqrt{2}s_W}V_{\bar{\psi}\psi}^*, \quad C_{W^\pm\bar{\psi}\psi}^R = 0,$$

$$\text{e } v = I_3 - 2s_W^2 Q, \quad a = I_3.$$

Le strutture tensoriali C , D and E che appaiono nelle regole di Feynman definite sopra sono

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma},$$

$$D_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2) = \eta_{\mu\nu}k_{1\sigma}k_{2\rho} - \left[\eta^{\mu\sigma}k_1^\nu k_2^\rho + \eta_{\mu\rho}k_{1\sigma}k_{2\nu} - \eta_{\rho\sigma}k_{1\mu}k_{2\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right],$$

$$E_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2) = \eta_{\mu\nu}(k_{1\rho}k_{1\sigma} + k_{2\rho}k_{2\sigma} + k_{1\rho}k_{2\sigma}) - \left[\eta_{\nu\sigma}k_{1\mu}k_{1\rho} + \eta_{\nu\rho}k_{2\mu}k_{2\sigma} + (\mu \leftrightarrow \nu) \right].$$

Appendice C

Le correzioni radiative alla deflessione del fotone

In questa appendice forniamo, per completezza, le espressioni esplicite dei fattori di forma su cui si sviluppano le correzioni radiative alla diffusione di un fotone su una sorgente gravitazionale. I suddetti fattori di forma sono stati introdotti in (4.75) e sono definiti dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_{1QED} &= \sum_f N_c^f \left(\Phi_{1QED}(q^2, 0, 0, m_f^2) + \Psi_{1IQED}(q^2, 0, 0, m_f^2, M_H^2) \right), \\
\bar{\Phi}_{2QED} &= \sum_f N_c^f \Phi_{2QED}(q^2, 0, 0, m_f^2), \\
\bar{\Phi}_{3QED} &= \sum_f N_c^f \left(\Phi_{3QED}(q^2, 0, 0, m_f^2) + \delta Z_{AA}^{QED} \right), \\
\bar{\Phi}_{1W} &= \Phi_{1W}(q^2, 0, 0, M_W^2) + \Phi_{1I}(q^2, 0, 0, M_W^2) + \Psi_{1IW}(q^2, 0, 0, M_W^2, M_H^2), \\
\bar{\Phi}_{2W} &= \Phi_{2W}(q^2, 0, 0, M_W^2), \\
\bar{\Phi}_{3W} &= \Phi_{3W}(q^2, 0, 0, M_W^2) + \delta Z_{AA}^W.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Nelle equazioni precedenti la somma su f si estende su tutti i fermioni carichi, N_c^f è il fattore di colore che è 1 per i leptoni e 3 per i quark e i le costanti di rinormalizzazione delle funzioni d'onda, δZ_{AA}^{QED} e δZ_{AA}^W , sono state definite in (4.79). Nei fattori di forma il pedice QED individua le correzioni elettromagnetiche dovute allo scambio di fermioni virtuali all'interno dei loop, il pedice W è usato per indicare il contributo debole, in particolare quello ottenuto dallo scambio del bosone W^\pm e dalla sua componente longitudinale, mentre I denota i fattori di forma generati dal termine di improvement. Il coefficiente χ è stato posto a $1/6$.

Le espressioni esplicite sono date di seguito e sono presentate in termini degli integrali scalari \mathcal{B}_0 e \mathcal{C}_0 e della combinazione

$$\mathcal{D}_0(q^2, 0, 0, m^2, m^2) = \mathcal{B}_0(q^2, m^2, m^2) - \mathcal{B}_0(0, m^2, m^2). \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{1QED}(q^2, 0, 0, m_f^2) &= \frac{\alpha}{3\pi q^2} Q_f^2 \left\{ -\frac{2}{3} + \frac{4m_f^2}{q^2} - 2m_f^2 \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, m_f^2, m_f^2, m_f^2) \left[1 - \frac{4m_f^2}{q^2} \right] \right\}, \\
\Phi_{2QED}(q^2, 0, 0, m_f^2) &= \frac{\alpha}{3\pi q^2} Q_f^2 \left\{ -\frac{1}{12} - \frac{m_f^2}{q^2} - \frac{3m_f^2}{q^2} \mathcal{D}_0(q^2, 0, 0, m_f^2, m_f^2) \right. \\
&\quad \left. - m_f^2 \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, m_f^2, m_f^2, m_f^2) \left[1 + \frac{2m_f^2}{q^2} \right] \right\}, \tag{C.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{3QED}(q^2, 0, 0, m_f^2) &= \frac{\alpha}{3\pi q^2} Q_f^2 \left\{ \frac{11q^2}{12} + 3m_f^2 + \mathcal{D}_0(q^2, 0, 0, m_f^2, m_f^2) [5m_f^2 + q^2] \right. \\
&\quad \left. + q^2 \mathcal{B}_0(0, m_f^2, m_f^2) + 3m_f^2 \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, m_f^2, m_f^2, m_f^2) [q^2 + 2m_f^2] \right\}, \\
\Phi_{1W}(q^2, 0, 0, M_W^2) &= \frac{\alpha}{\pi q^2} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{2M_W^2}{q^2} + 2M_W^2 \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, M_W^2, M_W^2, M_W^2) \left[1 - \frac{2M_W^2}{q^2} \right] \right\}, \\
\Phi_{2W}(q^2, 0, 0, M_W^2) &= \frac{\alpha}{\pi q^2} \left\{ \frac{1}{24} + \frac{M_W^2}{2q^2} + \frac{3M_W^2}{2q^2} \mathcal{D}_0(q^2, 0, 0, M_W^2, M_W^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_W^2}{2} \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, M_W^2, M_W^2, M_W^2) \left[1 + \frac{2M_W^2}{q^2} \right] \right\}, \tag{C.4} \\
\Phi_{3W}(q^2, 0, 0, M_W^2) &= \frac{\alpha}{\pi q^2} \left\{ -\frac{15q^2}{8} - \frac{3M_W^2}{2} - \frac{1}{2} \mathcal{D}_0(q^2, 0, 0, M_W^2, M_W^2) \left[5M_W^2 + \frac{7}{2}q^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4}q^2 \mathcal{B}_0(0, M_W^2, M_W^2) - \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, M_W^2, M_W^2, M_W^2) \right. \\
&\quad \left. \times [q^4 + 4M_W^2 q^2 + 3M_W^4] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{1I}(q^2, 0, 0, M_W^2) &= \frac{\alpha}{3\pi q^2} \left\{ 1 + 2M_W^2 \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, M_W^2, M_W^2, M_W^2) \right\}, \\
\Psi_{1IQED}(q^2, 0, 0, m_f^2, M_H^2) &= \frac{2m_f^2 \alpha Q_f^2}{3\pi q^2 (q^2 - M_H^2)} \left[2 + (4m_f^2 - q^2) \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, m_f^2, m_f^2, m_f^2) \right], \tag{C.5} \\
\Psi_{1IW}(q^2, 0, 0, M_W^2, M_H^2) &= \frac{\alpha}{3\pi q^2 (q^2 - M_H^2)} \left[M_H^2 + 6M_W^2 \right. \\
&\quad \left. + 2M_W^2 (M_H^2 + 6M_W^2 - 4q^2) \mathcal{C}_0(0, q^2, 0, M_W^2, M_W^2, M_W^2) \right].
\end{aligned}$$

Appendice D

Coefficienti dello sviluppo semi-classico

I coefficienti che entrano nella (5.102) sono

$$C_1(E) = \frac{1}{24\sqrt{2}} \frac{G_F}{\pi^2} \frac{E^2}{(m_f^2 - m_W^2)^4} (9 m_f^8 + 62 m_f^6 m_W^2 + 125 m_f^4 m_W^4 - 94 m_f^2 m_W^6 + 22 m_W^8) \\ + (20 m_f^6 m_W^2 - 30 m_f^4 m_W^4 + 4 m_f^2 m_W^6) \ln(m_f^2/m_W^2) \quad (\text{D.1})$$

$$C_2(E) = \frac{1}{600\sqrt{2}} \frac{G_F}{\pi^2} \frac{E^4}{m_Z^2 (m_f^2 - m_W^2)^6} (20 m_Z^2 (2 m_f^{10} - 84 m_f^8 m_W^2 + 36 m_f^6 m_W^4 + 76 m_f^4 m_W^6) \\ + 21 m_f^2 m_W^8 - 6 m_W^{10}) \ln(m_f^2/m_W^2) + (m_f^2 - m_W^2) (69 m_f^{10} - 69 m_W^{10} + 150 m_W^8 m_Z^2 \\ - 5 m_f^8 (69 m_W^2 - 55 m_Z^2) + 15 m_f^6 (46 m_W^4 + 135 m_W^2 m_Z^2) - 15 m_f^4 (46 m_W^6 + 165 m_W^4 m_Z^2) \\ + 5 m_f^2 (69 m_W^8 - 175 m_W^6 m_Z^2)) \quad (\text{D.2})$$

$$D_2(E) = \frac{1}{160\sqrt{2}} \frac{G_F}{\pi^2} \frac{E^4}{m_Z^2} \quad (\text{D.3})$$

$$E_2(E) = \frac{1}{160\sqrt{2}} \frac{G_F}{\pi^2} \frac{E^4}{m_Z^2} (-11 + 6 \ln 4 + \ln(E^2/m_Z^2)) \quad (\text{D.4})$$

$$F_2(E) = \frac{1}{160\sqrt{2}} \frac{G_F}{\pi^2} \frac{E^4}{m_Z^2} (-3 + \ln 16 + 2 \ln(E^2/m_Z^2)) \quad (\text{D.5})$$

$$G_2(E) = \frac{1}{160\sqrt{2}} \frac{G_F}{\pi^2} \frac{E^4}{m_Z^2} (-1 + \ln 16 + 2 \ln(E^2/m_Z^2)) . \quad (\text{D.6})$$

Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the theory of general relativity* (Jhon Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney Toronto, 1972).
- [2] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).
- [3] T.-P. Cheng and L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford Science Publications, 1984).
- [4] M. Roncadelli, *Aspetti astrofisici della materia oscura*, 2004.
- [5] M. Meneghetti, *Introduction to Graviational Lensing*, 2006.
- [6] A. M. Green, ArXiv e-prints (2014), arXiv:1403.1198.
- [7] K. Virbhadra and G. F. Ellis, *Phys.Rev.* **D62**, 084003 (2000), arXiv:astro-ph/9904193.
- [8] Planck Collaboration *et al.*, *A&A* **571**, A1 (2014), arXiv:1303.5062.
- [9] K. Hayashi and T. Shirafuji, *Phys. Rev. D* **19**, 3524 (1979).
- [10] A. F. Sarmiento, *Gen.Rel.Grav.* **14**, 793 (1982).
- [11] H. Asada and T. Futamase, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **128**, 123 (1997), gr-qc/9806108.
- [12] C. R. Keeton and A. Petters, *Phys.Rev.* **D72**, 104006 (2005), arXiv:gr-qc/0511019.
- [13] J. F. Donoghue, *Phys.Rev.* **D50**, 3874 (1994), arXiv:gr-qc/9405057.
- [14] G. 't Hooft, *Perturbative QUANTUM GRAVITY*, in *From Quarks and Gluons to Quantum Gravity*, edited by A. Zichichi, pp. 249–269, 2003.
- [15] R. Delbourgo and P. Phocas-Cosmetatos, *Lett.Nuovo Cim.* **5**, 420 (1972).
- [16] R. Delbourgo and P. Phocas-Cosmetatos, *Phys.Lett.* **B41**, 533 (1972).
- [17] F. A. Berends and R. Gastmans, *Ann. Phys.* **98**, 225 (1976).
- [18] E. Golowich, P. Gribovsky, and P. Pal, *Am.J.Phys.* **58**, 688 (1990).
- [19] A. Accioly and R. Paszko, *Phys.Rev.* **D69**, 107501 (2004).
- [20] N. Bjerrum-Bohr, J. F. Donoghue, B. R. Holstein, L. Plantè, and P. Vanhove, *Phys.Rev.Lett.* **114**, 061301 (2015), arXiv:1410.7590.

-
- [21] C. Corianò, L. Delle Rose, M. M. Maglio, and M. Serino, (2014), arXiv:1411.2804.
- [22] C. Corianò, A. Costantini, M. Dell'Atti, and L. Delle Rose, (2015), arXiv:1504.01322.
- [23] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).
- [24] J. Callan, Curtis G., S. R. Coleman, and R. Jackiw, *Annals Phys.* **59**, 42 (1970).
- [25] M. Giannotti and E. Mottola, *Phys. Rev.* **D79**, 045014 (2009), arXiv:0812.0351.
- [26] R. Armillis, C. Corianò, and L. Delle Rose, *Phys. Rev.* **D81**, 085001 (2010), arXiv:0910.3381.
- [27] S. Caracciolo, G. Curci, P. Menotti, and A. Pelissetto, *Ann. Phys.* **197**, 119 (1990).
- [28] R. Armillis, C. Corianò, and L. Delle Rose, (2010), arXiv:1005.4173.
- [29] C. Corianò, L. Delle Rose, and M. Serino, *Phys.Rev.* **D83**, 125028 (2011), arXiv:1102.4558.
- [30] R. Armillis, C. Coriano, L. Delle Rose, and L. Manni, *Int.J.Mod.Phys.* **A26**, 2405 (2011), arXiv:1003.3930.
- [31] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity* (Cambridge, University Press, 2006).
- [32] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane, and G. Scarpetta, *Gen.Rel.Grav.* **33**, 1535 (2001), arXiv:gr-qc/0102068.
- [33] C. Corianò, L. Delle Rose, A. Quintavalle, and M. Serino, *Phys.Lett.* **B700**, 29 (2011), arXiv:1101.1624.
- [34] G. Degrassi, E. Gabrielli, and L. Trentadue, *Phys.Rev.* **D79**, 053004 (2009), arXiv:0812.3262.
- [35] C. Corianò, L. Delle Rose, E. Gabrielli, and L. Trentadue, *Phys.Rev.* **D87**, 054020 (2013), arXiv:1212.5029.
- [36] C. Corianò, L. Delle Rose, E. Gabrielli, and L. Trentadue, *Phys.Rev.* **D88**, 085008 (2013), arXiv:1303.1305.
- [37] C. Corianò, L. Delle Rose, E. Gabrielli, and L. Trentadue, *JHEP* **1403**, 136 (2014), arXiv:1312.7657.
- [38] G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl.Phys.* **B153**, 365 (1979).
- [39] G. J. van Oldenborgh and J. A. M. Vermaseren, *Z. Phys.* **C46**, 425 (1990).
- [40] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41**, 307 (1993), arXiv:0709.1075.
- [41] D. Z. Freedman, I. J. Muzinich, and E. J. Weinberg, *Ann. Phys.* **87**, 95 (1974).
- [42] K. A. Milton, *Phys. Rev.* **D15**, 538 (1977).
- [43] F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys.Rev.* **52**, 54 (1937).
- [44] T. Kinoshita, *J.Math.Phys.* **3**, 650 (1962).
- [45] T. Lee and M. Nauenberg, *Phys.Rev.* **133**, B1549 (1964).
- [46] K. S. Virbhadra, *Phis.Rev.D* **79**, 083004 (2009), arXiv:0810.2109.

-
- [47] P. Amore and S. Arceo Diaz, Phys.Rev. **D73**, 083004 (2006), arXiv:gr-qc/0602106.
- [48] A. Gould, Ast.Jour.,Part 2-Letters **386**, L5 (1992).
- [49] A. Barnacka, J.-F. Glicenstein, and R. Moderski, Phys.Rev.D **86**, 043001 (2012), arXiv:1204.2056.
- [50] H. Hancock, *Lectures on the theory of elliptic functions* (Jhon Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney Toronto, 1910).