

# APPENDICE D

## Cenni di misure elettriche

La misura delle grandezze elettriche che caratterizzano il funzionamento degli impianti, delle macchine e dei dispositivi elettrici, riveste una fondamentale importanza sia in ambito scientifico che tecnico. Inoltre, tale disciplina, comprende anche la misura di grandezze di natura non elettrica ma riportate a tale contesto attraverso opportune apparecchiature di trasduzione.

L'esigenza di disporre di valori quantitativi sufficientemente precisi delle grandezze elettriche si avvertì appena si iniziarono a costruire le prime macchine elettrostatiche, che consentivano di ottenere cariche elettriche in quantità apprezzabile; in particolare, nella misura di cariche elettriche la maggiore complicazione è dovuta al fatto che è estremamente difficile realizzare un corpo perfettamente isolato, cioè che non disperda le cariche verso terra o, in generale, all'esterno. Per altro, benché sia possibile esperire approcci tali da minimizzare la dispersione di carica dovuta agli isolanti imperfetti, sussistono altri elementi di perdita che, sebbene siano molto piccoli, risultano quasi impossibili da eliminare. Già nel 1785 Coulomb aveva osservato che gli elettroscopi si scaricano spontaneamente in aria, anche se isolati al meglio dal punto di vista elettrico; successivamente, prima Faraday nel 1835 che Crookes nel 1879 studiarono il problema. Solo con la scoperta della radioattività naturale nel 1896 da parte di Antoine Henri Becquerel e poi con la scoperta dei raggi cosmici da parte di Domenico Pacini e di Victor Franz Hess, tra il 1907 ed il 1912, si

comprese che tali fenomeni possono determinare la formazione di ioni che tendono a scaricare quelle parti che si trovano al potenziale da misurare, ovviamente alterandolo. Un altro elemento di disturbo per le misure di carica è rappresentato dalla presenza di umidità atmosferica; ciò fu messo in rilievo già da Gilbert nel 1600 che, per primo, osservò che grosse concentrazioni di umidità nell'aria tendono a disperdere l'elettricità. Le misure di carica in ambito elettrostatico venivano effettuate con uno strumento descritto nel Capitolo 1 e denominato elettroscopio; in particolare, corredando l'elettroscopio di una scala graduata, lo strumento prende il nome di *elettrometro*. Con la scoperta fatta da Ørsted, nel 1820, della associazione di un campo magnetico ad una corrente elettrica, ci si accorse che questo effetto poteva essere adoperato per la misura del flusso delle cariche, cioè della corrente. Il fisico e matematico tedesco Johann Salomo Chistof Schweigger, sempre nel 1820, in collaborazione con Ampère, propose il primo strumento per la misura di corrente basato sul fenomeno scoperto da Ørsted; per aumentare l'effetto del campo magnetico generato dalla corrente, si adoperavano diversi avvolgimenti di filo conduttore intorno ad una bussola e, per tale motivo, Schweigger denominò questo apparato *moltiplicatore (Verdopplungs Apparat)*; solo in seguito divenne comune il nome di *galvanometro* per indicare uno strumento in grado di misurare l'intensità di corrente. I primi galvanometri ricavano dal campo magnetico terrestre la forza di richiamo dell'ago della bussola e pertanto tali strumenti richiedevano di essere opportunamente orientati prima dell'uso; successivamente, nel 1825, Leopoldo Nobili propose un galvanometro, detto



Moltiplicatore di Schweigger

*astatico*, che adoperando una coppia di magneti contrapposti, annullava localmente il campo magnetico terrestre e poteva, di conseguenza, funzionare in ogni posizione. A partire da un progetto del 1826 del fisico tedesco Johann Christian Poggendorff, nel 1858 Thomson brevettò un galvanometro ad alta sensibilità che adoperava un piccolo magnete permanente solidale ad un leggero specchietto e sospeso ad un filo. In questa maniera la deflessione di un raggio luminoso era in grado di amplificare notevolmente la deviazione del magnete dovuta anche a piccole correnti. Questi primi strumenti di misura, basati sul movimento di aghi magnetizzati, presentano lo svantaggio di essere sensibili alla presenza di masse metalliche o di magneti nella loro prossimità ed inoltre, come si mostrerà nel seguito, le loro deviazioni non dipendono linearmente dall'intensità della corrente. Il superamento di tali limiti portò allo sviluppo dei moderni galvanometri a bobina mobile.

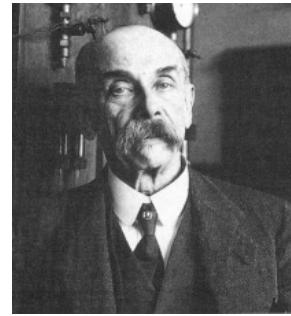


Elettrometro

In questo ambito si esaminerà il funzionamento del galvanometro e si vedrà come, a partire da tale dispositivo base, è possibile realizzare strumenti per la misura di correnti e di differenze di potenziale con diverse scale di misura. Infine si analizzeranno i principali metodi per la misura di resistenze. Se non diversamente specificato, la trattazione è limitata alle sole misure in corrente continua.

## D.1 Il galvanometro a bobina mobile

Uno degli strumenti più comuni per la misura di correnti continue è costituito dal galvanometro a bobina mobile; la realizzazione di questo dispositivo nella forma qui indicata richiede molto tempo. Lo strumento qui descritto fu sviluppato dal biofisico francese Jacques Arsène D'Arsonval nel 1882. Il funzionamento di tale dispositivo è basato sull'azione di una forza agente su di una spira percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico di modulo costante disposto perpendicolarmente ad uno dei suoi assi. Il campo magnetico  $\vec{B}$  determina la rotazione della spira, di lati  $L$  ed  $L'$ , in modo che il suo piano si disponga perpendicolarmente alle linee di campo e l'angolo  $\vartheta$  compreso tra la direzione di  $\vec{B}$  e la normale alla spira si annulli. Se attraverso una coppia di molle si esercita sulla spira un momento elastico resistente  $k\vartheta$  tale da opporsi alla rotazione, dalla relazione (4.7) segue che la posizione di equilibrio si raggiungerà quando:



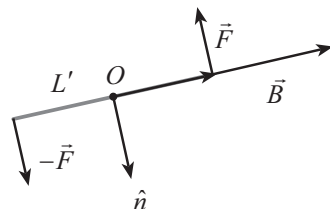
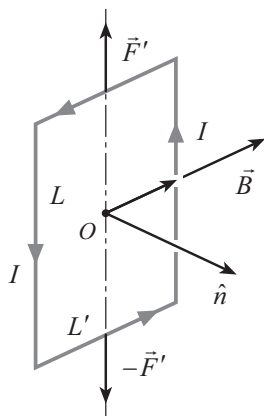
Jacques Arsène D'Arsonval

$$k\vartheta = IBS \sin \vartheta ,$$

dove  $I$  è la corrente attraverso la spira e  $S$  la sua superficie  $LL'$ . Da tale espressione si evince che la relazione tra l'angolo  $\vartheta$  e la corrente  $I$  vale:

$$I = \frac{k}{BS} \frac{\vartheta}{\sin \vartheta} .$$

La misura della corrente  $I$  attraverso una misura dell'angolo  $\vartheta$  risulta poco pratica in quanto la relazione precedente non è lineare. Se il campo magnetico  $\vec{B}$  avesse simmetria cilindrica, cioè fosse parallelo ai lati  $L'$  e contenuto nel piano della spira per un ampio insieme di valori dell'angolo  $\vartheta$ , il momento torcente avrebbe modulo:

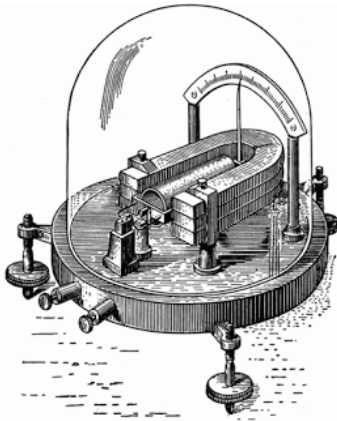


$$\tau = 2 \frac{L'}{2} IBL = IBS ,$$

così la condizione di equilibrio diventa:

$$I = \frac{k}{BS} \vartheta ,$$

che esprime una relazione lineare tra la corrente  $I$  e l'angolo  $\vartheta$ . Un campo magnetico con le caratteristiche richieste si



Rappresentazione del primo galvanometro di D'Arsonval. Lo strumento è situato all'interno di una campana di vetro affinché le condizioni ambientali non ne alterino il funzionamento.

ottiene sagomando le espansioni polari di un magnete permanente in modo da alloggiare un cilindro verticale di ferro dolce intorno al quale sono avvolte un numero  $N$  di spire<sup>1</sup>. Tra cilindro e magnete, il campo  $\vec{B}$  risulta costante in modulo ed ortogonale alla superficie del cilindro. L'aver avvolto  $N$  spire consente di aumentare la sensibilità  $\sigma$  dello strumento, intesa come la variazione  $d\vartheta$  dell'angolo  $\vartheta$  corrispondente ad una variazione  $dI$  della corrente. Infatti, dalla relazione precedente si ha in questa circostanza, che la corrente  $I$  vale  $k\vartheta/(NBS)$ ; pertanto:

$$\sigma = \frac{d\vartheta}{dI} = \frac{NBS}{k},$$

che risulta quindi  $N$  volte più grande rispetto al caso in cui fosse presente una sola spira. Si noti infine che  $\sigma$  può essere accresciuta diminuendo  $k$ ; ciò può ottenersi sostituendo le molle con una coppia di fili. Se i fili risultano abbastanza sottili, la loro costante elastica corrispondente alla torsione è minore di quella delle molle. La misura dell'angolo  $\vartheta$  di deviazione dalla posizione di riposo relativa ad una corrente nulla viene effettuata rilevando lo spostamento  $s$  di un indice solidale alla bobina su una scala graduata posta a distanza  $d$  dalla bobina. Se la scala ha  $n$  divisioni e  $s_0$  è l'ampiezza di quella più piccola, lo spostamento si può esprimere come:

$$s = n s_0$$

e siccome:

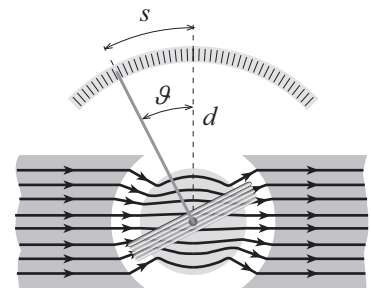
$$\vartheta = \frac{s}{d} = \frac{n s_0}{d},$$

la corrente  $I$  vale:

$$I = \frac{k}{NBS} \vartheta = \frac{k s_0}{NBSd} n,$$

ottenendo quindi una relazione di proporzionalità diretta tra l'intensità di corrente  $I$  e il numero di divisioni di cui si sposta l'indice sulla scala graduata.

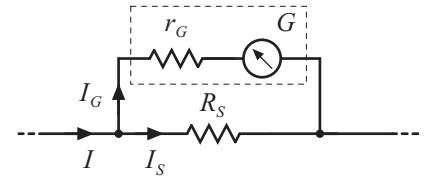
Attualmente, per galvanometro si intende uno strumento per la misura di piccole correnti, dell'ordine di  $10^{-6} \div 10^{-10} A$  ed in cui, in generale, la lettura si fa in unità arbitrarie, anche con mezzi ottici. Adoperando un galvanometro è possibile realizzare strumenti per la misura diretta dell'intensità di corrente o della differenza di potenziale detti, rispettivamente *amperometro* e *voltmetro*.



<sup>1</sup> Si veda il Paragrafo 5.6.

### D.1.1 L'amperometro

Per amperometro si intende uno strumento in grado di fornire una misura diretta dell'intensità della corrente che scorre attraverso un ramo di un circuito. Quando l'intensità della corrente  $I$  oggetto della misura supera quella massima che può rilevare un galvanometro, si fa in modo che tale strumento sia attraversato soltanto da una frazione della corrente da misurare; a tale scopo si collega in parallelo al galvanometro una resistenza, in modo da deviare opportunamente la corrente, tale resistenza è detta *shunt*. Pertanto, nella pratica, un amperometro è costituito da un galvanometro tarato in ampere e collegato a delle resistenze in parallelo situate all'interno o all'esterno dello strumento.



Con riferimento allo schema di figura, in cui  $r_G$  rappresenta la resistenza propria dell'avvolgimento del galvanometro  $G$ , risulta:

$$I = I_G + I_S;$$

d'altra parte si ha:

$$r_G I_G = R_S I_S,$$

per cui, deducendo  $I_S$  e sostituendola nella precedente relazione, si ottiene:

$$I = I_G + I_G \frac{r_G}{R_S} = I_G \left( 1 + \frac{r_G}{R_S} \right) = I_G m_A, \quad (\text{D.1})$$

dove

$$m_A \equiv 1 + \frac{r_G}{R_S} \quad (\text{D.2})$$

è detto *rapporto di riduzione* dello shunt  $R_S$ , poiché rappresenta il fattore di riduzione della corrente da misurare  $I$  rispetto alla corrente  $I_G$ , pari a  $I/m_A$ , che attraversa il galvanometro. Negli amperometri, una volta stabilita la resistenza di shunt  $R_S$ , la scala viene tarata direttamente in base alla nuova corrente massima (corrente di *fondo scala* o *portata* dell'amperometro), pari a  $m_A$  volte la massima corrente che può attraversare il galvanometro. Una volta fissato il rapporto di riduzione, dalla relazione (D.2) è possibile dedurre il valore della resistenza di shunt  $R_S$ :

$$R_S = \frac{r_G}{m_A - 1}.$$

L'amperometro rappresentato nella figura, costituito dal galvanometro  $G$  di resistenza interna  $r_G$  e dalla resistenza di shunt  $R_S$ , presenta una resistenza interna  $r_A$  pari al parallelo tra  $r_G$  e  $R_S$ :

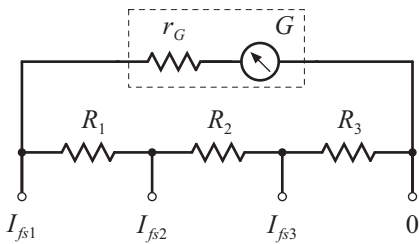
$$r_A \equiv \frac{r_G R_S}{r_G + R_S}.$$

Siccome generalmente  $m_A \gg 1$ , dalla relazione (D.2) segue che  $r_G \gg R_S$ , così, dalla relazione precedente, si ha che la resistenza interna dell'amperometro così formato è:

$$r_A \approx R_S,$$

ovvero è circa pari alla resistenza di shunt.

Ponendo in parallelo all'amperometro una serie di resistenze dotata di varie prese intermedie è possibile ottenere uno strumento con diversi fondo scala.



**Esempio:** Utilizzando un galvanometro con una resistenza interna  $r_G$  di  $1k\Omega$  ed una corrente di fondo scala  $I_{fs}$  di  $100\mu A$ , realizziamo un amperometro di portate  $I_{fs1}$ ,  $I_{fs2}$  e  $I_{fs3}$ , rispettivamente pari a  $0.2mA$ ,  $2mA$  e  $20mA$ . Dalla relazione (D.1), posto  $R_S$  pari alla somma  $R_1 + R_2 + R_3$ , si ha:

$$I_{fs1} = I_{fs} \left( 1 + \frac{r_G}{R_S} \right) = I_{fs} \left( 1 + \frac{r_G}{R_1 + R_2 + R_3} \right),$$

da cui segue:

$$R_1 + R_2 + R_3 = r_G \frac{1}{\frac{I_{fs1}}{I_{fs}} - 1} \approx 1k\Omega. \quad (D.3)$$

In corrispondenza dell'ingresso per la misura della corrente con fondo scala  $I_{fs2}$ , dalla (D.1) risulta:

$$I_{fs2} = I_{fs} \left( 1 + \frac{R_1 + r_G}{R_2 + R_3} \right) = I_{fs} \frac{R_1 + R_2 + R_3 + r_G}{R_2 + R_3} = I_{fs} \frac{R_S + r_G}{R_2 + R_3},$$

da cui segue:

$$R_2 + R_3 = \frac{I_{fs}}{I_{fs2}} (R_S + r_G) = \frac{R_S + r_G}{\frac{I_{fs2}}{I_{fs}}} \approx 100\Omega. \quad (D.4)$$

Infine, in corrispondenza dell'ingresso per la misura della corrente con fondo scala  $I_{fs3}$ , dalla (D.1) risulta:

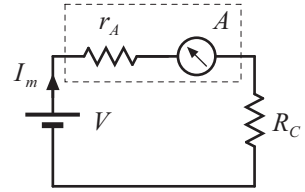
$$I_{fs3} = I_{fs} \left( 1 + \frac{R_1 + R_2 + r_G}{R_3} \right) = I_{fs} \frac{R_1 + R_2 + R_3 + r_G}{R_3} = I_{fs} \frac{R_S + r_G}{R_3},$$

da cui segue:

$$R_3 = \frac{I_{fs}}{I_{fs3}} (R_S + r_G) = \frac{R_S + r_G}{\frac{I_{fs3}}{I_{fs}}} \approx 10\Omega.$$

Pertanto, sostituendo questo valore nella relazione (D.4) si ottiene per la resistenza  $R_2$  il valore di  $90\Omega$  ed utilizzando tale risultato, dalla (D.3) si ricava per  $R_1$  il valore di  $900\Omega$ .

Consideriamo un amperometro  $A$  di resistenza interna  $r_A$ ; per misurare la corrente che attraversa un ramo con tale strumento occorre che esso sia inserito in serie al ramo considerato. Poiché l'amperometro presenta una resistenza interna, l'inserimento nel ramo di tale strumento comporterà un aumento della resistenza propria del ramo e, conseguentemente, una diminuzione del valore della corrente oggetto della misura. Da ciò segue che è inevitabile un errore sistematico nella misura di corrente in un ramo fatta con un amperometro. Consideriamo, ad esempio, il circuito di figura; qualora la resistenza interna dell'amperometro fosse nulla, la corrente attraverso il circuito varrebbe:



$$I = \frac{V}{R_C},$$

tuttavia, poiché in generale  $r_A$  risulta diversa da zero, la corrente misurata è:

$$I_m = \frac{V}{R_C + r_A} = \frac{V}{R_C} \frac{1}{1 + \frac{r_A}{R_C}} = I \frac{1}{1 + \frac{r_A}{R_C}}.$$

Se  $r_A \ll R_C$  allora  $I_m \approx I$ , cioè l'indicazione fornita dallo strumento sarà tanto più precisa quanto più la resistenza del ramo in cui è inserito lo strumento è grande rispetto alla resistenza interna dell'amperometro.

**Esempio:** Per avere l'ordine dell'approssimazione fatta nella misura, posto:

$$x \equiv \frac{R_C}{r_A},$$

la relazione precedente si scrive come:

$$I_m = I \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}.$$

L'errore relativo  $\varepsilon_r$ , che si commette nell'approssimare la corrente  $I$  con quella misurata  $I_m$  vale:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{I - I_m}{I} \right| = \left| \frac{1}{I} \left( I - I \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \right| = \frac{1}{1 + x};$$

da qui segue, ad esempio, che per ottenere un errore relativo inferiore all'1% nella misura è necessario che  $x$  sia maggiore di 100, ovvero che la resistenza interna dell'amperometro  $r_A$  sia almeno 100 volte più piccola di  $R_C$ .

## D.1.2 Il voltmetro

Per voltmetro si intende uno strumento in grado di fornire una misura diretta della differenza di potenziale tra due punti di un circuito. Un galvanometro può essere adoperato per la misura di

differenze di potenziale, tarandone la scala di lettura in volt attraverso la relazione tra la corrente  $I$  che ne attraversa la bobina e la sua resistenza interna  $r_G$ :

$$V = r_G I .$$

Quando l'intensità della corrente  $V/r_G$  supera quella che può misurare un galvanometro, si fa in modo che la differenza di potenziale che agisce su tale strumento sia soltanto una frazione della differenza di potenziale da misurare; a tale scopo si collega in serie al galvanometro una resistenza, in modo da ridurre opportunamente la differenza di potenziale sullo strumento, questo componente è detto *resistenza addizionale*. Pertanto, nella pratica, un voltmetro è costituito da un galvanometro tarato in volt e collegato a delle resistenze in serie situate all'interno o all'esterno dello strumento.

Con riferimento allo schema di figura, in cui  $r_G$  rappresenta la resistenza propria dell'avvolgimento del galvanometro  $G$ , risulta:

$$V = V_A + V_G ;$$

d'altra parte si ha:

$$\frac{V_G}{r_G} = \frac{V_A}{R_A} ,$$

per cui, deducendo  $V_A$  e sostituendola nella precedente relazione, si ottiene:

$$V = V_G + V_G \frac{R_A}{r_G} = V_G \left( 1 + \frac{R_A}{r_G} \right) = V_G m_V , \tag{D.5}$$

dove

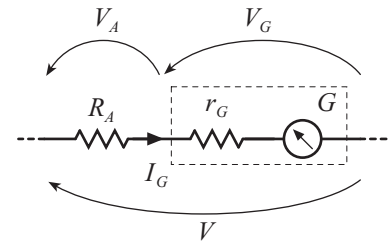
$$m_V \equiv 1 + \frac{R_A}{r_G} \tag{D.6}$$

è detto *potere moltiplicatore* della resistenza addizionale  $R_A$ , poiché rappresenta il fattore moltiplicativo della differenza di potenziale  $V_G$  agente sul galvanometro rispetto a quella da misurare  $V$ , uguale a  $V_G m_V$ . Nei voltmetri, una volta stabilita la resistenza addizionale  $R_A$ , la scala viene tarata direttamente in base alla nuova tensione massima (tensione di fondo scala o portata del voltmetro), pari a  $m_V$  volte la massima differenza di potenziale che può essere applicata al galvanometro. Una volta fissato il potere moltiplicatore, dalla relazione (D.6) è possibile dedurre il valore della resistenza addizionale  $R_A$ :

$$R_A = r_G (m_V - 1) .$$

Il voltmetro rappresentato nella figura, costituito dal galvanometro  $G$  di resistenza interna  $r_G$  e dalla resistenza addizionale  $R_A$ , presenta una resistenza interna  $r_V$  pari alla serie tra  $r_G$  e  $R_A$ :

$$r_V \equiv r_G + R_A .$$

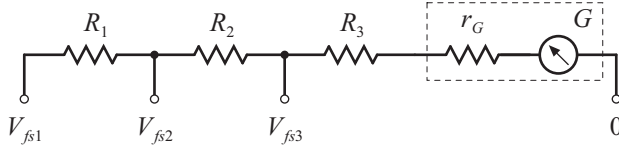


Siccome generalmente  $m_V \gg 1$ , dalla relazione (D.6) segue che  $r_G \ll R_A$ , così, dalla relazione precedente, si ha che la resistenza interna dell'amperometro così formato è:

$$r_V \approx R_A,$$

ovvero è circa pari alla resistenza addizionale.

Ponendo in serie al voltmetro una serie di resistenze dotata di varie prese intermedie è possibile ottenere uno strumento con diversi fondo scala.



**Esempio:** Utilizzando un galvanometro con una resistenza interna  $r_G$  di  $1k\Omega$  ed una corrente di fondo scala  $I_{fs}$  di  $100\mu A$ , realizziamo un voltmetro di portate  $V_{fs1}$ ,  $V_{fs2}$  e  $V_{fs3}$ , rispettivamente pari a  $20V$ ,  $2V$  e  $0.2V$ . La tensione

di fondo scala dello strumento vale:

$$V_{fs} = r_G I_{fs} \approx 0.1V.$$

Dalla relazione (D.5), relativamente alla presa per la misura con la portata  $V_{fs3}$  si ha:

$$V_{fs3} = V_{fs} \left( 1 + \frac{R_3}{r_G} \right),$$

da cui segue:

$$R_3 = r_G \left( \frac{V_{fs3}}{V_{fs}} - 1 \right) \approx 1k\Omega.$$

In corrispondenza dell'ingresso per la misura della tensione con fondo scala  $V_{fs2}$ , dalla (D.5) risulta:

$$V_{fs2} = V_{fs3} \left( 1 + \frac{R_2}{R_3 + r_G} \right),$$

da cui segue:

$$R_2 = (R_3 + r_G) \left( \frac{V_{fs2}}{V_{fs3}} - 1 \right) \approx 18k\Omega.$$

Infine, in corrispondenza dell'ingresso per la misura della tensione con fondo scala  $V_{fs1}$ , dalla (D.5) risulta:

$$V_{fs1} = V_{fs2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3 + r_G} \right),$$

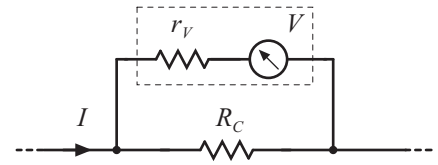
da cui segue:

$$R_1 = (R_2 + R_3 + r_G) \left( \frac{V_{fs1}}{V_{fs2}} - 1 \right) \approx 180k\Omega.$$

Consideriamo un voltmetro  $V$  di resistenza interna  $r_V$ ; per misurare la differenza di potenziale ai capi di un ramo occorre che esso sia applicato in parallelo al ramo considerato. Poiché il voltmetro



presenta una resistenza interna, l'applicazione di tale strumento al ramo comporterà una diminuzione della resistenza propria del ramo e, conseguentemente, un aumento del valore della tensione oggetto della misura. Da ciò segue che è inevitabile un errore sistematico nella misura di tensione ai capi di un ramo fatta con un voltmetro. Consideriamo, ad esempio, il circuito di figura; qualora la resistenza interna del voltmetro fosse infinita, la tensione ai capi della resistenza  $R_C$  varrebbe:



$$V = IR_C$$

tuttavia, poiché in generale  $r_V$  risulta finita, la tensione misurata è:

$$V_m = \frac{I}{\frac{1}{R_C} + \frac{1}{r_V}} = IR_C \frac{1}{1 + \frac{R_C}{r_V}} = V \frac{1}{1 + \frac{R_C}{r_V}}$$

Se  $r_V \gg R_C$  allora  $V_m \approx V$ , cioè l'indicazione fornita dallo strumento sarà tanto più precisa quanto più la resistenza del ramo al quale è applicato lo strumento è piccola rispetto alla resistenza interna del voltmetro.

**Esempio:** Per avere l'ordine dell'approssimazione fatta nella misura, posto:

$$x \equiv \frac{r_V}{R_C},$$

la relazione precedente si scrive come:

$$V_m = V \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

L'errore relativo  $\varepsilon_r$  che si commette nell'approssimare la tensione  $V$  con quella misurata  $V_m$  vale:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{V - V_m}{V} \right| = \left| \frac{1}{V} \left( V - V \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \right| = \frac{1}{1 + x};$$

da qui segue, ad esempio, che per ottenere un errore relativo inferiore all'1% nella misura è necessario che  $x$  sia minore di 100, ovvero che la resistenza interna del voltmetro  $r_V$  sia almeno 100 volte più grande di  $R_C$ .

### D.1.3 Classe di precisione di uno strumento

In generale, per uno strumento, il costruttore specifica la relativa accuratezza attraverso l'indicazione della *classe di precisione*  $c$  definita come l'errore relativo massimo percentuale sul fondo scala:

$$c = 100 \frac{\max |X_m - X|}{X_{fs}},$$

in cui  $X_m$  e  $X$  rappresentano, rispettivamente, il valore misurato e il valore vero della grandezza,  $X_{fs}$  è la portata dello strumento di misura. In particolare, in ambito elettrico, le norme internazionali prevedono dei valori standard per la classe di uno strumento<sup>2</sup>.

Nota la classe di precisione è quindi possibile determinare l'errore sistematico massimo dello strumento, infatti, dalla relazione precedente, si ha:

$$\max |X_m - X| = \frac{c X_{fs}}{100}.$$

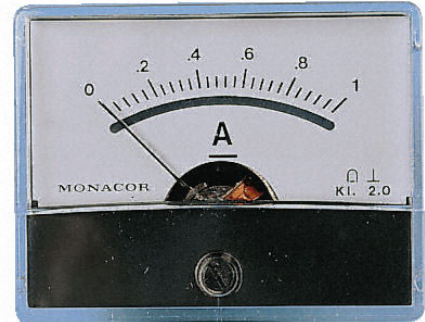
**Esempio:** Consideriamo l'amperometro di figura, di classe pari a 2.0 e fondo scala di 1 A. Dalla relazione precedente segue che l'errore sistematico per tale strumento è:

$$\Delta I_{sist} = \frac{c I_{fs}}{100} = \frac{2.0 \times 1 A}{100} = 20 mA.$$

In alcuni casi il costruttore preferisce caratterizzare l'accuratezza dello strumento non solo in relazione alla portata ma anche in funzione del valore misurato, pertanto, in tale circostanza l'errore sistematico massimo dello strumento è espresso come:

$$|X_m - X| = \frac{c X_{fs} + c_m X_m}{100},$$

in cui  $c$  rappresenta la classe già definita e  $c_m$  è il termine legato al valore misurato.



Amperometro a bobina mobile con fondo scala da 1 A e classe 2.0 (MONACOR).

## D.2 La conversione analogico-digitale

Una grandezza è detta *analogica* qualora sia in grado di assumere tutti i valori possibili interni ad un certo intervallo ed è definita in tutti gli istanti di tempo compresi tra un tempo iniziale ed un tempo finale. Una grandezza con tali caratteristiche è detta *continua* in ampiezza ed in tempo. Viceversa, una grandezza *digitale*, o *numerica*, è sostanzialmente una sequenza di numeri, espressi in una certa base, ed è discreta sia in ampiezza che in tempo. In generale, quindi, una grandezza digitale può assumere un numero limitato di valori; qualora la base sia pari a due, la grandezza digitale è anche detta *binaria*.

L'esigenza della conversione di una grandezza analogica in una digitale nasce dall'opportunità di adoperare opportuni dispositivi per l'elaborazione della grandezza e inoltre perché l'eventuale memorizzazione della grandezza su uno specifico supporto risulta più conveniente qualora tale grandezza sia espressa in formato numerico. L'esigenza opposta, di convertire una grandezza numerica in una analogica emerge, ad esempio, qualora un sistema digitale debba comandare un trasduttore, come, ad esempio, la bobina di un altoparlante.

Il primo dispositivo per la conversione analogico-digitale venne brevettato nel 1937 da Alec H. Reeves presso la ITT di Parigi con l'obiettivo di migliorare l'immunità al rumore nelle trasmissioni telefoniche; il dispositivo progettato da Reeves codificava una tensione in binario in 5 bit (si veda nel seguito per la definizione di tale termine) e faceva ampio uso della tecnologia dei tubi a vuoto da poco sviluppata (si veda il Capitolo 3). Durante la Seconda guerra mondiale H.

<sup>2</sup> Sono previste le classi 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 e 5.0.

S. Black, J. O. Edson e W. M. Goodall presso la Bell Telephone Laboratories migliorarono il circuito di Reeves per realizzare un sistema per la cifratura della voce, allo scopo di rendere sicure le comunicazioni militari; poiché tale lavoro era coperto da segreto, fu reso noto solo dopo la fine della guerra, tra il 1947 e il 1948. Originariamente, lo sviluppo dei computer digitali costituì lo stimolo principale alla realizzazione di sistemi per la conversione analogico-digitale. Nel 1953 Bernard M. Gordon, che aveva a lungo lavorato su sistemi di conversione di dati, fondò la Epsco Engineering; Gordon in precedenza aveva collaborato alla costruzione dell'UNIVAC, il primo computer digitale commerciale e, durante tale attività, si era reso conto dell'utilità di un convertitore analogico-digitale. Nel 1954 la Epsco introdusse il primo convertitore analogico-digitale destinato a scopi commerciali; tale convertitore si basava ancora sulla tecnologia dei tubi a vuoto, dissipava per il suo funzionamento circa 500 W e codificava le tensioni in 11 bit. Questo dispositivo fu il primo convertitore commerciale in grado di elaborare segnali variabili, come i suoni. Con l'invenzione del transistor nel 1947 (si veda l'Appendice C), a partire dalla metà degli anni '50 e fino all'inizio degli anni '60 del ventesimo secolo, la tecnologia di costruzione dei circuiti elettronici migrò dai tubi a vuoto ai transistor, aprendo di conseguenza molteplici possibilità per il progetto dei sistemi di conversione di dati. Negli anni '60 si sviluppò la tecnologia dei circuiti integrati, in cui singoli transistor sono contenuti all'interno di un unico componente; il primo convertitore analogico digitale integrato a 12 bit fu prodotto dalla Analog Devices nel 1969 e richiedeva tuttavia ancora molteplici componenti addizionali per poter essere adoperato nell'ambito di un sistema completo; questi primi convertitori analogico-digitali integrati utilizzavano una tecnologia ibrida, in cui su un supporto di ceramica incapsulato convivevano componenti discreti e componenti integrati. Solo a partire dagli anni '80, sotto la spinta alla miniaturizzazione dei dispositivi, comparvero i primi convertitori monolitici. Attualmente le applicazioni dei convertitori analogico digitali sono numerose e non sono limitate al solo ambito dei sistemi di misura.



Il convertitore analogico-digitale a 11 bit DATRAC progettato da Bernard M. Gordon presso la Epsco. Era realizzato con tubi a vuoto e pesava circa 70 kg.

### D.2.1 Caratteristiche della conversione analogico-digitale

La conversione analogico-digitale richiede la definizione di una legge di corrispondenza tale da consentire l'associazione di valori numerici ai valori analogici propri della grandezza da convertire; assumendo, senza perdita di generalità, che la grandezza  $A$  da convertire sia unipolare (ad esempio sia sempre positiva), tale operazione significa associare a ciascun valore di  $A$  compreso nel suo intervallo di definizione  $(0, S)$ , un numero  $D$  espresso in un certo formato. Siccome  $A$  è continua mentre  $D$  è una quantità discreta, non è possibile identificare una funzione biunivoca tale da associare a ciascun valore di  $A$  uno ed un solo valore di  $D$ . Pertanto si sceglie di associare a ciascun valore di  $D$  un intervallo di valori di  $A$ . Ciò consente di stabilire una corrispondenza tra tutti i valori di  $A$  situati in un certo intervallo con un unico valore di  $D$ ; questa operazione comporta una ovvia perdita di informazione che è possibile quantificare opportunamente. Supponiamo che ciascun intervallo di  $A$ , da porre in corrispondenza con i valori di  $D$ , abbia uguale ampiezza; in questo caso si parlerà di *quantizzazione uniforme* della grandezza analogica. Se il numero di intervalli in cui è suddiviso  $A$  è pari a  $m$ , uguale ai valori definiti della variabile  $D$ , l'ampiezza di ciascun intervallo vale:

$$A_D = \frac{S}{m}. \tag{D.7}$$

Per stimare l'entità della perdita di informazione derivante dall'associazione di un intervallo analogico ad un unico valore numerico, si definisce l'*errore di quantizzazione*  $\varepsilon$  come la differenza tra il valore reale  $A_r$  della grandezza  $A$  ed il valore  $A_i$  in corrispondenza del centro dell'intervallo:

$$\varepsilon \equiv A_r - A_i;$$

siccome l'intervallo considerato ha ampiezza  $A_D$ , dalla relazione (D.7) risulterà:

$$|\varepsilon| \leq \frac{A_D}{2} = \frac{S}{2m}. \quad (\text{D.8})$$

Il numero degli intervalli disponibili è legato alla rappresentazione adoperata per la grandezza numerica; per  $n$  cifre in base  $b$ , il numero dei valori rappresentabili è:

$$m = b^n. \quad (\text{D.9})$$

**Esempio:** Il caso più comune è rappresentato dalla codifica della grandezza  $A$  in binario (dove  $b$  vale 2), allora, con una rappresentazione a  $n$  cifre sono possibili  $2^n$  valori di  $D$ ; così, se  $n$  è pari a 8 ci sono 256 valori compresi tra 0000 0000 e 1111 1111.

Una volta stabilito il numero  $m$  dei valori della grandezza  $D$  e specificata la base di rappresentazione  $b$ , dalla relazione (D.9) la (D.8) diventa:

$$|\varepsilon| \leq \frac{A_D}{2} = \frac{S}{2b^n}; \quad (\text{D.10})$$

questo errore può esprimersi in termini assoluti (volt, ampere, ecc.) solo se la grandezza  $A$  ha una dimensione definita, altrimenti si utilizza l'errore relativo (percentuale). In termini di errore relativo sussiste una precisa relazione fra il numero  $n$  delle cifre e l'errore nella rappresentazione.

**Esempio:** Con riferimento all'esempio precedente in cui  $b$  vale 2 e  $n$  vale 8, dalla relazione (D.10) risulta:

$$|\varepsilon| \leq \frac{S}{2^{n+1}} = \frac{S}{2^9} = \frac{S}{512};$$

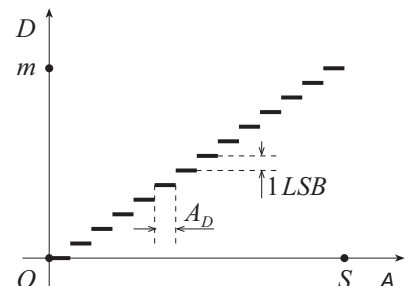
l'errore relativo (massimo) è quindi:

$$\varepsilon_r \% = \frac{S}{2^{n+1}} \times 100 = \frac{100}{2^9} \approx 0.195\%.$$

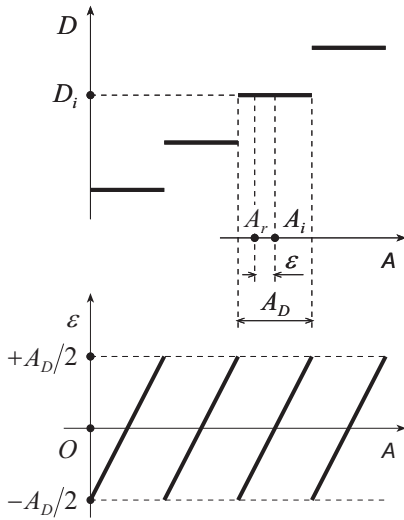
Nel caso di codifica binaria il numero  $D$  si esprime come:

$$D = b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \dots + b_12^1 + b_02^0,$$

dove i coefficienti  $b_k$ , detti *bit*, possono assumere valore 0 o 1; il bit col peso più alto  $b_{n-1}$  è detto *MSB (Most Significant Bit)* mentre quello di peso più basso *LSB (Least Significant Bit)*. Inoltre, per grandezze bipolari, è necessario un ulteriore bit, convenzionalmente di peso massimo, per la codifica del segno. Il bit meno significativo corrisponde alla minima variazione che può avere la variabile numerica  $D$ ; pertanto, a una variazione di una quantità  $A_D$  della grandezza analogica  $A$  corrisponde una variazione di 1 *LSB* della grandezza numerica. Così, una volta stabilito il numero  $n$  dei bit adoperati nella rappresentazione digitale, gli errori possono essere espressi in termini di *LSB* (1 *LSB*, 1/2 *LSB*, ecc.) oppure in valore assoluto (volt, ampere, ecc.).



Il processo di conversione può essere rappresentato tramite una *caratteristica di trasferimento* tra la variabile analogica  $A$  e quella digitale  $D$ . Adoperando questa caratteristica si può ricavare, per ogni valore di  $A$  la corrispondente rappresentazione numerica di  $D$ ; si osservi che tutti i punti all'interno di uno stesso intervallo di ampiezza  $A_D$  corrispondono ad uno stesso valore di  $D$ , inoltre ogni gradino ha larghezza  $A_D$  mentre il salto fra un gradino e il successivo corrisponde alla variazione di 1 *LSB*.



Con riferimento alla figura, i punti  $A_i$  e  $D_i$  corrispondono al centro dell' $i$ -esimo gradino ed al valore  $D_i$  è associato ogni valore  $A_r$  compreso nell'intervallo  $A_D$ . L'errore di quantizzazione è compreso fra  $-A_D/2$  e  $+A_D/2$  e, al variare della grandezza  $A$  dal limite inferiore a quello superiore di un intervallo  $A_D$ , l'errore varia tra tali estremi a partire da  $-A_D/2$  in modo lineare; questo andamento si ripete periodicamente per ogni intervallo  $A_D$ .

All'aumentare di  $m$ , cresce il numero di gradini corrispondenti alla variabile numerica e, contemporaneamente, diminuisce l'ampiezza degli intervalli  $A_D$ . Per  $m$  sufficientemente elevato, la caratteristica di conversione diventa assimilabile ad una retta continua.

Tuttavia, col crescere di  $m$  aumenta anche la complessità del circuito di conversione e, di conseguenza, il suo costo, così, ragioni di carattere economico inducono a scegliere  $m$  quanto più piccolo è possibile. Occorre pertanto identificare un criterio che consenta di stabilire il valore di  $m$  sufficiente, in relazione alle caratteristiche del sistema di conversione che si intende sviluppare.

Nota la legge di variazione dell'errore di quantizzazione, è possibile stabilirne il valore efficace:

$$\varepsilon_{eff} = \sqrt{\frac{1}{A_D} \int_{-A_D/2}^{A_D/2} \varepsilon^2 d\varepsilon} = \frac{A_D}{2\sqrt{3}},$$

tale quantità rappresenta il valore efficace dell'errore associato al processo di quantizzazione della grandezza analogica  $A$ .

**Esempio:** Supponiamo, per fissare le idee che  $A$  sia una tensione compresa tra  $0V$  e  $V_M$  allora, in corrispondenza di una codifica binaria, l'ampiezza  $A_D$  di ciascun intervallo è:

$$A_D = \frac{V_M}{m} = \frac{V_M}{2^n}. \tag{D.11}$$

Il valore efficace dell'errore di quantizzazione vale:

$$V_{\varepsilon_{eff}} = \frac{V_M}{2^n \sqrt{12}};$$

Tale quantità può essere riguardata come il valore efficace di una tensione che, sovrapposta ad una tensione comunque variabile in uno degli intervalli di ampiezza data dalla relazione (D.11), provoca l'emissione dello stesso codice, corrispondente allo specifico intervallo.

## D.3 Il multimetro digitale

Per multimetro si intende un dispositivo che combina diversi strumenti di misura; generalmente un multimetro è in grado di misurare correnti e differenze di potenziale sia continue che alternate e resistenze, su differenti intervalli di misura. I multimetri analogici adoperano un galvanometro a bobina mobile dotato di diverse scale in relazione alle differenti grandezze da misurare; nei multimetri digitali il risultato della misura è fornito in forma numerica su un opportuno display. Poiché in taluni casi una rappresentazione analogica della grandezza si rivela utile<sup>3</sup>, spesso i display dei multimetri digitali integrano una barra di lunghezza proporzionale alla quantità misurata.

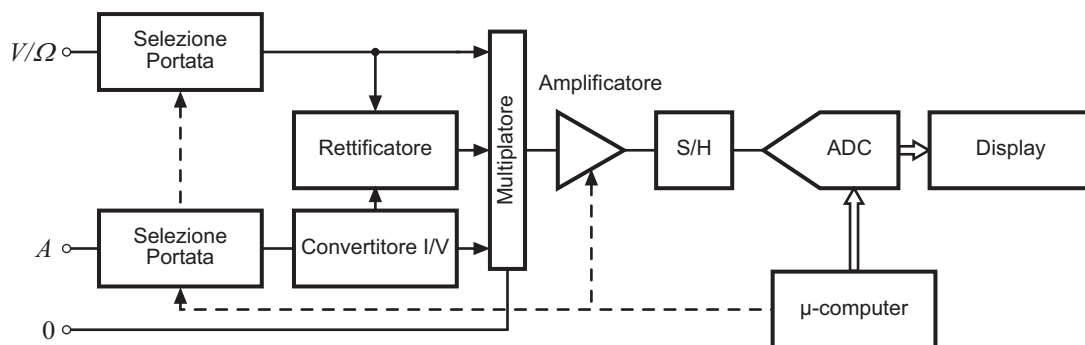
L'esigenza di un dispositivo che unificasse diversi strumenti di misura emerse negli anni '20 del ventesimo secolo in relazione alla costruzione ed alla manutenzione dei primi ricevitori radio realizzati con tubi a vuoto. L'invenzione del primo multimetro è attribuita all'ingegnere Donald MacAdie che lavorava presso il servizio postale britannico; MacAdie denominò tale strumento *AVOmeter*. L'*AVOmeter* era in grado di misurare correnti, tensioni e resistenze ed evitava così di dover trasportare diversi strumenti nelle operazioni di manutenzione delle reti per telecomunicazioni. A partire dal 1923 l'*AVOmeter* fu commercializzato in varie versioni fino agli inizi degli anni '50, con caratteristiche pressoché invariate rispetto ai primi modelli. Il primo voltmetro elettronico basato sui tubi a vuoto fu realizzato da Eric Bailleul Moullin nel 1922 presso l'Università di Cambridge e fu successivamente commercializzato dalla Cambridge Scientific Instruments; a partire da questo modello, furono sviluppate diverse versioni sia per misure in continua che in alternata. Con l'introduzione dei primi convertitori analogico-digitali ci si rese conto che la tecnica digitale consente di migliorare notevolmente l'immunità ai disturbi e realizzare misure più stabili. Il passaggio alla fase commerciale richiese tuttavia il cambio di tecnologia dai tubi a vuoto ai transistor, in quanto i primi convertitori avevano dimensioni, pesi e consumi in conflitto con le esigenze di portabilità. A partire dagli anni '70, quando il prezzo dei semiconduttori diminuì notevolmente, i circuiti di conversione divennero compatibili con tali esigenze e divennero comuni i multimetri digitali portatili.



Una delle prime versioni dell'*AVOmeter*. La selezione del tipo di misura (corrente, tensione o resistenza) è fatta con la manopola di destra, la portata si cambia con la manopola di sinistra. I contatti per la misura sono in basso (*BBC*).

Nella figura seguente è mostrato lo schema a blocchi di un multimetro digitale. In generale sono previsti due ingressi separati per le misure di tensione e resistenza ( $V/\Omega$ ) e corrente ( $A$ ), entrambi gli ingressi sono riferiti ad un terminale comune (0). L'ingresso per la misura di corrente usualmente è protetto con un opportuno fusibile.

Per entrambi gli ingressi il primo stadio è costituito da un selettore (*Selezione Portata*) che regola anche automaticamente la portata dello strumento in relazione all'entità della grandezza da misurare; per le misure di resistenza, in corrispondenza di tale stadio viene anche effettuata la conversione in una tensione del valore della resistenza compresa tra gli ingressi  $V/\Omega$  e 0. Poiché il convertitore analogico-digitale (*ADC*) opera la conversione della tensione applicata in ingresso, lo



Schema a blocchi di un multimetro digitale.

<sup>3</sup> Ad esempio quando si vuole tenere sotto controllo una grandezza che varia rapidamente.

stadio successivo per la misura della corrente (*Convertitore I/V*) converte tale corrente in una tensione ad essa proporzionale. Il multimetro è utilizzato anche per misure in corrente alternata, pertanto, nell'eventualità di una tale condizione di misura, un ulteriore stadio (*Rettificatore*), calcola il valore efficace delle grandezze. In relazione alla misura scelta, la tensione corrispondente viene trasferita attraverso un opportuno blocco (*Moltiplicatore*) allo stadio successivo (*Amplificatore*) dove la tensione viene amplificata, anche in maniera automatica, qualora la sua ampiezza sia piccola rispetto alla dinamica del convertitore analogico-digitale. I blocchi fino ad ora descritti sono detti di *condizionamento* delle grandezze applicate in ingresso, in quanto adeguano il dispositivo di misura relativamente alla grandezza da misurare.

Siccome il convertitore analogico-digitale richiede un certo tempo per eseguire la conversione, è necessario che la tensione da convertire sia presente in maniera stabile al suo ingresso durante questo tempo. A tale scopo, prima di questo dispositivo è situato un blocco per il campionamento del segnale (*S/H*, *Sample and Hold*). L'elemento principale di tale blocco è rappresentato da un condensatore a basse perdite che viene prima caricato alla tensione da misurare e quindi scollegato dal circuito d'ingresso, in modo da mantenersi carico il tempo necessario affinché il convertitore analogico-digitale completi la conversione; al termine di tale fase il condensatore viene scaricato e collegato nuovamente al circuito d'ingresso per la successiva misura.

Il convertitore analogico-digitale opera la conversione della tensione così condizionata e resa stabile dallo stadio *S/H* e trasferisce ai circuiti di comando del *display* il dato digitale, corrispondente alla grandezza analogica presente in ingresso. Generalmente, tutti i processi automatici del multimetro sono gestiti da un microprocessore ( *$\mu$ -computer*); i multimetri moderni sono basati su circuiti monolitici che integrano varie funzioni, quali, ad esempio il blocco di *S/H*, il convertitore analogico-digitale ed il dispositivo per la selezione automatica della portata. L'integrazione di più componenti all'interno di un unico circuito integrato ha notevolmente ridotto il costo dei multimetri digitali di ultima generazione, senza penalizzarne le caratteristiche.

Il display di un multimetro digitale permette la visualizzazione in forma numerica del risultato della misura ed è costituito da singole unità di visualizzazione a sette segmenti; il loro numero, corrispondente alle cifre visualizzabili, costituisce un elemento di caratterizzazione del multimetro. Solitamente, il numero di cifre rappresentabili assume la forma  $N p/q$ , in cui  $N$  rappresenta la capacità del display di visualizzare  $N$  cifre con valori compresi tra 0 a 9; con la frazione  $p/q$  si indica la frazione del numero di bit necessari<sup>4</sup> a rappresentare una cifra nell'intervallo tra 0 a 9, che viene adoperata per indicare il segno del numero e la cifra più significativa.

**Esempio:** Consideriamo un multimetro digitale in grado di visualizzare 3 cifre e  $\frac{1}{2}$ ; questo significa che lo strumento può visualizzare 3 cifre ed ha un'ulteriore cifra attraverso la quale visualizzare 2 *bit* di informazione, uno per il segno e l'altro per i numeri 0 o 1. In questa maniera  $\frac{1}{4}$  dei *bit* necessari a codificare una cifra tra 0 e 9 sono disponibili per codificare il segno ed  $\frac{1}{4}$  di tali *bit* sono disponibili per codificare i numeri 0 o 1, complessivamente  $\frac{1}{2}$ . Pertanto, in questo caso la massima indicazione mostrata dal multimetro è  $\pm 1999$ . Il vantaggio di tale modalità di rappresentazione può essere messo in luce attraverso un esempio: consideriamo un multimetro con 3 sole cifre visualizzabili, cioè senza la mezza cifra e supponiamo si voglia misurare una tensione intorno a 1 V. Nel passaggio da 999 mV a 1.001 V, la variazione di 2 mV determina un cambiamento di scala così, in uno strumento con 3 cifre, le letture corrispondenti saranno .999 V e 1.00 V, per cui nel cambiamento di scala viene a perdersi una cifra decimale. Se invece lo strumento è



Multimetro digitale da 4 cifre e  $\frac{3}{4}$ . In questo caso possono essere mostrate 4 cifre ed inoltre sono disponibili 3 *bit* attraverso i quali codificare il segno ed i numeri tra 0 e 3. Pertanto la massima indicazione mostrata dallo strumento è  $\pm 3999$  (UNI-TREND Technology).

<sup>4</sup> Per codificare i numeri tra 0 a 9 sono sufficienti 4 bit, poiché in binario il numero 9 è 1001.

con 3 cifre e  $\frac{1}{2}$ , le rispettive indicazioni saranno  $0.999 V$  e  $1.001 V$ , mantenendo così intatta l'informazione sull'ultima cifra.

### D.3.1 Accuratezza di un multimetro digitale

I costruttori di multimetri digitali specificano generalmente l'accuratezza dei loro strumenti indicando sia l'errore sistematico che quello casuale; in particolare, l'errore sistematico può essere espresso attraverso l'analogo della classe dello strumento, così come descritto al Paragrafo D.1.3, oppure come l'errore relativo percentuale sul valore misurato (*reading*); l'errore casuale è indicato come numero di unità della cifra<sup>5</sup> meno significativa del display.

**Esempio:** Supponiamo di aver effettuato una misura di una corrente continua  $I$  di  $90 mA$  con un multimetro digitale da 3 cifre e  $\frac{1}{2}$ , di fondo scala pari a  $100 mA$  e di accuratezza pari a  $\pm 0.1\% \text{ reading} \pm 1 \text{ digit}$ . Pertanto l'errore sistematico  $\Delta I_{sist}$  è:

$$\Delta I_{sist} = \frac{0.1 \times 90 mA}{100} \approx 0.09 mA.$$

Poiché lo strumento è da 3 cifre e  $\frac{1}{2}$ , l'indicazione fornita dallo strumento sarà  $90.0$ , siccome la  $\frac{1}{2}$  cifra codifica il segno e i numeri 0 o 1; così l'errore casuale  $\Delta I_{casuale}$  è pari ad una unità della cifra meno significativa, cioè  $0.1 mA$ . La misura sarà quindi:

$$I = 90.00 mA \pm 0.09 mA \pm 0.10 mA,$$

in cui il primo errore è quello sistematico e il secondo è quello casuale.

**Esempio:** Supponiamo di aver effettuato una misura di una tensione continua  $V$  di  $50 V$  con un multimetro digitale con un fondo scala di  $100 V$ , con accuratezza pari a  $\pm 0.02\% \text{ fondo scala} \pm 0.1\% \text{ reading}$ . Pertanto l'errore sistematico  $\Delta V_{sist}$  è:

$$\Delta V_{sist} = \frac{0.02 \times 100 V + 0.1 \times 50 V}{100} \approx 0.07 V.$$

La misura sarà quindi:

$$V = 50.00 V \pm 0.07 V.$$

**Esempio:** Supponiamo di aver effettuato una misura di una tensione continua  $V$  di  $123.4 mV$  con un multimetro digitale da 3 cifre e  $\frac{3}{4}$ , con fondo scala di  $400 mV$  e di accuratezza pari a  $\pm 0.3\% \text{ reading} \pm 2 \text{ digits}$ . Pertanto l'errore sistematico  $\Delta V_{sist}$  è:

$$\Delta V_{sist} = \frac{0.3 \times 123.4 mV}{100} \approx 0.4 mV.$$

Poiché lo strumento è da 3 cifre e  $\frac{3}{4}$  e l'errore casuale  $\Delta V_{casuale}$  è pari due unità della cifra meno significativa allora tale errore varrà  $0.2 mV$ . La misura sarà pertanto:

$$V = 123.4 mV \pm 0.4 mV \pm 0.2 mV,$$

in cui il primo errore è quello sistematico e il secondo è quello casuale.

---

<sup>5</sup> In genere i costruttori usano il termine inglese *digit* per cifra.



## D.4 Misure di resistenza

Diversamente dalle misure di correnti o di differenze di potenziale, nelle misure di resistenza si determina una proprietà fisica di un materiale impiegato come conduttore in un circuito. La resistenza viene in genere misurata facendo attraversare il conduttore da una corrente continua ed i fattori fisici che influiscono sul risultato di una misura sono: la temperatura dell'ambiente e il riscaldamento del conduttore; la resistenza dei contatti, soprattutto nel caso di misure di piccoli valori resistivi; le resistenze parassite situate in parallelo al conduttore, nel caso di misure di grandi valori resistivi; le tensioni che si originano nel conduttore per effetti termici, elettrolitici, ecc.; le caratteristiche reattive del conduttore.



Riproduzione dell'apparato adoperato da Ohm. La corrente che attraversa una barra metallica deflette l'ago magnetizzato situato sopra di essa e contenuto all'interno di una campana di vetro; l'angolo di deflessione è proporzionale alla intensità della corrente. Il generatore di forza elettromotrice è una termocoppia le cui due estremità sono, rispettivamente, riscaldate col vapore e raffreddate col ghiaccio all'interno di appositi contenitori (Science Museum, Londra).

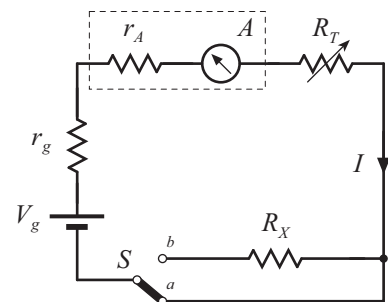
Nella pratica tutti i metodi per la misura di resistenze che adoperano reti elettriche si basano sulla legge di Ohm. Per i componenti che non seguono tale legge, la loro resistenza è definita limitatamente a specifiche condizioni di funzionamento, al cambiare delle quali si modifica di conseguenza anche il corrispondente valore resistivo.

Sebbene altri prima di lui svolsero analoghe determinazioni, a George Simon Ohm vengono attribuite le prime misure sistematiche di resistenza. Originariamente Ohm adoperò quali generatori delle pile di Volta, la cui forza elettromotrice erogata risultava piuttosto sensibile alla resistenza che ne costituiva il carico. Questo lo portò, nel 1825, a stabilire erroneamente una relazione logaritmica tra l'intensità della corrente misurata e la lunghezza di un filo conduttore. Dopo aver letto i resoconti di Ohm, Poggendorff comprese l'influenza del generatore nella misura e suggerì ad Ohm di fare uso di un altro tipo di generatore, basato sull'effetto termoelettrico<sup>6</sup> da poco scoperto. Per misurare l'intensità della corrente attraverso un circuito, Ohm adoperava un ago magnetico sospeso ad un opportuno supporto mobile con un filo metallico appiattito; quando la corrente parallela all'ago ne deviava l'orientazione, Ohm torceva il filo di sospensione sino a riportare l'ago nella posizione di riposo, ed assumeva che l'intensità della corrente fosse proporzionale all'angolo di torsione del filo.

I metodi che saranno descritti nel seguito sono efficaci per la misura di resistenze adoperate in circuiti che funzionano anche con generatori sinusoidali, purché a bassa frequenza. Ad alta frequenza, a causa dell'effetto pellicolare<sup>7</sup>, la resistenza differisce da quella misurata con tali approcci.

### D.4.1 Ohmetro

Lo schema di principio di un ohmetro è mostrato in figura; la resistenza variabile  $R_T$ , oltre che per proteggere l'amperometro  $A$ , di resistenza interna  $r_A$ , serve per la taratura dell'intero strumento. Quando il deviatore  $S$  è nella posizione  $a$  la corrente indicata dall'amperometro vale:



<sup>6</sup> L'effetto termoelettrico, scoperto da Thomas Johan Seebeck nel 1821, è la generazione di una differenza di potenziale tra due conduttori metallici, o semiconduttori, soggetti ad una differenza di temperatura.

<sup>7</sup> L'effetto pellicolare è la tendenza di una corrente alternata di distribuirsi non uniformemente in un conduttore, per cui la sua densità risulta maggiore sulla superficie rispetto che all'interno. Questo effetto, scoperto da Kelvin nel 1887, determina un aumento della resistenza dei conduttori alle alte frequenze.

$$I = \frac{V_g}{r_g + r_A + R_T};$$

in tale condizione si varia  $R_T$  in modo che l'ampmetro indichi il suo valore di fondo scala. Ciò garantisce la possibilità di adoperare l'intera scala dello strumento, massimizzando la dinamica dell'ohmetro. Quando il deviatore viene poi portato nella posizione  $b$ , la corrente indicata è:

$$I = \frac{V_g}{r_g + r_A + R_T + R_X}.$$

Siccome quando  $R_X$  è infinita la corrente indicata è nulla, in questo modo a qualsiasi valore di  $R_X$  compreso tra zero e infinito, dalla relazione precedente corrisponderà, un valore della corrente indicato dall'ampmetro. Se l'ampmetro è analogico, è possibile tararne la scala direttamente in *ohm*. In particolare, il fondo scala dell'ampmetro corrisponde al valore più basso di resistenza mentre lo zero dell'ampmetro indica il valore resistivo più alto. In un ohmetro digitale l'ampmetro è realizzato attraverso un convertitore analogico-digitale e le procedure di taratura e di conversione corrente-resistenza sono fatte automaticamente attraverso il processore che elabora il dato misurato.

#### D.4.2 Metodo di confronto

Si consideri il circuito di figura, col doppio deviatore  $S$  nella posizione  $a$  la corrente  $I_a$  indicata dall'ampmetro  $A$  vale:

$$I_a = \frac{V_g}{r_g + r_A + R_C + \frac{R_X r_V}{R_C + r_V}} = \frac{V_g}{r_g + r_A + R_X \frac{1}{1 + \frac{R_X}{r_V}} + R_C};$$

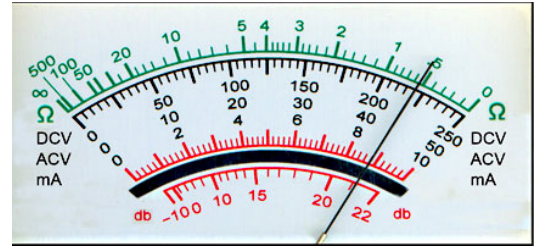
se  $R_X \ll r_V$  risulta:

$$I_a \approx \frac{V_g}{r_g + r_A + R_X + R_C} \equiv I$$

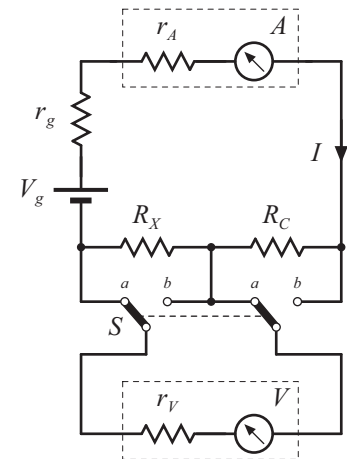
e, sempre in tale ipotesi, la differenza di potenziale  $V_X$  misurata dal voltmetro  $V$  è:

$$V_X = I_a \frac{R_X r_V}{R_X + r_V} = I_a R_X \frac{1}{1 + \frac{R_X}{r_V}} \approx I R_X. \quad (D.12)$$

Col doppio deviatore  $S$  nella posizione  $b$  la corrente  $I_b$  indicata dall'ampmetro  $A$  vale:



Display di un multimetro analogico. Si noti come, a differenza delle altre, la scala di lettura per l'ohmetro (più in alto) ha il valore minimo in corrispondenza dell'estremità destra e quello massimo all'estremità sinistra.



$$I_b = \frac{V_g}{r_g + r_A + R_X + \frac{R_C r_V}{R_C + r_V}} = \frac{V_g}{r_g + r_A + R_X + R_C \frac{1}{1 + \frac{R_C}{r_V}}};$$

se  $R_C \ll r_V$  risulta:

$$I_b \approx \frac{V_g}{r_g + r_A + R_X + R_C} = I$$

e, sempre in tale ipotesi, la differenza di potenziale  $V_C$  misurata dal voltmetro è:

$$V_C = I_b \frac{R_C r_V}{R_C + r_V} = I_b R_C \frac{1}{1 + \frac{R_C}{r_V}} \approx I R_C. \tag{D.13}$$

Dividendo membro a membro le relazioni (D.12) e (D.13) si ottiene:

$$R_X = \frac{V_X}{V_C} R_C.$$



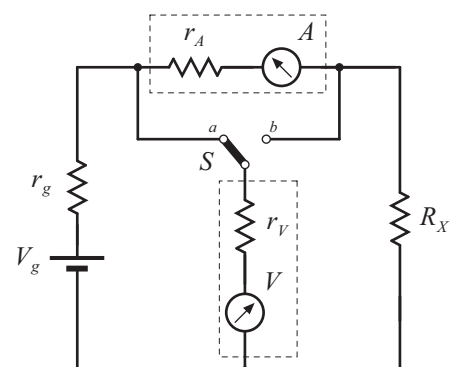
Resistenza campione (WIKI)

Da tale identità si può dedurre il valore della resistenza  $R_X$ , noto il valore della resistenza  $R_C$  e misurate le differenze di potenziale  $V_C$  e  $V_X$  nelle due condizioni; la resistenza  $R_C$  è un componente di precisione (*resistenza campione*). La precedente relazione mette in luce l'indipendenza della misura dall'intensità della corrente attraverso il circuito, purché essa non cambi spostando il deviatore dalla posizione  $b$ , ovvero quando il voltmetro misura la caduta di tensione ai capi di  $R_C$ , alla posizione  $a$ , ovvero quando il voltmetro misura la caduta di tensione ai capi di  $R_X$ . Affinché si verifichi tale condizione occorre che  $R_C, R_X \ll r_V$  (oppure che la resistenza  $R_C$  sia dello stesso ordine di grandezza di  $R_X$ ).

### D.4.3 Metodo voltamperometrico

Questo metodo è basato sull'applicazione diretta della legge di Ohm. Come si evince dallo schema, il voltmetro può essere posto a monte (deviatore  $S$  nella posizione  $a$ ) o a valle (deviatore  $S$  nella posizione  $b$ ) dell'amperometro; a tali disposizioni corrispondono differenti errori sistematici.

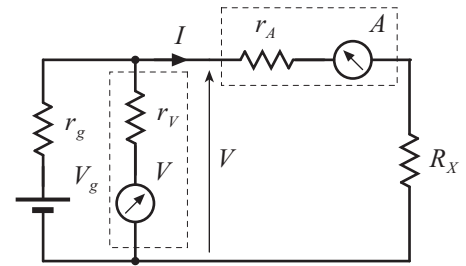
Consideriamo lo schema in cui il voltmetro è collegato a monte dell'amperometro; indicando con  $V$  e  $I$ , rispettivamente, la differenza di potenziale misurata dal voltmetro e la corrente misurata dall'amperometro, si ha:



$$V = I(r_A + R_X),$$

pertanto, posto

$$R_m \equiv \frac{V}{I}$$



la resistenza misurata attraverso tale metodo, si ha:

$$R_X = \frac{V}{I} - r_A = R_m - r_A = R_m \left( 1 - \frac{r_A}{R_m} \right).$$

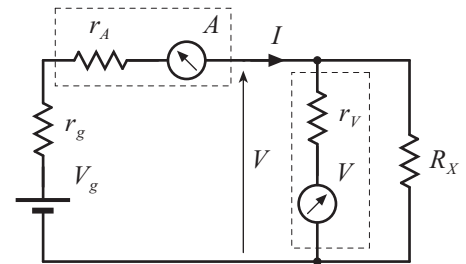
Se  $R_m \gg r_A$  allora  $R_X \approx R_m$ . Pertanto tale configurazione è tanto più efficace quanto più la resistenza da misurare è grande rispetto alla resistenza interna  $r_A$  dell'amperometro.

Consideriamo lo schema secondo cui il voltmetro è posto a valle dell'amperometro; si ha:

$$V = I \frac{1}{\frac{1}{r_V} + \frac{1}{R_X}},$$

da cui segue:

$$R_X = \frac{1}{\frac{V}{I} - \frac{1}{r_V}} = \frac{1}{\frac{1}{R_m} - \frac{1}{r_V}} = R_m \frac{1}{1 - \frac{R_m}{r_V}}.$$



Se  $R_m \ll r_V$  allora  $R_X \approx R_m$ . Pertanto tale configurazione è tanto più efficace quanto più la resistenza da misurare è piccola rispetto alla resistenza interna  $r_V$  del voltmetro.

#### D.4.4 Ponte di Wheatstone

Il ponte di Wheatstone rappresenta il metodo più preciso per la misura di resistenze; è costituito da quattro resistenze, una delle quali è quella da misurare, collegate in modo da formare un quadrilatero, da un generatore di tensione disposto lungo una diagonale e da un galvanometro inserito sull'altra diagonale. Il ponte si dice *bilanciato* quando è nulla la differenza di potenziale tra i vertici della diagonale in cui è situato il galvanometro; in tale condizione tra i valori delle resistenze che costituiscono il ponte sussiste una specifica relazione.

Nel 1833 il fisico inglese Samuel Hunter Christie per primo descrisse il circuito ora noto come ponte di Wheatstone, proponendolo come metodo per la misura e il confronto di resistenze. Tuttavia la sua pubblicazione passò praticamente inosservata, perché scritta in maniera piuttosto farraginoso. Quando nel 1843 Charles Wheatstone ripropose il metodo di Christie in maniera più chiara, si comprese finalmente l'utilità dell'approccio proposto, associandolo definitivamente al suo nome, benché Wheatstone non se ne attribuì mai la paternità.



Charles Wheatstone

Consideriamo il circuito di figura; variando le resistenze  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$  è possibile conseguire la condizione in cui i potenziali ai nodi  $C$  e  $D$  sono uguali:

$$V_C = V_D,$$

e pertanto il galvanometro non è percorso da corrente. In tale situazione, si ha:

$$I_1 = I_2,$$

$$I_3 = I_4,$$

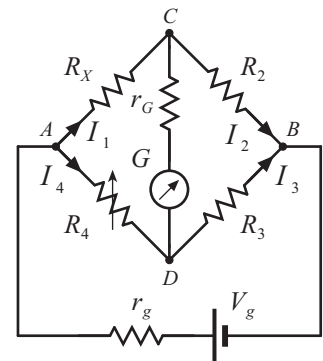
$$(D.14)$$

$$(D.15)$$

poiché il ramo  $CD$  non è percorso da corrente. Applicando la legge di Kirchhoff per le tensioni, rispettivamente, alle maglie  $ACDA$  e  $CBDC$ , si ha:

$$I_1 R_X = I_4 R_4,$$

$$I_2 R_2 = I_3 R_3.$$



Dividendo membro a membro tali relazioni ed adoperando le identità (D.14) e (D.15), si ottiene:

$$R_X = R_4 \frac{R_2}{R_3}. \tag{D.16}$$

Pertanto, noti i valori delle resistenze  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$  si può dedurre il valore di  $R_X$ .

Generalmente nella realizzazione pratica del ponte di Wheatstone si fa in modo che il rapporto  $R_2/R_3$  che compare nella (D.16) assuma la forma  $10^n$ , così le cifre che esprimono la resistenza  $R_4$  forniscono il valore della resistenza  $R_X$  a meno della posizione della virgola.



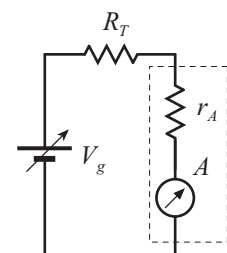
Ponte di Wheatstone (University of Nebraska, Lincoln, USA).

**Esempio:** L'accuratezza con cui si deduce dall'espressione (D.16) il valore della resistenza  $R_X$ , trascurando le altre cause d'errore, quali, ad esempio, le resistenze dovute ai contatti, le resistenze dei conduttori di collegamento, l'imperfetto azzeramento del galvanometro, ecc., dipende dall'accuratezza con cui si conoscono i valori di  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ ; in pratica, dalla relazione precedente si ha:

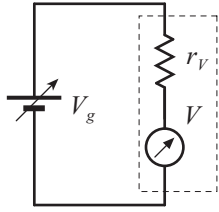
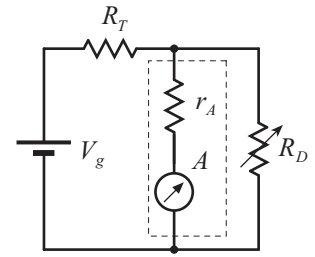
$$\frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_4}{R_4}.$$

Ne segue che per stabilire il valore di  $R_X$  con una certa accuratezza, occorre che le altre resistenze che costituiscono il ponte siano note con una accuratezza almeno tre volte superiore.

**Esempio:** (determinazione della resistenza interna di un amperometro) Consideriamo il circuito di figura in cui il generatore  $V_g$  eroga una forza elettromotrice che possa essere variata e la resistenza  $R_T$  sia tale che il rapporto  $V_g/R_T$  risulti prossimo al valore di fondo scala dell'amperometro. Regolando la forza elettromotrice del generatore è possibile fare in modo che l'indicazione dell'amperometro raggiunga il valore di fondo scala. Fissato il corrispondente valore della forza elettromotrice erogata dal generatore, si collega in parallelo all'amperometro una resistenza variabile  $R_D$  e se ne varia il valore fino a che l'indicazione



mostrata dall'ampmetro sia pari alla metà del suo fondo scala. In tale condizione, la corrente che attraversa lo strumento è pari a quella che passa nella resistenza  $R_D$ , pertanto tale resistenza è uguale alla resistenza interna dell'ampmetro  $r_A$ .



**Esempio:** (determinazione della resistenza interna di un voltmetro)

Consideriamo il circuito di figura in cui il generatore  $V_g$  eroga una

forza elettromotrice che possa essere variata e che possa essere resa prossima al valore di fondo scala del voltmetro. Regolando la forza elettromotrice del generatore è possibile fare in modo che l'indicazione del voltmetro raggiunga il valore di fondo scala. Fissato il corrispondente valore della forza elettromotrice erogata dal generatore, si collega in serie

al voltmetro una resistenza variabile  $R_D$  e se ne varia il valore fino a che l'indicazione mostrata dal voltmetro sia pari alla metà del suo fondo scala. In tale condizione, la differenza di potenziale ai capi dello strumento è pari a quella ai capi della resistenza  $R_D$ , pertanto tale resistenza è uguale alla resistenza interna del voltmetro  $r_V$ .

