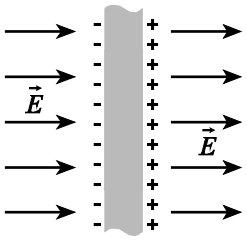
2 SISTEMI DI CONDUTTORI E DIELETTRICI

2.1 Conduttori

Si dicono *conduttori* elettrici quei materiali al cui interno, sotto opportune condizioni, è possibile il movimento di una parte delle cariche che li costituiscono. I materiali conduttori sono distinti in due categorie: I *conduttori di prima specie*, come i metalli o i semiconduttori, il cui meccanismo di conduzione è riconducibile al moto di cariche di un solo segno; i *conduttori di seconda specie*, come i gas ionizzati[1] o le soluzioni elettrolitiche[2], la cui conduzione è dovuta a spostamenti di cariche di entrambi i segni; questo secondo tipo di conduttori non è oggetto di studio nell'ambito dell'elettrostatica. Dal punto di vista microscopico un buon conduttore elettrico può essere generalmente rappresentato come un reticolo ionico immerso in un gas di elettroni liberi di muoversi all'interno del materiale. In assenza di un moto netto degli elettroni in una particolare direzione il conduttore è detto in *equilibrio elettrostatico*. In tale circostanza valgono le seguenti proprietà:

1. Il campo elettrico all'interno del conduttore è ovunque nullo;
2. Un qualunque eccesso di carica del conduttore deve localizzarsi superficialmente;
3. All'esterno di un conduttore carico, in prossimità della superficie, il campo elettrico è diretto perpendicolarmente alla superficie ed ha intensità pari a σ/ε_0, dove σ è la densità superficiale di carica;
4. Tutti i punti di un conduttore sono allo stesso potenziale;
5. Su un conduttore di forma irregolare la carica tende ad accumularsi laddove la curvatura della superficie è maggiore, ovvero sulle punte.



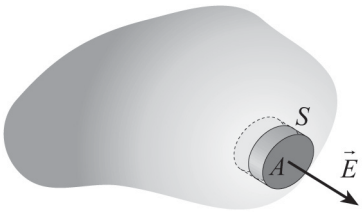
La prima proprietà è conseguenza del fatto che qualora il campo non fosse nullo si determinerebbe il moto degli elettroni liberi e non ci sarebbe equilibrio. Inoltre, se viene applicato un campo elettrico esterno, gli elettroni liberi si spostano causando degli accumuli di carica in corrispondenza delle superfici del conduttore (si veda la figura). Tali accumuli creano un campo elettrico opposto al campo esterno; la densità superficiale di carica cresce fino a che l'intensità di questo campo non uguaglia quella del campo esterno, annullando quindi il campo all'interno del conduttore; per un buon conduttore i tempi tipici per conseguire questa condizione di equilibrio sono dell'ordine di $10^{-16}\ s$.

---

[1] Sono dette *ionizzate* le sostanze i cui atomi o molecole, originariamente neutri, hanno subito l'addizione o la rimozione di uno o più elettroni attraverso un processo che comporta un assorbimento di energia, ad esempio un urto con altre particelle. Se il numero di elettroni al termine del processo è minore del numero atomico, la sostanza acquista una carica elettrica positiva, se invece il numero di elettroni è maggiore del numero atomico, la sostanza si carica negativamente. L'energia necessaria a rimuovere un elettrone da un atomo al quale è legato è detta *energia di ionizzazione* ed il suo valore, nel caso degli atomi, dipende dalla distanza dell'elettrone dal nucleo.

[2] Sono dette *soluzioni elettrolitiche* o *elettroliti* le sostanze che si ionizzano quando poste in soluzione oppure quando sono portate allo stato fuso.

Consideriamo un conduttore carico in equilibrio elettrostatico; per effetto della mobilità le cariche si disporranno sulla superficie del conduttore a causa della reciproca forza elettrostatica che le costringe a posizionarsi alla massima distanza possibile; per provare tale proprietà consideriamo all'interno del conduttore una superficie chiusa S prossima quanto si vuole alla superficie del conduttore (si veda la figura). Poiché all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo, dalla legge di Gauss segue che all'interno della superficie S, e quindi del conduttore, la carica netta è nulla. Pertanto se il conduttore è carico, tale carica deve situarsi sulla superficie. Questa proprietà fu osservata nel 1769 da Beccaria e successivamente dimostrata da Coulomb.



Consideriamo un conduttore carico all'equilibrio e facciamo riferimento ad una superficie S a forma di cilindro con le superfici di base A sufficientemente piccole da potersi ritenere localmente parallele alla superficie del conduttore e con parte del cilindro contenuta nel conduttore (si veda la figura). Attraverso la parte interna il flusso del campo elettrico è nullo essendo nullo il campo elettrico internamente al conduttore. Inoltre il campo è normale alla superficie del conduttore perché, qualora vi fosse una componente tangenziale, determinerebbe un moto delle cariche e quindi una condizione di non equilibrio; perciò, è nullo il flusso anche attraverso la superficie laterale del cilindro. Così il flusso attraverso la superficie del cilindro vale $E\,A$, dove il campo elettrico $\vec{E}$ è diretto lungo la normale $\hat{n}$ alla superficie del conduttore. Applicando la legge di Gauss alla superficie del cilindro si ha quindi:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\,A = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0},$$

in cui σ è la densità locale di carica superficiale. Siccome $\vec{E}$ è diretto lungo $\hat{n}$, segue:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}; \tag{2.1}$$

Coulomb per primo, nel 1788 verificò che la forza elettrica in punto prossimo ad un piano carico è proporzionale alla densità superficiale nelle vicinanze del punto, pertanto tale risultato prende il nome di *Teorema di Coulomb*. Questo teorema fu rigorosamente dimostrato nel 1811 da Poisson e da Laplace. Nel 1813 Laplace provò anche il carattere vettoriale dell'espressione precedente, mostrando che la forza elettrica in prossimità della superficie del conduttore è diretta perpendicolarmente alla superficie stessa.

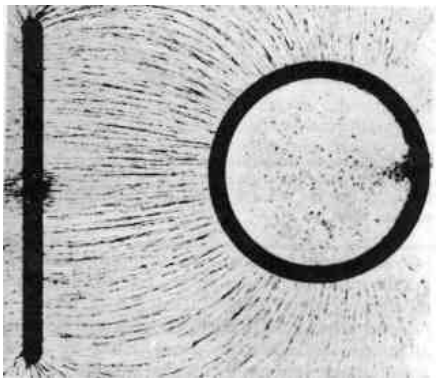
Siano A e B due punti posti in un conduttore all'equilibrio, poiché all'interno del conduttore il campo elettrico è nullo, si ha:

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

per cui:

$$V(A) = V(B),$$

ovvero tutti i punti interni al conduttore sono allo stesso potenziale e, anche la superficie del conduttore, in particolare, è una superficie equipotenziale. Questa proprietà, scoperta

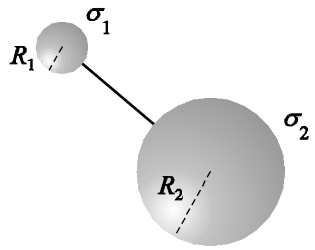


Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da due conduttori carichi; in accordo col Teorema di Coulomb, in prossimità della superficie dei conduttori le linee di forza si dispongono perpendicolarmente alle superfici dei conduttori stessi.

sperimentalmente da Beccaria, Henry Cavendish e Coulomb, venne dimostrata nel 1811 da Poisson.

L'equipotenzialità del conduttore all'equilibrio può essere provata in maniera alternativa osservando che se il campo elettrico $\vec{E}$ interno al conduttore è nullo, dalla relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ segue banalmente $\vec{\nabla} V = \vec{0}$, ovvero $\partial V / \partial x = 0$, $\partial V / \partial y = 0$ e $\partial V / \partial z = 0$, cioè che V è costante. Inoltre, l'equipotenzialità della superficie segue dal fatto che lungo un percorso che si esplica sulla superficie del conduttore, dalla (2.1) segue che i vettori $\vec{E}$ e $d\vec{l}$ si mantengono sempre perpendicolari, per cui l'integrale precedente è identicamente nullo.

Per provare l'ultima proprietà consideriamo due sfere conduttrici di raggi R_1 e R_2, con $R_1 < R_2$, collegate elettricamente tra loro tramite un filo conduttore. Se σ_1 e σ_2 indicano le densità superficiali di carica sui due conduttori, le cariche rispettive saranno:



$$q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1,$$
$$q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2,$$

e facendo il rapporto membro a membro, segue:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1^2 \sigma_1}{R_2^2 \sigma_2}.$$

D'altra parte, siccome sono connesse attraverso un conduttore, le due sfere sono allo stesso potenziale; assumendo che la distanza tra le sfere sia tale da poter ritenere che la carica di una non influenzi la distribuzione di carica sull'altra, dalla relazione (1.24) segue che il comune valore V del loro potenziale è:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

da cui risulta:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

così, confrontando con l'espressione precedente, si ha:

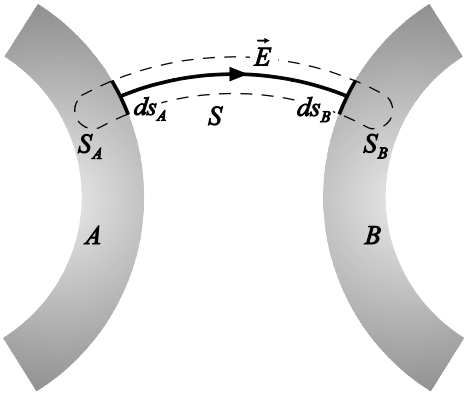
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Siccome $R_1 < R_2$, allora $\sigma_1 > \sigma_2$, cioè la sfera più piccola ha una maggiore densità di carica superficiale; ciò implica che il campo elettrico è più intenso in prossimità della sfera più piccola. Per questo motivo in un conduttore che presenta una zona in cui il raggio di curvatura della superficie è piccolo, ovvero presenta una punta, il campo elettrico è maggiore rispetto alle zone con un raggio di curvatura più grande.

Le proprietà dei conduttori che presentano delle punte furono verificate per la prima volta da Franklin e portarono a molteplici applicazioni, tra cui il parafulmine. Qualora la curvatura di una regione della superficie di un conduttore carico è accentuata sino a ridursi ad una punta, la densità superficiale della carica in tale regione può raggiungere valori molto elevati e di conseguenza, dalla relazione (2.1), anche il campo elettrico nelle immediate vicinanze della punta può risultare particolarmente intenso. Se il conduttore è posto nel vuoto ciò non ha conseguenze, tuttavia, se è immerso in

un gas, come l'aria, in corrispondenza di un opportuno valore dell'intensità del campo, detto *rigidità dielettrica*, si manifestano dei fenomeni di ionizzazione; cioè uno o più elettroni delle molecole del gas situate in prossimità della punta vengono rimossi per effetto del campo. Le molecole così ionizzate vengono accelerate dal campo elettrico e, una volta raggiunta l'energia cinetica sufficiente, ionizzano per urto altre molecole del gas. Questo processo determina in breve tempo la formazione presso la punta di un consistente numero di ioni positivi e negativi. Quelli di carica opposta a quella della punta sono attratti verso il conduttore neutralizzandone in tutto o in parte la carica; quelli di carica uguale vengono allontananti dalla punta determinando un movimento macroscopico del gas detto *vento elettrico*.

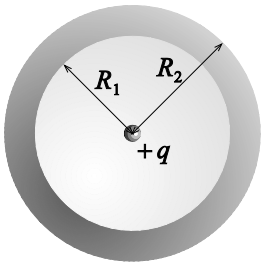
2.2 Sistemi di conduttori, schemi elettrostatici



Consideriamo due conduttori carichi A e B all'equilibrio e supponiamo che le linee di forza del campo elettrico $\vec{E}$ vadano da uno all'altro. Ne segue che si può identificare un tubo di flusso per le linee di forza di $\vec{E}$ che collega i due elementi superficiali corrispondenti ds_A e ds_B, rispettivamente del conduttore A e B. È possibile, quindi, costruire una superficie chiusa S che intersechi i conduttori in corrispondenza delle superfici ds_A e ds_B e si chiuda all'interno di essi con le superfici S_A e S_B (si veda la figura). Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S è nullo siccome il campo è nullo in corrispondenza delle superfici S_A e S_B (che possono avere forma qualsiasi) ed è parallelo alla superficie considerata nella regione spaziale compresa tra i conduttori. Pertanto, dalla legge di Gauss segue che deve risultare nulla la somma delle cariche dq_A e dq_B interne ad S, localizzate sulle superfici ds_A e ds_B dei due conduttori; così:

$$dq_A = -dq_B .$$

Concludiamo che le cariche su due elementi superficiali corrispondenti sono uguali in modulo ma di segno opposto; questo risultato prende il nome di *teorema degli elementi superficiali corrispondenti*.

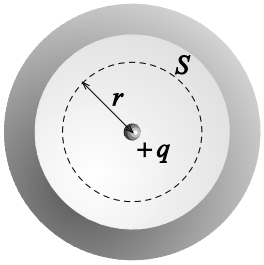


Esempio: Consideriamo una carica puntiforme q posta al centro di un guscio metallico di raggi R_1 e R_2 privo di carica, all'equilibrio elettrostatico (si veda la figura). Applicando la legge di Gauss ad una superficie sferica S, concentrica al sistema considerato e di raggio $r < R_1$ segue:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0},$$

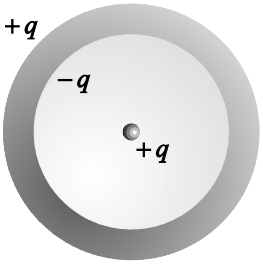
in cui q_{int}, la carica interna a S, è pari a q. Siccome il campo elettrico è nullo all'interno del conduttore, per $R_1 < r < R_2$ risulta:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0},$$



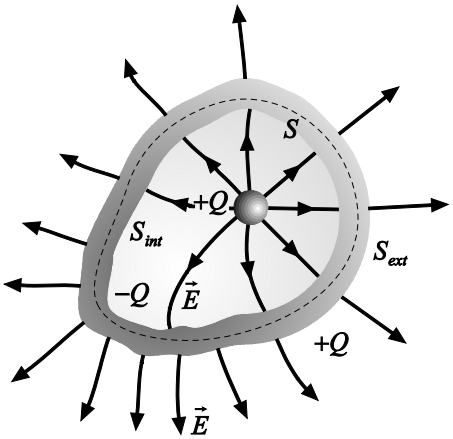
pertanto, in questa circostanza, $q_{int} = 0$. Questo implica che all'interno della superficie S deve originarsi un'ulteriore carica q', tale che risulti:

$$q_{int} = q + q' = 0 .$$



Questa carica $q' = -q$ si dispone sulla superficie interna della cavità. Poiché il guscio metallico è privo di carica, ne segue che sulla sua superficie esterna deve situarsi una carica q in modo da annullare la carica q'. In figura è mostrata la disposizione delle cariche per il sistema descritto.

Il risultato conseguito attraverso l'esempio precedente può essere facilmente esteso a sistemi di più conduttori. Consideriamo pertanto un guscio metallico all'interno del quale sono presenti dei conduttori carichi (in figura, per semplicità è mostrato il caso in cui all'interno della cavità è presente un solo conduttore). La cavità interna al guscio è sede di un campo elettrico le cui linee di forza collegano un conduttore all'altro e questi conduttori con la superficie interna S_{int} del guscio, perpendicolarmente ad essa in ogni punto. La distribuzione delle linee di forza di tale campo dipende dalla forma dei conduttori presenti, dalla loro carica, dalla loro posizione e dalla forma della superficie interna S_{int}. Sia S una superficie chiusa interna al guscio metallico; siccome il campo elettrico è nullo in corrispondenza di questa superficie, il suo flusso attraverso S è nullo, pertanto, dalla legge di Gauss segue che la somma delle cariche interne a S deve essere uguale a zero. Indicando con $+Q$ la carica totale di tutti i conduttori situati nella cavità, sulla superficie S_{int} si origina una carica indotta pari a $-Q$. Tale proprietà è detta *induzione completa*.



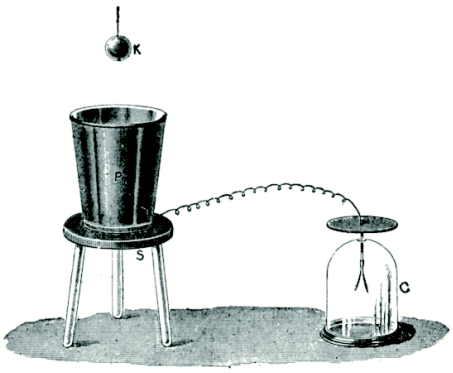
Questa proprietà poteva essere dedotta ugualmente dal teorema degli elementi superficiali corrispondenti; infatti, con riferimento alla figura precedente, se il conduttore *B* circonda completamente il conduttore *A*, cioè *B* è un conduttore cavo, tutte le linee di forza del campo elettrico che originano da *A* terminano su *B*. La superficie di *A* e quella interna di *B* sono superfici corrispondenti e di conseguenza su di esse si distribuiscono cariche uguali in modulo ma di segno opposto. Se invece *A* non è circondato completamente da *B*, non tutte le linee di forza del campo elettrico che partono da *A* terminano in *B* e quindi la carica indotta su quest'ultimo è, in valore assoluto, minore di quella di *A*.

Qualora il guscio metallico sia inizialmente privo di carica ed isolato, in corrispondenza dell'introduzione all'interno della sua cavità di una carica complessiva $+Q$ opportunamente distribuita tra i conduttori interni, sulla superficie esterna del guscio S_{ext} deve comparire una carica $+Q$ in modo che la carica totale del guscio risulti nulla. Se sul guscio è originariamente distribuita una carica Q', la carica indotta $+Q$ si aggiungerà a Q'. In ogni caso, a differenza di quanto accade per la carica $-Q$ indotta sulla superficie S_{int}, la distribuzione di $+Q$ su S_{ext} non dipende dalla disposizione delle singole cariche situate sui conduttori all'interno della cavità, né dalla forma della superficie S_{int}. La distribuzione della carica sulla superficie esterna S_{ext} del guscio metallico è determinata esclusivamente dalla condizione che tale superficie risulti equipotenziale e cioè che le linee di forza del campo elettrico siano, in ciascun punto, perpendicolari ad essa. Ciò comporta che una qualsiasi modifica della disposizione geometrica dei conduttori carichi interni alla cavità o un qualsiasi processo di elettrizzazione interno ad essa che non comporti una variazione netta della carica totale, non possono essere rivelati all'esterno.

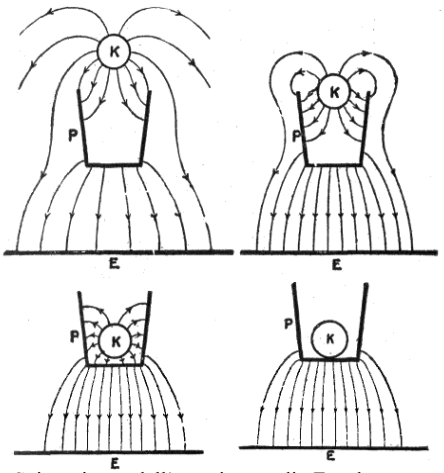
Pertanto, il guscio metallico costituisce un elemento di separazione tra due regioni spaziali nelle quali i campi elettrici risultano indipendenti, perché ogni azione elettrica che si compia all'esterno del guscio non ha alcun effetto all'interno della cavità. Le differenze di potenziale esistenti tra i vari punti interni ed in particolare tra i diversi punti interni e la parete della cavità, il campo e la distribuzione delle cariche interne dipendono unicamente dalle cariche dei singoli conduttori situati all'interno della cavità e dalle caratteristiche geometriche della cavità; un campo elettrico esterno è

solamente in grado di cambiare di uno stesso valore costante il potenziale del guscio metallico e di tutti i punti interni ad esso. In sostanza, il guscio metallico costituisce uno schermo per la cavità rispetto a qualsiasi azione elettrica esterna. Per tale proprietà il guscio metallico viene solitamente denominato[3] *gabbia di Faraday*.

Nel 1836 Michel Faraday provò che la carica su un corpo conduttore cavo isolato si dispone sulla sua superficie esterna e non influenza lo stato elettrico dei corpi interni alla cavità; allo scopo rivestì un contenitore con un foglio metallico e dispose un generatore elettrostatico in maniera che producesse una scarica ad alta tensione verso la superficie esterna di tale contenitore. Adoperando un elettroscopio, Faraday constatò l'assenza di carica all'interno del volume rivestito del foglio metallico. Nel 1755 Benjamin Franklin osservò che una sfera di sughero sospesa ad un filo di seta, una volta inserita all'interno di un contenitore metallico carico non veniva attratta dalle pareti interne, anche dopo averne toccato il fondo, come avveniva se fosse stata posta in prossimità della superficie esterna.



Esperienza di Faraday sull'induzione elettrostatica (*ice-pail experiment*). Un contenitore metallico *P* collegato ad un elettroscopio a foglie *C* è situato sul supporto isolante *S*. Un conduttore metallico carico *K* viene introdotto nel contenitore fino a toccarne il fondo. Mentre viene abbassato le foglie dell'elettroscopio divergono progressivamente finché il conduttore *K* non è penetrato profondamente nel contenitore, dopo di che mantengono la divergenza anche se il conduttore viene a contatto col contenitore. Una volta ritirato, il conduttore *K* risulta privo di carica.



Spiegazione dell'esperienza di Faraday, per semplicità l'elettroscopio, il filo ed il sostegno sono stati omessi e vengono visualizzati solo i principali conduttori. La sfera viene avvicinata al contenitore, agisce induttivamente su di esso che si carica elettricamente (figura in alto a sinistra), una parte delle linee di forza termina sul contenitore, l'altra parte si chiude verso terra; la sfera penetra più profondamente (figura in alto a destra), la maggior parte delle linee di forza che originano dalla sfera si chiudono sul contenitore; la sfera è completamente all'interno del contenitore (figura in basso a sinistra), tutte le linee di forza passano dalla sfera al contenitore, un uguale numero di linee collega il contenitore a terra; in questa condizione lo spostamento della sfera all'interno del contenitore non influenza la distribuzione delle linee di forza tra il contenitore e la terra, in particolare (figura in basso a destra) anche quando la sfera viene in contatto col fondo del contenitore. La sfera è ora completamente scarica per cui da essa non originano linee di forza.

Soltanto una modifica della carica totale dei conduttori situati all'interno della cavità del guscio metallico determina il cambiamento della carica distribuita sulla superficie esterna S_{ext} del guscio e pertanto una variazione del campo elettrico esterno; quindi, in generale, il guscio metallico non esercita un'azione di schermo verso l'esterno delle azioni elettrostatiche interne. Tuttavia, se tale guscio viene collegato con la terra attraverso un filo conduttore (*messa a terra*), la carica indotta che si distribuirebbe sulla superficie S_{ext} per effetto delle variazioni di carica nella cavità viene ad annullarsi e si manterrà tale, indipendentemente dalle azioni elettriche che hanno luogo nella cavità e comunque vari la carica totale dei conduttori interni mediante apporto di carica dall'esterno. In questo caso l'involucro metallico scherma completamente lo spazio esterno da qualsiasi azione elettrica interna[4].

Esempio: L'effetto schermante bidirezionale della gabbia di Faraday posta a terra (o *a massa*, come si dice alternativamente) trova molteplici applicazioni. Ad esempio viene adoperato per proteggere ambienti ed apparati da intensi campi elettrici come quelli generati dai fulmini. Un'altra applicazione del principio della gabbia di Faraday si ha nell'ambito della tecnologia elettronica, per eliminare le interferenze di campi elettromagnetici esterni in apparati per telecomunicazioni, oppure per evitare l'emissione indesiderata di campi elettromagnetici da una certa regione, come nel caso dei forni a microonde; in questo caso il forno, rivestito da pareti metalliche poste a massa presenta in corrispondenza

[3] Il termine *gabbia* viene utilizzato per sottolineare la caratteristica che il guscio metallico, nella pratica, può essere ridotto a foglio metallico sottile continuo, ma anche ad una rete o una serie di barre opportunamente distanziate.

[4] In generale ciò avviene in tutte le circostanze in cui si mantiene costante il valore del potenziale del guscio metallico; in pratica il collegamento con la terra corrisponde a fissare il potenziale del guscio a quello della terra stessa.

dello sportello una rete realizzata con un materiale conduttore e collegata alle pareti, in questa maniera si impedisce l'emissione delle microonde generate all'interno consentendo tuttavia la visibilità all'interno.

2.3 Il problema generale dell'elettrostatica

Consideriamo un sistema di conduttori carichi; in linea di principio, una volta noto come sono distribuite le cariche che generano il campo elettrico, ad esempio attraverso la densità σ, il potenziale in un qualsiasi punto dello spazio può essere determinato tramite la relazione:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma\, ds}{r};$$

inoltre, a partire da tale risultato si può dedurre il campo elettrico come:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V\ . \tag{2.2}$$

Tuttavia ciò è effettivamente possibile solamente in casi molto semplici poiché, in generale, come si distribuisce la carica sulla superficie dei conduttori non è noto a priori, infatti, la distribuzione della carica su ciascun conduttore è influenzata dalla presenza degli altri conduttori carichi (questo fenomeno si chiama *induzione elettrostatica*). La conoscenza delle distribuzioni di equilibrio che derivano da tali interazioni dipende, in ultima analisi, dalla conoscenza del campo elettrico, cioè dalla stessa soluzione del problema.

L'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{2.3}$$

Peter Gustav Lejeune Dirichlet

permette di seguire un altro percorso per la determinazione del potenziale, che non richiede la conoscenza a priori della distribuzione della carica sui conduttori, purché sia noto il valore assunto dal potenziale di ciascun conduttore del sistema. Il problema consiste nel trovare la funzione *V*, soluzione dell'equazione di Laplace che, in corrispondenza di ciascun conduttore assuma un valore stabilito. Il problema impostato in questa maniera è detto *problema di Dirichlet*, dal matematico tedesco Peter Gustav Lejeune Dirichlet che, a partire da uno studio sulla stabilità del sistema solare, nel 1839 per primo propose una teoria generale del potenziale. Si può dimostrare che esiste sempre una soluzione del problema e che tale soluzione è unica, purché il potenziale si annulli all'infinito almeno come $1/r$ ed il campo elettrico almeno come $1/r^2$. Naturalmente la ricerca di tale soluzione è tanto più difficile quanto più è complesso il sistema di conduttori coinvolti, tuttavia, noto il potenziale si può dedurre dalla (2.2) il campo elettrico ed in particolare, attraverso il valore del campo in prossimità della superficie dell' $k-$esimo conduttore, dalla (2.1) si ricava la distribuzione di carica σ_k; infine, per integrazione di tale densità sulla superficie dell' $k-$esimo conduttore, si ricava il relativo valore della carica q_k.

Occorre altresì osservare che essendo la (2.3) lineare ed omogenea, se $V', V'', V''', \ldots$ ne rappresentano delle soluzioni, corrispondenti a diverse distribuzioni delle cariche sugli *N* conduttori che costituiscono il sistema, allora lo è anche una loro combinazione lineare *V* della forma:

$$V = aV' + bV'' + cV''' + \ldots, \tag{2.4}$$

in cui $a, b, c, \ldots$ sono dei coefficienti costanti. Inoltre, siccome tutte le operazioni che consentono di stabilire il valore dei campi, delle densità e delle cariche sono lineari, se una funzione V, soluzione di un dato problema, è esprimibile come combinazione lineare di più funzioni parziali $V', V'', V''', \ldots$ alle quali corrispondono i campi $\vec{E}', \vec{E}'', \vec{E}''', \ldots$, le densità di carica sul $k-$esimo conduttore $\sigma'_k, \sigma''_k, \sigma'''_k, \ldots$ e le relative cariche sullo stesso conduttore $q'_k, q''_k, q'''_k, \ldots$, allora le corrispondenti grandezze relative al problema assegnato possono essere dedotte come combinazione lineare delle grandezze parziali; tale risultato è detto *principio di sovrapposizione degli equilibri elettrostatici*. Da tale proprietà segue che, se i potenziali $V', V'', V''', \ldots$ sono soluzioni della (2.3) legate tra loro attraverso un'espressione come la (2.4), allora la carica q_k del $k-$esimo conduttore corrispondente alla soluzione V si ottiene anche essa come combinazione lineare con i medesimi coefficienti che compaiono nella (2.4), cioè:

$$q_k = aq'_k + bq''_k + cq'''_k + \ldots, \tag{2.5}$$

con $k = 1, 2, \ldots, N$.

Siano $V_1, V_2, \ldots, V_N$ i potenziali di N conduttori. Il problema di Dirichlet consiste nel trovare una funzione V tale da soddisfare la (2.3) e da assumere i valori $V_1, V_2, \ldots, V_N$ rispettivamente sui conduttori $1, 2, \ldots, N$. Tale problema, alla luce delle precedenti considerazioni, può essere diviso in N problemi più semplici, ossia trovare N funzioni $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_N$ tali che, per ogni valore di i, con $i = 1, 2, \ldots, N$ risulti:

$$\begin{cases} \nabla^2 \chi_i = 0, \\ \chi_i = 1 \quad \textit{sulla superficie del conduttore } i-\textit{esimo}, \\ \chi_i = 0 \quad \textit{sulla superficie degli altri conduttori}. \end{cases}$$

Una volta note le funzioni χ_i, dalla (2.4) segue che la funzione:

$$V = \chi_1 V_1 + \chi_2 V_2 + \ldots + \chi_N V_N$$

soddisfa le condizioni richieste ed è pertanto soluzione del problema di Dirichlet.

Nel caso considerato, i coefficienti della combinazione lineare sono rappresentati dai potenziali in corrispondenza dei conduttori $V_1, V_2, \ldots, V_N$, per cui, dalla (2.5) segue:

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots + C_{1N}V_N \\ q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \ldots + C_{2N}V_N \\ \qquad\qquad \vdots \\ q_N = C_{N1}V_1 + C_{N2}V_2 + \ldots + C_{NN}V_N \end{cases} \tag{2.6}$$

ovvero, in forma compatta:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j,$$

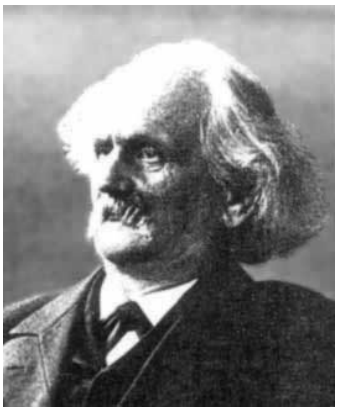
con $i = 1, 2, \ldots, N$. I termini C_{ij} dipendono dalle caratteristiche geometriche del sistema (forme, dimensioni e posizioni dei conduttori). Dalla linearità ed omogeneità dell'equazione di Laplace segue che la carica di ciascun conduttore è funzione lineare dei potenziali di tutti i conduttori che costituiscono il sistema. I termini C_{ij} vengono detti, in generale, *coefficienti di capacità*; in particolare, se $i \equiv j$, il termine C_{ii} si chiama *capacità* del conduttore $i-$esimo. È possibile dimostrare che per ogni valore di $i, j = 1, 2, \ldots, N$ risulta $C_{ij} = C_{ji}$, tale proprietà è detta *teorema di reciprocità*; il termine $C_{ij} = C_{ji}$ è detto *coefficiente di capacità mutua* tra i conduttori i e j in presenza di tutti gli altri conduttori.

La definizione dei coefficienti di capacità può essere fatta in maniera formale considerando uno stato di equilibrio caratterizzato dai seguenti valori del potenziale degli N conduttori che costituiscono il sistema:

$$\begin{cases} V_i \neq 0 \\ V_k = 0 \;\; k = 1, 2, \ldots, N \;\; k \neq i \end{cases}$$

Pertanto, dalla (2.6) segue:

$$\begin{cases} q_1 = C_{1i} V_i \\ q_2 = C_{2i} V_i \\ \quad\vdots \\ q_N = C_{Ni} V_i \end{cases}$$



Carl Gottfried Neumann

Ne segue che per un sistema di N conduttori, tutti a potenziale nullo, escluso l'i–esimo, la carica su quest'ultimo è proporzionale al suo potenziale, cioè $q_i = C_{ii} V_i$, attraverso un coefficiente detto capacità del conduttore i–esimo, in presenza di tutti gli altri conduttori. Inoltre, la carica sul j–esimo conduttore è proporzionale al potenziale dell'i–esimo conduttore, cioè $q_j = C_{ji} V_i$, attraverso un coefficiente detto coefficiente di capacità dell'i–esimo conduttore rispetto al j–esimo conduttore, in presenza di tutti gli altri conduttori.

Qualora si debba trovare la funzione V, soluzione dell'equazione di Laplace una volta che siano note le cariche $q_1, q_2, \ldots, q_N$ distribuite su ciascun conduttore, anziché i potenziali, il problema così impostato è detto *problema di Neumann*, dal matematico tedesco Carl Gottfried Neumann che lo sviluppò nel 1896 nell'ambito dell'applicazione della teoria del potenziale all'elettrodinamica. Tale problema può essere risolto a partire dalla (2.6), una volta noti i coefficienti C_{ij}, invertendo il sistema:

$$\begin{cases} V_1 = P_{11} q_1 + P_{12} q_2 + \ldots + P_{1N} q_N \\ V_2 = P_{21} q_1 + P_{22} q_2 + \ldots + P_{2N} q_N \\ \quad\vdots \\ V_N = P_{N1} q_1 + P_{N2} q_2 + \ldots + P_{NN} q_N \end{cases} \tag{2.7}$$

in cui i termini P_{ij}, detti *coefficienti di potenziale*, sono legati secondo relazioni semplici ai coefficienti di capacità C_{ij}. Il teorema di reciprocità vale anche per i coefficienti di potenziale e risulta, pertanto, che $P_{ij} = P_{ji}$ per ogni valore di $i, j = 1, 2, \ldots, N$.

In particolare, se $|C|$ è il determinante della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni lineari (2.6) e c_{ij} è il complemento algebrico[5] dell'elemento C_{ij} allora risulta:

$$P_{ij} = \frac{c_{ij}}{|C|}.$$

È fisicamente evidente che il determinante $|C|$ non può mai essere nullo siccome assegnati i potenziali $V_1, V_2, \ldots, V_N$ dei singoli conduttori, esiste sempre una ben determinata distribuzione di cariche cui corrispondono tali potenziali e viceversa.

Pertanto, è possibile risolvere il problema di Neumann introducendo i valori dei coefficienti P_{ij} nella (2.7) in modo da dedurre i relativi valori dei potenziali $V_1, V_2, \ldots, V_N$ che consentono di risolvere il corrispondente problema di Dirichlet.

Le relazioni (2.6) e (2.7) mettono in luce che agli effetti della soluzione del problema generale dell'elettrostatica le due condizioni al contorno corrispondenti ai problemi di Dirichlet e di Neumann, cioè la conoscenza a priori dei potenziali o delle cariche sui conduttori, sono del tutto equivalenti.

Una volta stabilita una soluzione dell'equazione di Laplace corrispondente alle condizioni al contorno assegnate, occorre verificare che tale soluzione sia unica. Tale dimostrazione può essere fatta per assurdo ammettendo l'esistenza di due soluzioni della (2.3) nella regione assegnata, V_1 e V_2. Pertanto in tale regione risulterà contemporaneamente $\nabla^2 V_1 = 0$ e $\nabla^2 V_2 = 0$, cioè:

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0, \tag{2.8}$$

inoltre, in corrispondenza dei conduttori i potenziali saranno uguali, per cui:

$$V_1 - V_2 = 0. \tag{2.9}$$

Definiamo una funzione scalare come $\xi \equiv V_1 - V_2$ e una funzione vettoriale come $\vec{T} \equiv \vec{\nabla}\xi = \vec{\nabla}(V_1 - V_2)$. Per il teorema della divergenza, l'integrale su di un volume generico $\mathcal{V}$ di $\vec{\nabla}\cdot(\xi\vec{T})$, vale:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot(\xi\vec{T})\,dv = \int_{\mathcal{S}} \xi\vec{T}\cdot d\vec{s},$$

in cui $\mathcal{S}$ è la superficie che racchiude il volume considerato. D'altra parte, applicando a tale relazione l'identità vettoriale $\vec{\nabla}\cdot(\xi\vec{T}) = \xi\vec{\nabla}\cdot\vec{T} + \vec{T}\cdot\vec{\nabla}\xi$, si ha:

$$\int_{\mathcal{V}} \xi\vec{\nabla}\cdot\vec{T}\,dv + \int_{\mathcal{V}} \vec{T}\cdot\vec{\nabla}\xi\,dv = \int_{\mathcal{V}} \left(\xi\vec{\nabla}\cdot\vec{T} + \vec{T}\cdot\vec{\nabla}\xi\right)dv = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot(\xi\vec{T})\,dv = \int_{\mathcal{S}} \xi\vec{T}\cdot d\vec{s}$$

per cui, sostituendo a ξ e $\vec{T}$ le rispettive espressioni, si ottiene l'identità:

$$\int_{\mathcal{V}} (V_1 - V_2)\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(V_1 - V_2)\,dv + \int_{\mathcal{V}} \left[\vec{\nabla}(V_1 - V_2)\right]\cdot\left[\vec{\nabla}(V_1 - V_2)\right]dv = \int_{\mathcal{S}} \left[(V_1 - V_2)\vec{\nabla}(V_1 - V_2)\right]\cdot d\vec{s},$$

cioè:

[5] Il complemento algebrico c_{ij} dell'elemento C_{ij} della matrice dei coefficienti del sistema (2.6) è il determinante della matrice che si ottiene eliminando dalla matrice del sistema (2.6) la riga *i*–esima e la colonna *j*–esima.

$$\int_{\mathcal{V}} (V_1 - V_2)\nabla^2 (V_1 - V_2)\, dv + \int_{\mathcal{V}} \left|\vec{\nabla}(V_1 - V_2)\right|^2 dv = \int_{\mathcal{S}} \left[(V_1 - V_2)\vec{\nabla}(V_1 - V_2)\right]\cdot d\vec{s}\,.$$

Utilizzando le condizioni (2.8) e (2.9) nella precedente espressione, segue che sia il primo integrale al primo membro che l'integrale al secondo membro sono entrambi nulli, pertanto tale relazione di riduce a:

$$\int_{\mathcal{V}} \left|\vec{\nabla}(V_1 - V_2)\right|^2 dv = 0\,.$$

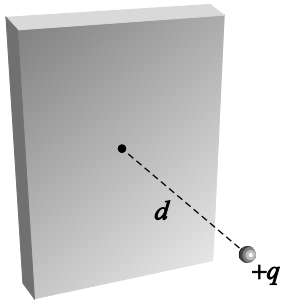
Poiché la differenza $V_1 - V_2$ è un numero reale ed è tale anche il suo gradiente e inoltre il quadrato di un numero reale è positivo, l'unica possibilità affinché tale relazione risulti soddisfatta è:

$$\vec{\nabla}(V_1 - V_2) = \vec{0}\,,$$

ovvero che la differenza $V_1 - V_2$ è ovunque una costante; in particolare, poiché in corrispondenza dei conduttori deve valere la condizione al contorno (2.9), allora tale costante deve essere nulla e pertanto deve valere ovunque $V_1 = V_2$. Quindi, in una assegnata regione dello spazio l'equazione di Laplace ha una unica soluzione che soddisfa le condizioni al contorno in tale regione. E' possibile effettuare una medesima dimostrazione anche per l'equazione di Poisson.

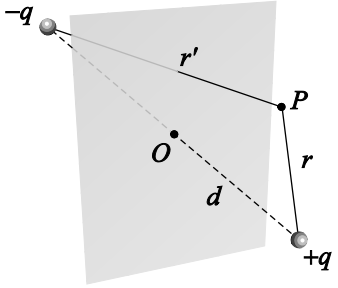
L'importanza della proprietà di unicità della soluzione dell'equazione di Laplace (o di Poisson), una volta che sono assegnate le condizioni al contorno, risiede nel fatto che tale proprietà consente l'impiego di qualsiasi metodo volto alla determinazione del potenziale. Quindi, se attraverso un qualsivoglia approccio viene identificata una funzione V che soddisfa la (2.3) e soddisfa contemporaneamente le condizioni al contorno stabilite, allora tale funzione rappresenta il solo potenziale possibile.

Esempio: (*Metodo della carica immagine*) Consideriamo una carica puntiforme $+q$ posta a distanza d da una lastra piana conduttrice infinitamente estesa nelle due dimensioni e collegata a massa (si veda la figura). Per determinare la carica indotta sulla lastra occorre risolvere l'equazione di Laplace in tutto il semispazio in cui è situata la carica, con la condizione al contorno secondo cui il potenziale in corrispondenza dei punti della lastra sia nullo. Nel 1845 Lord Kelvin suggerì che è possibile ottenere lo stesso risultato osservando che, una carica $-q$ posta nel punto simmetrico a quello in cui è situata la carica $+q$ rispetto alla superficie della lastra produce nel generico punto P, in assenza della lastra, il potenziale:



$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right), \qquad (2.10)$$

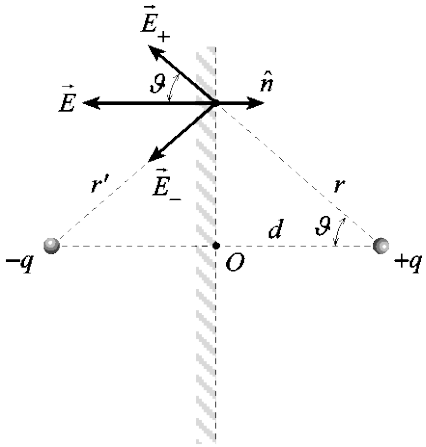
in cui r e r' sono, rispettivamente, le distanze delle cariche $+q$ e $-q$ dal punto P considerato (si veda la figura). Tale potenziale risulta evidentemente nullo su tutti i punti in cui si trova la lastra, essendo in tali punti $r = r'$; pertanto, nel semispazio limitato dalla lastra ed in cui è situata la carica $+q$ il potenziale dato dalla relazione (2.10) soddisfa tutte le proprietà che deve soddisfare la soluzione dell'equazione di Laplace e, siccome tale soluzione è unica, esso rappresenta la soluzione del problema considerato. La carica $-q$ viene detta *carica immagine*. Con riferimento alla figura, il campo elettrico in corrispondenza di un punto generico del piano è dato da:



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2}\hat{r}'\,.$$

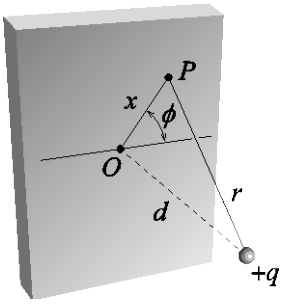
Il campo elettrico è diretto normalmente alla lastra e la sua intensità vale:

$$\vec{E} = -2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\vartheta\right)\hat{n} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{d}{r}\hat{n} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{r^3}\hat{n}\,.$$



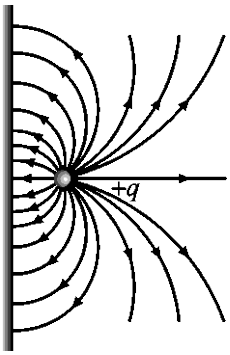
Dalla relazione (2.1) la densità di carica superficiale è data da:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = -\frac{1}{2\pi}\frac{qd}{r^3}\,,$$



cioè la carica si distribuisce sulla lastra conduttrice in maniera tale che la densità di carica è inversamente proporzionale al cubo della distanza dalla carica puntiforme. Considerando un sistema di coordinate polari con origine nel punto O sulla lastra, nel piede della perpendicolare abbassata dalla carica (si veda la figura), si ha:

$$\sigma = -\frac{qd}{2\pi}\frac{1}{\left(d^2+x^2\right)^{3/2}}\,.$$

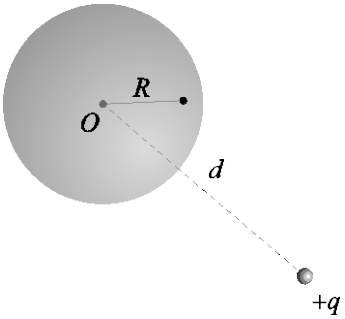


Integrando tale espressione su tutta la superficie della lastra è possibile stabilire la carica indotta:

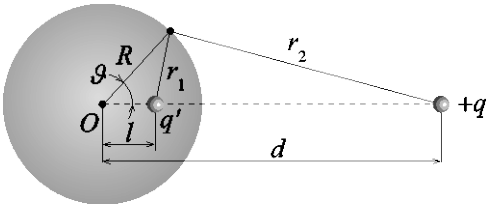
$$\int_{lastra} \sigma\, ds = -\frac{qd}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(d^2+x^2\right)^{3/2}}\, x\, dx = -\frac{qd}{2}\int_{d^2}^{+\infty}\frac{1}{\xi^{3/2}}\, d\xi = -q\,.$$

Quindi tra la carica puntiforme e il piano si ha induzione completa e tutte le linee di forza del campo elettrico uscenti dalla carica terminano sul piano (si veda la figura).

Esempio: Stabiliamo il potenziale in tutto lo spazio del sistema costituito da una carica puntiforme $+q$ posta a distanza d dal centro di una sfera conduttrice di raggio R collegata a massa (si veda la figura). A tale scopo cerchiamo la carica immagine q' da situarsi all'interno della superficie definita dalla sfera conduttrice e che, in assenza di questa, renda costante e pari a zero il potenziale sui punti di tale superficie. Data la simmetria del problema, la carica immagine deve trovarsi sul segmento che congiunge il centro O della sfera con la carica puntiforme $+q$. Se l indica la distanza della carica immagine dal centro della sfera (si veda la figura), il problema è ricondotto alla ricerca dei valori di q' e l che rendono nullo il potenziale sulla sfera, cioè:



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{r_1}+\frac{q}{r_2}\right) = 0\,,$$



dove r_1 e r_2 sono le distanze, rispettivamente delle cariche q' e $+q$ da uno stesso punto sulla sfera; poiché tali distanze sono entrambe positive, necessariamente la carica immagine deve avere segno opposto rispetto a $+q$. Pertanto, l'equazione precedente può posta nella forma:

$$\begin{cases} q'^2 r_2^2 = q^2 r_1^2\,, \\ \dfrac{q'}{q} < 0\,; \end{cases} \tag{2.11}$$

in cui è stata aggiunta la condizione sul segno relativo delle cariche. Le distanze r_1 e r_2 soddisfano le relazioni:

$$r_1^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\vartheta\,,$$
$$r_2^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\vartheta\,,$$

sostituendo tali espressioni nella prima relazione della (2.11) si ottiene l'identità:

$$2R\left(q^2 l - q'^2 d\right)\cos\vartheta + q'^2\left(R^2 + d^2\right) - q^2\left(R^2 + l^2\right) = 0 .$$

Siccome tale identità deve valere per ogni valore dell'angolo ϑ deve risultare:

$$\begin{cases} q^2 l - q'^2 d = 0 , \\ q'^2\left(R^2 + d^2\right) - q^2\left(R^2 + l^2\right) = 0 ; \end{cases}$$

tale sistema ammette la coppia di soluzioni:

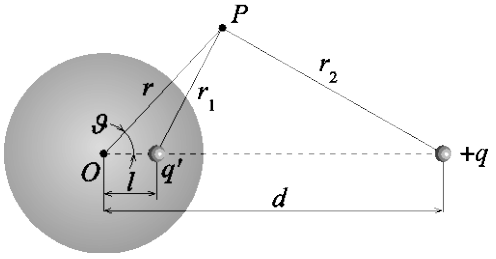
$$\begin{cases} q'^2 = q^2 , \\ l = d ; \end{cases} \qquad \begin{cases} q'^2 = \dfrac{R^2}{d^2} q^2 , \\ l = \dfrac{R^2}{d} ; \end{cases}$$

la prima coppia deve essere scartata perché la carica immagine deve trovarsi all'interno della sfera $(l < R)$; dalla seconda coppia di soluzioni segue:

$$q' = \pm \frac{R}{d} q ,$$

solo la soluzione negativa soddisfa la seconda relazione della (2.11), così:

$$\begin{cases} q' = -\dfrac{R}{d} q , \\ l = \dfrac{R^2}{d} . \end{cases}$$

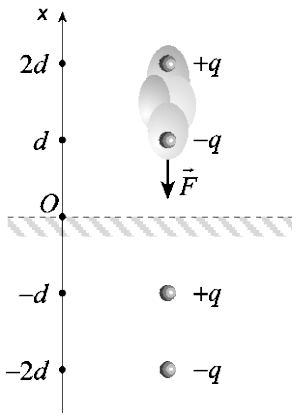


Pertanto, in un punto P generico dello spazio, esterno alla sfera, le distanze r_1 e r_2 rispettivamente delle cariche q' e $+q$ si esprimono come:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + l^2 - 2rl\cos\vartheta} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2r\frac{R^2}{d}\cos\vartheta} ,$$
$$r_2 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\vartheta} ,$$

così, il potenziale nel punto P vale:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\vartheta}} - \frac{R}{d}\frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2r\frac{R^2}{d}\cos\vartheta}}\right).$$



Esempio: In un modello elementare di elettricità atmosferica, una nube durante un temporale può essere descritta come un sistema rigido elettricamente neutro che trasporta una carica $+q$ al suo estremo superiore e $-q$ al suo estremo inferiore. Assumiamo che l'estremo inferiore della nube sia situato ad un'altezza di 300 m dal suolo mentre l'estremo superiore si trovi a 300 m da quello inferiore e che, in corrispondenza del suo passaggio sopra un certo punto della superficie terrestre, in tale posizione si rilevi un campo elettrico verticale di $100\,V/m$. Determiniamo l'intensità della carica $+q$ e la forza elettrica agente sulla nube, assumendo inoltre che non vi siano ulteriori cariche nell'atmosfera al di fuori di quelle della nube stessa. Facendo uso del metodo delle immagini situiamo le cariche immagini rispetto a quelle della nube così come è mostrato in figura. Il campo elettrico al suolo vale quindi:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{d^2}\hat{x}+\frac{q}{d^2}\hat{x}-\frac{q}{(2d)^2}\hat{x}-\frac{q}{(2d)^2}\hat{x}\right]=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(2-\frac{1}{2}\right)\hat{x}=\frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{x}\,,$$

da tale espressione si ricava:

$$q=\frac{8\pi\varepsilon_0 d^2 E}{3}\approx 667\ \mu C\,.$$

La forza elettrica agente sulla nube è la forza elettrostatica che si esercita tra le cariche immagini e quelle della nube, quindi:

$$\vec{F}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(2d)^2}\hat{x}+\frac{1}{(3d)^2}\hat{x}+\frac{1}{(3d)^2}\hat{x}-\frac{1}{(4d)^2}\hat{x}\right]=-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\frac{13}{144}\hat{x}=-\frac{13q^2}{576\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{x}\,;$$

tale forza è diretta verso il basso e ha intensità:

$$F=\frac{13q^2}{576\pi\varepsilon_0 d^2}\approx 4\ mN\,.$$

Esempio: (*teorema della media*) Una funzione armonica V, cioè tale da soddisfare l'equazione (2.3), ha la proprietà che la sua media calcolata su una superficie sferica, nel vuoto, coincide col valore assunto al centro della superficie stessa[6]; infatti, se $\mathcal{S}$ rappresenta la superficie di una sfera di raggio R, la media di V sui punti di tale superficie vale:

$$\langle V\rangle=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{S}} V\,ds\,.$$

Derivando ambo i membri rispetto a r, segue:

$$\frac{d\langle V\rangle}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{S}} V\,ds\right)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{S}}\frac{\partial V}{\partial r}ds\,,$$

d'altra parte, poiché $\hat{r}\cdot\hat{r}=1$, si ha:

$$\frac{d\langle V\rangle}{dr}=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{S}}\frac{\partial V}{\partial r}(\hat{r}\cdot\hat{r})\,ds=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{S}}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}\right)\cdot(\hat{r}\,ds)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{S}}\vec{\nabla}V\cdot d\vec{s}\,.$$

Applicando il teorema della divergenza a tale integrale, dalla (2.3) segue:

$$\frac{d\langle V\rangle}{dr}=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{S}}\vec{\nabla}V\cdot d\vec{s}=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{V}}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}V\right)dv=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\mathcal{V}}\nabla^2 V\,dv=0\,.$$

Il fatto che la derivata $d\langle V\rangle/dr$ sia nulla implica che $\langle V\rangle$ non dipenda dal raggio e, in particolare, il valore sui punti della superficie si mantiene lo stesso nel limite $R\to 0$, cioè nel punto al centro della sfera considerata.

Esempio: (*Metodo di rilassamento*) Il teorema dimostrato attraverso l'esempio precedente è alla base di un metodo numerico per la risoluzione dell'equazione di Laplace. Consideriamo, per semplicità, il caso bidimensionale; in tale circostanza occorre risolvere l'equazione di Laplace nella forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0\,,$$

[6] Una dimostrazione alternativa di questa proprietà è fornita al par. 3.6 dell'Appendice B.

con le opportune condizioni al contorno, ad esempio il valore assunto dal potenziale in corrispondenza dei conduttori che costituiscono il sistema. Nel caso bidimensionale il teorema della media afferma che il valore del potenziale V in un punto del piano è la media dei valori di V lungo una circonferenza $\mathcal{C}$ centrata attorno al punto:

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\mathcal{C}} V \, dl \, ,$$

in cui r è il raggio della circonferenza $\mathcal{C}$. Tale proprietà suggerisce che se V è noto in corrispondenza dei punti di una griglia regolare, il valore di V in ciascun punto è la media dei valori assunti da V sui punti della griglia più prossimi al punto considerato. Pertanto una soluzione dell'equazione di Laplace può essere trovata iterando su tutti i punti della griglia, assegnando a ciascun punto un valore di V pari alla media dei valori di V sui punti più vicini. Ad ogni passo successivo dell'iterazione si adoperano i valori aggiornati del potenziale sui punti della griglia, calcolati attraverso tale metodo. Col procedere delle iterazioni le variazioni dei valori del potenziale sui punti della griglia diventano progressivamente più piccole e, quando tali variazioni si possono considerare trascurabili, le iterazioni vengono arrestate e la soluzione si considera raggiunta.

2.4 Condensatori e capacità

Già l'anno dopo la costruzione della bottiglia di Leida da parte di von Kleist e Musschenbroek ci si rese conto che l'acqua contenuta nella bottiglia e la mano dell'operatore potevano essere sostituiti da fogli metallici disposti sia sulla faccia interna che su quella esterna della bottiglia, ottenendo così un dispositivo facilmente trasportabile. Collegando tra loro separatamente le facce interne e quelle esterne di una batteria di bottiglie di Leida, Franklin comprese che era possibile aumentarne gli effetti. Franklin inoltre scoprì che si ottenevano effetti uguali a quelli della bottiglia di Leida caricando due piani conduttori separati da un foglio sottile di vetro (*quadro di Franklin*). Nel 1758 Beccaria verificò che materiali resinosi o a base di zolfo potevano efficacemente rimpiazzare il vetro dei quadri di Franklin, osservando inoltre che l'intensità degli effetti elettrici sono dipendenti dal materiale di separazione adoperato.

Quadri di Franklin

Consideriamo un sistema costituito da due conduttori, uno di carica q_1 e potenziale V_1 e l'altro di carica q_2 e potenziale V_2. Per N pari a 2, il sistema (2.7) diventa:

$$\begin{cases} V_1 = P_{11} q_1 + P_{12} q_2 \, , \\ V_2 = P_{21} q_1 + P_{22} q_2 \, . \end{cases} \tag{2.12}$$

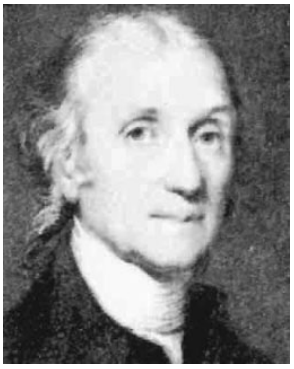
dove, per la proprietà di reciprocità, risulta:

$$P_{21} = P_{12} \, . \tag{2.13}$$

Supponiamo di trasferire dal primo conduttore al secondo una carica q tale da determinare l'annullamento della differenza di potenziale tra i due conduttori. Dopo che ha avuto luogo il trasferimento, il sistema (2.12) diventa:

$$\begin{cases} V_1' = P_{11}(q_1 - q) + P_{12}(q_2 + q), \\ V_2' = P_{21}(q_1 - q) + P_{22}(q_2 + q), \end{cases}$$

con $V_1' = V_2'$; sottraendo membro a membro tali equazioni, si ha:



Henry Cavendish

$$\begin{aligned} 0 = V_1' - V_2' &= P_{11}(q_1 - q) + P_{12}(q_2 + q) - P_{21}(q_1 - q) - P_{22}(q_2 + q) = \\ &= P_{11}q_1 + P_{12}q_2 - (P_{21}q_1 + P_{22}q_2) - q(P_{11} + P_{22} - P_{12} - P_{21}), \end{aligned}$$

dalle (2.12) e (2.13) si ottiene quindi:

$$0 = V_1 - V_2 - q(P_{11} + P_{22} - 2P_{12}),$$

da cui segue:

$$V_1 - V_2 = q(P_{11} + P_{22} - 2P_{12}). \tag{2.14}$$

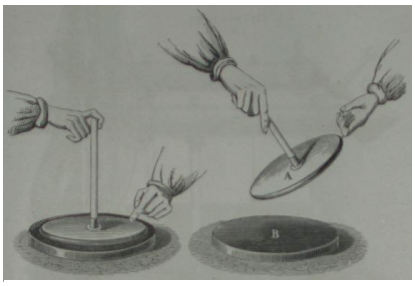
Definiamo *capacità* del sistema di due conduttori la quantità:

$$C \equiv \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} \tag{2.15}$$

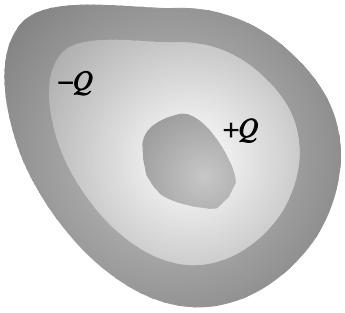
pertanto, adoperando tale definizione, la differenza di potenziale tra i conduttori, espressa dalla (2.14) si scrive:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C}. \tag{2.16}$$

Il sistema di due conduttori prende il nome di *condensatore* e i due conduttori prendono il nome di *armature* del condensatore. Sebbene gran parte dei suoi risultati non furono resi noti che nel 1879, circa settant'anni dopo la sua morte, il fisico inglese Henry Cavendish intorno alla fine del XVIII secolo aveva per primo introdotto una grandezza, la capacità, in grado di fornire una misura degli effetti dovuti alla bottiglia di Leida e aveva studiato diverse geometrie per realizzare le bottiglie di Leida, stabilendone per ciascuna la relativa capacità. Alessandro Volta, probabilmente ispirato da alcuni lavori pubblicati da Cavendish nel 1771, nel 1782 provò che la differenza di potenziale tra due piatti metallici carichi separati da un sottile strato resinoso, in condizione di induzione completa, aumenta quando i due piatti vengono allontanati; a questo sistema di conduttori Volta attribuì il nome di condensatore. Inoltre Volta verificò che la differenza di potenziale ai capi del condensatore varia in ragione inversa della capacità.



Descrizione dell'uso dell'apparato (*elettroforo*) adoperato da Volta per lo studio del condensatore



Qualora i due conduttori si trovino nella condizione di induzione completa, come nel caso in cui uno dei due conduttori circonda completamente il secondo e $q_2 = -q_1$, la carica che occorre trasferire

dal primo conduttore al secondo per annullare la differenza di potenziale è pari a q_1. La capacità dei due conduttori, espressa dalla (2.15) risulta, in generale, indipendente dalla differenza di potenziale applicata ma dipende dalla geometria dei conduttori; è possibile inoltre verificare che la capacità dipende dalla natura del mezzo interposto, attraverso un opportuno fattore moltiplicativo; per il momento assumeremo che tale mezzo sia costituito dal vuoto. L'unità di misura della capacità è il *Farad* (*F*) e risulta[7] $1F \equiv 1C/1V$.

La relazione (2.15) può essere espressa attraverso i coefficienti di capacità anziché i coefficienti di potenziale, osservando che la matrice dei coefficienti del sistema (2.6) è pari alla matrice inversa di quella del sistema (2.7); pertanto, si può esprimere la matrice dei coefficienti della (2.12) come:

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^{\ 2}} \begin{pmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

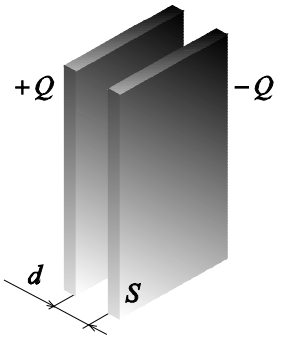
essendo $C_{12} = C_{21}$ per la proprietà di reciprocità. Sostituendo nella (2.15) i valori dei coefficienti di potenziale si trova:

$$C \equiv \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}} = \frac{1}{\dfrac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^{\ 2}} + \dfrac{C_{11}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^{\ 2}} + \dfrac{2C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^{\ 2}}} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^{\ 2}}{C_{22} + C_{11} + 2C_{12}}.$$

2.5 Calcolo di capacità

La determinazione della capacità di un condensatore viene eseguita assegnando ad una delle due armature, originariamente neutre, un valore arbitrario di carica $+q$ e una carica $-q$ all'altra armatura, e stabilendo di conseguenza la corrispondente differenza di potenziale che si origina. Nel seguito indicheremo per semplicità la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ tra i due conduttori come V, tranne nelle circostanze in cui occorra fare specifico riferimento ai potenziali dei singoli conduttori. Negli esempi che seguono si mostra la valutazione della capacità per alcune geometrie notevoli delle armature.

Esempio: (*Capacità di un condensatore piano*). Consideriamo due armature piane, parallele, della stessa superficie *S* e distanti *d*. Se sulle armature sono presenti delle cariche $+Q$ e $-Q$, la densità σ con cui è distribuita la carica su ciascuna armatura è, in valore assoluto, Q/S. Se la distanza tra le armature è molto più piccola della lunghezza e larghezza delle armature, si possono trascurare gli effetti ai bordi ed assumere che il campo elettrico nella regione compresa tra le armature sia uniforme e, dalla relazione (1.15) valga:



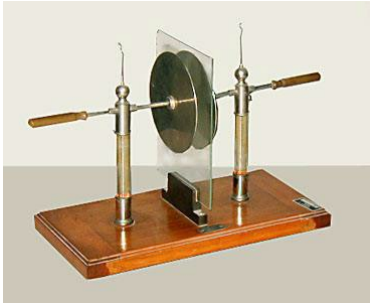
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},$$

[7] Si noti che introducendo questa unità di misura è possibile esprimere l'unità della costante dielettrica del vuoto ε_0 come:

$$[\varepsilon_0] = \frac{C^2}{N\,m^2} = \frac{C}{N\,m} C \frac{1}{m} = \frac{C}{V}\frac{1}{m} = \frac{F}{m},$$

e, in particolare:

$$\varepsilon_0 \approx 8.85 \frac{pF}{m}.$$



Apparato per lo studio delle caratteristiche del condensatore a facce piane e parallele.

pertanto dalla (1.18) la differenza di potenziale tra le armature è:

$$V = E\,d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d\,,$$

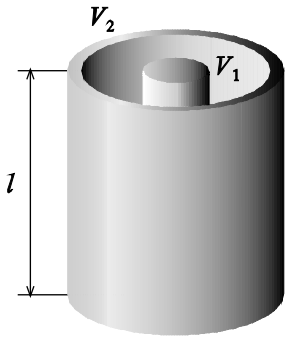
così, applicando la definizione (2.16), segue:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} d},$$

ovvero:

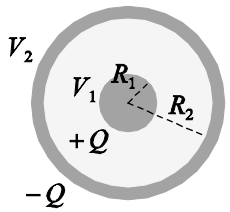
$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \tag{2.17}$$

Esempio: (*Capacità di un condensatore cilindrico*). Consideriamo due conduttori cilindrici coassiali di raggi R_1 e R_2, con $R_1 < R_2$ e sia l l'altezza dei due cilindri. Se sui conduttori si dispongono delle cariche come mostrato in figura, dalla relazione (1.13) il campo elettrico nella regione compresa tra le armature è:



$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r},$$

dove λ è la densità con cui è distribuita la carica per unità di lunghezza e r, con $R_1 < r < R_2$, la distanza dal comune asse dei cilindri. La differenza di potenziale tra due punti sulle armature è:



$$V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

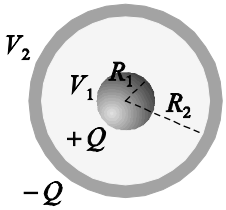
Si noti che $V_1 - V_2 > 0$ essendo l'armatura interna a potenziale maggiore di quella esterna. La carica distribuita sulle superfici dei conduttori è in valore assoluto λl, così dalla (2.16) si ha:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\lambda l}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Se la differenza $R_2 - R_1 \equiv d$ si mantiene costante, con $R_1, R_2 \gg d$, si ottiene:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_1+d}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(1+\dfrac{d}{R_1}\right)} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\dfrac{d}{R_1}} = \varepsilon_0\frac{2\pi l R_1}{d} = \varepsilon_0\frac{S}{d},$$

dove $S = 2\pi l R_1$ è la superficie dell'armatura interna; così, in questo limite, l'espressione della capacità è la stessa di quella del condensatore piano (2.17).



Esempio: (*Capacità di un condensatore sferico*). Consideriamo due sfere conduttrici con carica, in valore assoluto pari a Q e di raggi R_1 e R_2, con $R_1 < R_2$. Il campo elettrico interno al volume compreso tra le armature dalla (1.10) è:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r},$$

così la differenza di potenziale tra il conduttore interno e quello esterno vale:

$$V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

pertanto dalla relazione (2.16) la capacità vale:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Anche in questo caso, se R_1 e R_2 sono molto maggiori della differenza $d = R_2 - R_1$, si ha:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{d} \approx \varepsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d},$$

dove $S = 4\pi R_1^2$ è la superficie del conduttore interno; in questa maniera si ottiene quindi l'espressione della capacità del condensatore piano (2.17).

Bottiglia di Leida di forma cilindrica.

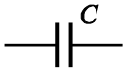
Si può definire la capacità di un conduttore isolato immaginandolo circondato da una superficie conduttrice posta a distanza infinita, il cui potenziale sia nullo. Se Q è la carica sul conduttore e V il suo potenziale, allora dalla (2.16) segue $C = Q/V$.

Esempio: Nel caso di una sfera di raggio R_1, mandando R_2 all'infinito nell'espressione della capacità del condensatore sferico, si trova:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_1.$$

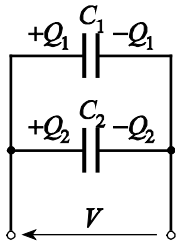
Per valutare gli ordini di grandezza della capacità, se pensiamo la Terra come un conduttore, poiché il suo raggio è circa $6.4 \times 10^6\ m$, la corrispondente capacità vale $667\ \mu F$ circa.

2.6 Collegamenti tra condensatori



In figura è mostrato il simbolo adoperato nella schematizzazione dei circuiti elettrici per rappresentare un condensatore.

Consideriamo due condensatori, rispettivamente di capacità C_1 e C_2 collegati come mostrato in figura. Quando le armature sono sottoposte ad una comune differenza di potenziale V la connessione è detta in *parallelo*. Dalla relazione (2.16), le cariche presenti su ciascun condensatore sono:



$$Q_1 = C_1 V,$$
$$Q_2 = C_2 V,$$

allora la carica totale Q immagazzinata su entrambe le coppie di armature dei due condensatori collegati in parallelo è, in valore assoluto pari a:

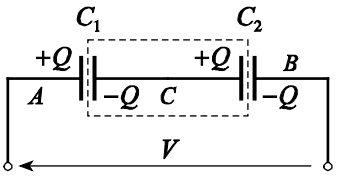
$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V = CV,$$

ove si è posto:

$$C \equiv C_1 + C_2 .$$

Cioè i due condensatori connessi in parallelo sono equivalenti ad un unico condensatore di capacità pari alla somma delle capacità di ciascun condensatore. Per un sistema di N condensatori in parallelo, rispettivamente di capacità $C_1, C_2, \ldots, C_N$, la capacità equivalente è quindi:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i .$$



Consideriamo due condensatori originariamente scarichi, rispettivamente di capacità C_1 e C_2 collegati come mostrato in figura. In tale connessione, detta in *serie*, il valore assoluto della carica su ciascuna armatura deve essere la stessa. Infatti, se si sposta la carica $-Q$ dall'armatura di sinistra a quella destra di C_1 per caricarlo in condizioni di induzione completa, siccome la carica totale racchiusa nel volume tratteggiato di figura deve mantenersi nulla, l'armatura di sinistra di C_2 deve assumere una carica pari a $+Q$; questo corrisponde allo spostamento di una carica $-Q$ dall'armatura di sinistra a quella destra di C_2. Dalla relazione (2.16) si avrà quindi:

$$V_A - V_C = \frac{Q}{C_1},$$
$$V_C - V_B = \frac{Q}{C_2},$$

così la differenza di potenziale per la combinazione in serie è:

$$V = V_A - V_B = \left(V_A - V_C\right) + \left(V_C - V_B\right) = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C},$$

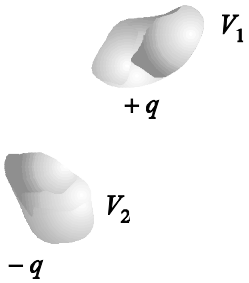
ove si è posto:

$$C \equiv \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} .$$

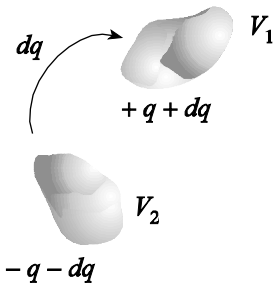
Cioè la capacità totale del sistema è pari all'inverso della somma dei reciproci delle singole capacità. Per un sistema di N condensatori in serie si ha:

$$C = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}} .$$

2.7 Energia immagazzinata in un condensatore



Consideriamo un condensatore costituito da due conduttori di forma generica, uno con carica $+q$ e potenziale V_1 e l'altro con carica $-q$ e potenziale V_2, con $V_1 > V_2$. Supponiamo di accrescere, attraverso un dispositivo esterno, la carica in valore assoluto su entrambi i conduttori di una stessa quantità $dq > 0$, ossia, in particolare, di portare la carica del primo conduttore da $+q$ a $+q+dq$ e la carica del secondo conduttore da $-q$ a $-q-dq$. Ciò è equivalente a spostare la carica dq dall'armatura a potenziale minore a quella a potenziale maggiore. Tale processo non avrebbe modo di svilupparsi in maniera spontanea ma richiede una certa energia affinché possa essere svolto; infatti, sarebbe spontaneo il processo inverso che porterebbe la carica positiva dal conduttore a potenziale maggiore a quello a potenziale minore. Il lavoro che è necessario spendere contro la forza del campo elettrico è deducibile dalla relazione (1.17):



$$dL = \left(V_1 - V_2\right) dq$$

dove, attraverso la (2.16), la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ può esprimersi tramite la capacità C del sistema come:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C}.$$

Il lavoro svolto incrementerà in eguale misura l'energia potenziale U_e del sistema, ovvero $dU_e = dL$, così:

$$dU_e = \frac{q}{C} dq .$$

L'integrazione del secondo membro di questa espressione tra una carica iniziale nulla ed una finita Q corrisponde alla circostanza in cui da un conduttore originariamente neutro viene prelevata la carica Q e trasportata sull'altro, anch'esso originariamente neutro, per ottenere la condizione di induzione completa tra i due conduttori. Assumendo che l'energia potenziale sia nulla quando entrambi i conduttori sono scarichi, risulta:

$$U_e = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

ed utilizzando la relazione (2.16) in cui V indica la differenza di potenziale tra i due conduttori, questa energia può anche essere espressa come

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV , \tag{2.18}$$

relazione scoperta da Hermann von Helmholtz nel 1847 nell'ambito di uno studio generale sugli scambi energetici.

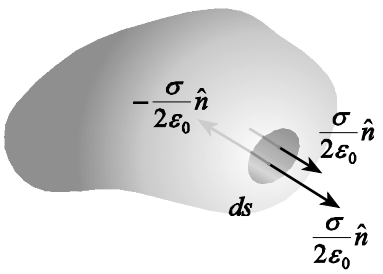
L'espressione (2.18) dell'energia immagazzinata in un condensatore può essere dedotta in maniera generale a partire dalla formula (1.46) che fornisce l'energia associata ad un campo elettrostatico. Consideriamo, ad esempio, un condensatore a facce piane e parallele di capacità C con armature di superficie S poste a distanza d; risulta:

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{tutto\ lo\ spazio} E^2\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv\,,$$

dove $\mathcal{V}$ rappresenta il volume in cui il campo elettrico, espresso attraverso la (1.18) come V/d, è diverso da zero; sviluppando tale relazione, dalla (2.17) si ha:

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{V^2}{d^2} Sd = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d} V^2 = \frac{1}{2} C V^2\,.$$

2.8 Forze elettrostatiche sui conduttori



Un elemento di carica $\sigma\, ds$ situato sulla superficie di un conduttore è soggetto al campo elettrico dovuto a tutte le altre cariche del conduttore stesso e, di conseguenza, è soggetto ad una forza elettrostatica $\vec{F}$. In condizioni di equilibrio elettrostatico tale forza si esplica nella direzione dell'elemento di superficie $d\vec{s}$ poiché, se vi fosse una componente tangenziale alla superficie determinerebbe il moto delle cariche del conduttore. Per valutare l'intensità della forza $\vec{F}$ consideriamo un conduttore all'equilibrio sul quale è distribuita una carica con densità superficiale σ ed il cui campo elettrico in prossimità della superficie valga $\vec{E}$. Dal teorema di Coulomb (2.1) tale campo vale $(\sigma/\varepsilon_0)\hat{n}$, ma la forza sull'elemento di carica $\sigma\, ds$ non è $\vec{E}\sigma\, ds$ in quanto il campo che agisce sull'elemento $\sigma\, ds$ è quello prodotto dalle altre cariche del sistema considerato. Con riferimento alla figura, attraverso l'applicazione della legge di Gauss possiamo dedurre che il campo elettrico prodotto dall'elemento di carica $\sigma\, ds$ vale $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{n}$ in prossimità della superficie esterna del conduttore e $-(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{n}$ in corrispondenza della superficie interna. Quindi le altre cariche del conduttore determinano un campo pari a $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{n}$, in modo che il campo complessivo in prossimità dell'elemento di carica considerato, dalla (2.1) valga $(\sigma/\varepsilon_0)\hat{n}$ all'esterno e sia nullo all'interno.

Pertanto l'intensità della forza $d\vec{F}$, agente sull'elemento di carica $\sigma\, ds$, è data da

$$dF = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma\, ds = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} ds$$

e dalla (2.1), la densità di forza superficiale sul conduttore, o *pressione elettrostatica*, vale:

$$p = \frac{dF}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u_e\,; \tag{2.19}$$

cioè la pressione elettrostatica è pari alla densità di energia del campo elettrico. La forza elettrostatica complessiva agente su un conduttore in equilibrio di superficie *S*, sul quale è distribuita una carica, è data da:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_S E^2 \, d\vec{s} \ . \tag{2.20}$$

Poiché il vettore $d\vec{s}$ punta verso l'esterno del conduttore, la forza $\vec{F}$ è sempre diretta verso l'esterno del conduttore, cioè il campo elettrico esercita una pressione negativa sul conduttore.

La coincidenza espressa dalla relazione (2.19) non è accidentale. Supponiamo che un conduttore in equilibrio si espanda di un fattore *dx* per effetto della pressione elettrostatica; l'espansione determina un aumento del volume del conduttore di un fattore *dV* pari a *Sdx*, dove *S* rappresenta la superficie del conduttore. Siccome il campo elettrico all'interno di un conduttore all'equilibrio è nullo, in corrispondenza dell'espansione si ha una diminuzione dell'energia elettrostatica del sistema; in particolare tale diminuzione vale:

$$dU_e = u_e \, dV \ .$$

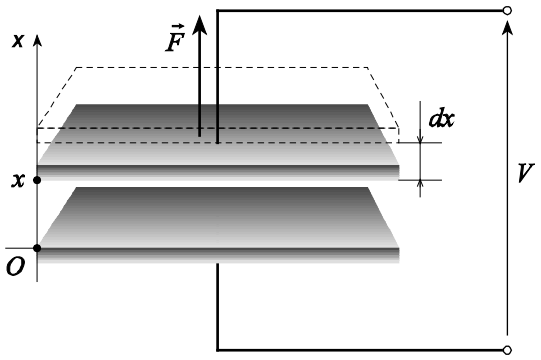
Questa variazione dell'energia è dovuta al lavoro *dL* esercitato dalla forza elettrica sul conduttore per determinarne l'espansione:

$$dL = p \, dV$$

e, dal principio di conservazione dell'energia, siccome $dU_e = dL$, segue la relazione (2.19).

La tecnica che consente di determinare una forza a partire dall'espressione dell'energia del sistema in termini di una certa variabile prende il nome di *principio dei lavori virtuali*; la sua applicazione è illustrata attraverso l'esempio seguente.

Esempio: (*Forza esercitata tra le armature di un condensatore*) Stabiliamo la forza che si esercita tra le armature di un condensatore carico attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali. Consideriamo un condensatore piano con le armature di superficie *S* poste a distanza *x*, alle quali è collegato un dispositivo tale da mantenere costante la differenza di potenziale e pari a *V*. L'applicazione del principio dei lavori virtuali consiste nel valutare la variazione di energia del sistema, corrispondente ad un cambiamento infinitesimo (virtuale) della geometria del condensatore. Con riferimento alla figura supponiamo che una delle due armature del condensatore sia mantenuta fissa e che sull'altra agisca una forza $\vec{F}$ uguale in direzione ma opposta in verso alla forza di attrazione tra le armature e tale da allontanare le armature di una quantità dx. Sia dU_e la variazione di energia elettrostatica del sistema, *dL* il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F}$ e Vdq il lavoro fatto dal dispositivo esterno per mantenere costante la differenza di potenziale tra le armature. Dalle relazioni (2.17), (2.18) e (1.18) la variazione di energia elettrostatica del condensatore è:



$$dU_e = d\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}dx = \frac{1}{2}V^2\frac{d}{dx}\left(\varepsilon_0\frac{S}{x}\right)dx = -\frac{1}{2}V^2\left(\varepsilon_0\frac{1}{x^2}\right)Sdx = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{x}\right)^2 Sdx = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sdx \ .$$

Siccome lo spostamento dx si esplica nella direzione della forza, il corrispondente lavoro vale:

$$dL = \vec{F}\cdot\left(\hat{x}\,dx\right) = F\,dx \ . \tag{2.21}$$

Infine, dalle relazioni (2.16), (2.17) (2.18) e (1.18) il lavoro del dispositivo esterno è:

$$Vdq = Vd(VC) = V^2 \frac{dC}{dx} dx = V^2 \frac{d}{dx}\left(\varepsilon_0 \frac{S}{x}\right) dx = -V^2 \left(\varepsilon_0 \frac{1}{x^2}\right) Sdx = -\varepsilon_0 \left(\frac{V}{x}\right)^2 Sdx = -\varepsilon_0 E^2 Sdx .$$

Dal principio di conservazione dell'energia risulta allora:

$$dU_e = dL + Vdq ,$$

cioè:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sdx = F\,dx - \varepsilon_0 E^2 Sdx ,$$

da cui segue:

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S ,$$

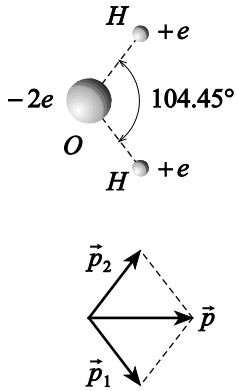
che può essere dedotta facilmente dall'espressione (2.20). Lo stesso risultato deve, ovviamente, ottenersi anche qualora si consideri il condensatore carico isolato; in tale circostanza dalle relazioni (2.16), (2.17), (2.18) e (1.18) la variazione di energia elettrostatica del condensatore vale:

$$dU_e = d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = \frac{1}{2}Q^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C}\right) dx = \frac{1}{2}Q^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\varepsilon_0 S}\right) dx = \frac{1}{2}Q^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_0 S}\right) dx = \frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{\varepsilon_0 S} dx = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V}{x}\right)^2 Sdx =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sdx .$$

che uguagliata al lavoro (2.21) porta al risultato già conseguito.

2.9 Sostanze polari e apolari

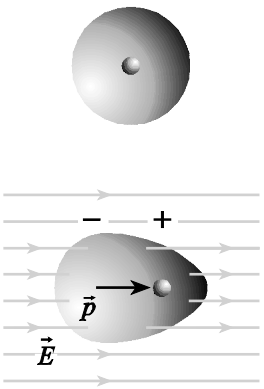
Nel 1837 Faraday dimostrò che se tra le armature di un condensatore si introduce una sostanza non conduttrice, la capacità aumenta di un certo fattore. Questo fattore di aumento, che Faraday chiamava *capacità specifica induttiva*, oggi è noto come *costante dielettrica relativa* della particolare sostanza. La sostanza in questione viene chiamata genericamente *dielettrico* poiché il suo effetto è quello di ridurre il campo elettrico tra le armature del condensatore. I fenomeni che hanno luogo in un materiale dielettrico coinvolgono i momenti di dipolo elettrico elementari presenti normalmente nel materiale o indotti dall'applicazione di un campo elettrico esterno.



Esempio: Nell'acqua (si veda la figura) il momento di dipolo della molecola è presente anche senza che vi sia applicato alcun campo elettrico esterno; siccome la molecola può essere assimilata ad un sistema rigido, i due momenti $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ associati a ciascun legame che gli atomi di idrogeno formano con quello di ossigeno, si sommano vettorialmente producendo un momento di dipolo intrinseco $\vec{p}$ di intensità pari a $6.2\times10^{-3}\,Cm$ circa.

Le molecole caratterizzate da un *momento di dipolo intrinseco* si dicono *polari*; l'applicazione di un campo elettrico $\vec{E}$ ai materiali costituiti da tali molecole determina l'azione sui momenti di dipolo elementari $\vec{p}$ di un momento torcente, pari a $\vec{p}\times\vec{E}$, che produce l'orientazione dei dipoli nella direzione parallela al campo. Esiste inoltre una classe di materiali le cui molecole sono prive di momento intrinseco e sono dette, pertanto, *apolari*. In questi materiali l'applicazione di un campo

elettrico esterno può determinare la generazione di un momento di dipolo. Consideriamo, ad esempio, una molecola monoatomica; questa può essere schematizzata come un nucleo centrale carico positivamente e circondato da una nube sferica, concentrica al nucleo, carica negativamente. In condizioni normali la molecola è neutra ed inoltre i baricentri delle cariche positive[8] e negative coincidono. L'applicazione di un campo elettrico esterno determina una deformazione della molecola provocando la separazione dei baricentri delle due cariche nella direzione del campo applicato. Ciò induce la formazione di un momento di dipolo (*momento di dipolo indotto*).



Esempio: Schematizziamo un atomo di elio come una distribuzione sferica omogenea di carica negativa, pari a $-2e$, concentrica ad un nucleo positivo, di carica $+2e$. Dalla (1.12) segue che se la distribuzione sferica viene spostata rispetto al nucleo di una quantità *d*, tra tale distribuzione ed il nucleo si esercita una forza attrattiva di intensità pari a:

$$F = \frac{(2e)^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} d \,,$$

dove R è il raggio della distribuzione sferica. Pertanto, quando si applica un campo $\vec{E}$ a questa configurazione di carica, all'equilibrio, tale forza viene bilanciata dalla forza F_{ext} esercitata attraverso il campo $\vec{E}$, cioè:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F} = \vec{0} \,.$$

Poiché è possibile esprimere la forza F_{ext} attraverso il campo E come $2eE$, sostituendo nella relazione precedente si trova:

$$d = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{2e} E \,.$$

tale deformazione dell'atomo origina un momento di dipolo la cui intensità è pari a:

$$p = 2ed = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E \,.$$

Assumendo quale raggio[9] dell'atomo di elio il valore di $28\ pm$ si trova che il rapporto p/E vale $2.44 \times 10^{-42}\ m^2 C/V$.

---

[8] Il baricentro delle cariche è definito in analogia col caso meccanico. Dato un sistema di cariche $q_1, q_2, \ldots, q_N$, rispettivamente di vettori posizione $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ rispetto ad un'opportuna origine *O*, il baricentro del sistema è definito come:

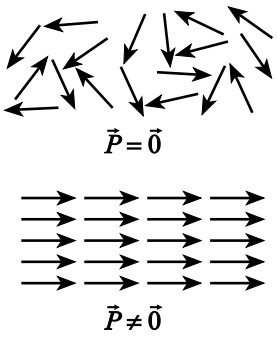
$$\vec{r}_C \equiv \frac{q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + \ldots + q_N\vec{r}_N}{q_1 + q_2 + \ldots + q_N} \,.$$

[9] Il valore adoperato in questo esempio è il *raggio covalente* dell'atomo, cioè la metà della distanza tra i nuclei di due atomi di uno stesso elemento legati tra loro in modo covalente; l'elio è un gas nobile e pertanto i suoi atomi non si legano tra loro attraverso legami covalenti ma sono tenuti uniti dalle deboli forze di Van der Waals, per cui la distanza internucleare è maggiore ed il raggio covalente è, di conseguenza, solo una stima per eccesso del raggio atomico.

2.10 Polarizzazione

Per quantificare macroscopicamente il fenomeno testé descritto è possibile introdurre un momento di dipolo per unità di volume, definito come:

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}, \tag{2.22}$$

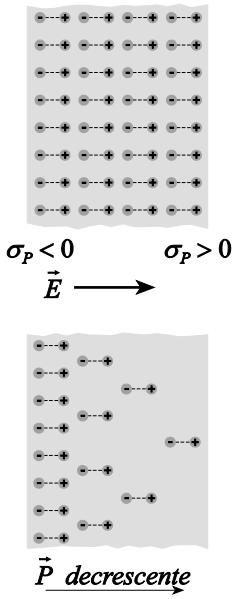


in cui $\sum_i \vec{p}_i$ rappresenta la somma vettoriale di tutti i momenti di dipolo contenuti nel volume ΔV. Dimensionalmente tale vettore, a cui viene attribuito il nome di *vettore di polarizzazione*, si esprime in C/m^2. Un materiale dielettrico è caratterizzato da molecole dotate di un momento di dipolo intrinseco o di un momento di dipolo indotto dall'applicazione di un campo elettrico esterno al materiale. Pertanto, in assenza di un campo elettrico esterno applicato, i dipoli elementari o sono orientati a caso oppure sono del tutto assenti e, di conseguenza, il vettore $\vec{P}$ è nullo. Si osservi che l'azione di allineamento del campo elettrico esterno risulta comunque incompleta per effetto dell'agitazione termica. Il grado di allineamento aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare dell'intensità del campo elettrico[10]. In generale $\vec{P}$ è diverso, in modulo, direzione e verso, punto per punto nel materiale considerato e la relazione (2.22) definisce un campo vettoriale interno al dielettrico stesso.

Il limite indicato nella (2.22) si può esprimere come:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv},$$

per cui, in un punto del dielettrico, la quantità $\vec{P}dv$ rappresenta il momento di dipolo elettrico proprio del volume infinitesimo dv che contiene il punto considerato. In particolare, se il vettore $\vec{P}$ è costante in tutti punti di un volume finito $\mathcal{V}$ del materiale, questo è polarizzato uniformemente ed il momento di dipolo elettrico totale $\vec{p}$ del volume $\mathcal{V}$ è dato dal prodotto $\vec{P}\mathcal{V}$.



Gli effetti microscopici che hanno luogo in un materiale dielettrico per effetto dell'azione di un campo elettrico esterno furono descritti fenomenologicamente da Faraday nel 1837 e, successivamente, in termini analitici dal matematico italiano Ottaviano Fabrizio Mossotti nel 1846. L'azione sul materiale dielettrico di un campo elettrico determina l'orientazione dei dipoli elementari nella sua direzione. Se il vettore $\vec{P}$ è uniforme, mentre le cariche interne al materiale vengono a due a due bilanciate, le cariche presenti sulla superficie del materiale restano scoperte. Si formano

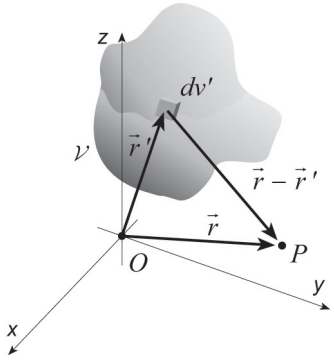
[10] Si può infatti provare che il momento di dipolo medio $\langle \vec{p} \rangle$ è dato dalla *funzione di Boltzmann*:

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{p^2 \vec{E}}{3kT},$$

in cui k è la costante di Boltzmann, T la temperatura e p il modulo del momento di dipolo intrinseco delle molecole.

quindi due distribuzioni superficiali di carica di densità pari (in valore assoluto) a σ_P; d'altra parte, se il vettore $\vec{P}$ non è uniforme tale azione di compensazione all'interno del materiale risulta incompleta; pertanto, si avrà anche una distribuzione volumetrica di carica di densità pari a ρ_P, interna al materiale dielettrico. Si osservi che la carica associata alle distribuzioni σ_P e ρ_P non è libera, nel senso che non può muoversi nel materiale, ma è solo un effetto dell'orientazione dei dipoli elementari, e viene detta pertanto *carica legata*.

Consideriamo un volume $\mathcal{V}$ di materiale dielettrico; sotto l'azione di un campo elettrico esterno ad un generico elemento di volume dv' di vettore posizione $\vec{r}'$ di $\mathcal{V}$ corrisponde un dipolo elementare $d\vec{p}$ di momento pari a $\vec{P}(\vec{r}')dv'$, dove $\vec{P}(\vec{r}')$ è il vettore polarizzazione in $\vec{r}'$ (si veda la figura). Dalla relazione (1.39), il potenziale prodotto da tale dipolo elementare in un punto di vettore posizione $\vec{r}$ vale:



$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv';$$

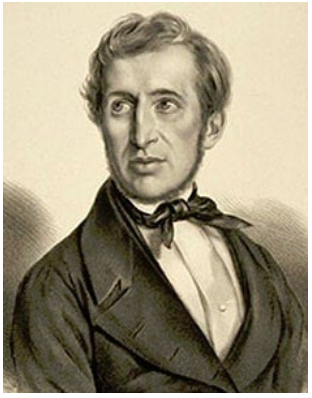
utilizzando l'identità $(\vec{r}-\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = \vec{\nabla}'(1/|\vec{r}-\vec{r}'|)$ in cui le operazioni di derivazione sono eseguite rispetto alle coordinate dell'elemento di volume che contiene il dipolo (si veda l'Appendice B), si ha

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dv'.$$

Integrando su tutto il volume $\mathcal{V}$ del materiale, si ha:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dv';$$

facendo uso dell'identità vettoriale $\vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{v}) = \psi\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\psi$, dove ψ è una funziona scalare e $\vec{v}$ una funzione vettoriale entrambe derivabili, ponendo $\vec{v}$ e ψ rispettivamente pari a $\vec{P}(\vec{r}')$ ed a $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$, l'espressione del potenziale diventa:


Ottaviano Fabrizio Mossotti

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\vec{\nabla}'\left[\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]dv' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')dv'$$

ed infine, applicando il teorema della divergenza al primo integrale della somma, si ha:

$$
\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{P}(\vec{r}')\cdot d\vec{s} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')\,dv' = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{S}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left[\vec{P}(\vec{r}')\cdot\hat{n}\right]ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\left[-\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}(\vec{r}')\right]dv' ,
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

dove $\mathcal{S}$ rappresenta la superficie di contorno al volume $\mathcal{V}$ del materiale. Alla luce delle espressioni del potenziale determinato da distribuzioni superficiali e volumetriche di carica[11], la relazione (2.23) mostra che l'effetto della polarizzazione può essere ricondotto alla combinazione di una distribuzione di carica situata sulla superficie del materiale, con densità $\vec{P}\cdot\hat{n}$, in cui $\hat{n}$ è al solito il versore normale uscente dalla superficie del materiale, e una distribuzione volumetrica interna al materiale di densità $-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$:

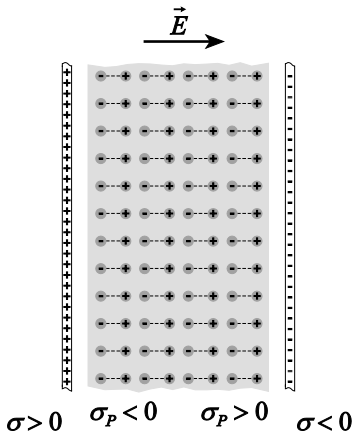
$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}\,, \tag{2.24}$$

$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\,. \tag{2.25}$$

Poiché il fenomeno della polarizzazione corrisponde unicamente all'orientazione dei dipoli elementari presenti nel materiale, la carica complessiva di polarizzazione q_P è nulla; infatti, se $\mathcal{S}$ rappresenta la superficie del dielettrico di volume $\mathcal{V}$, dalle relazioni (2.24) e (2.25) segue che tale carica vale:

$$q_P = \int_{\mathcal{S}} \sigma_P\, ds + \int_{\mathcal{V}} \rho_P\, dv = \int_{\mathcal{S}} \vec{P}\cdot\hat{n}\, ds - \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\, dv = \int_{\mathcal{S}} \vec{P}\cdot\hat{n}\, ds - \int_{\mathcal{S}} \vec{P}\cdot\hat{n}\, ds = 0\,,$$

in cui si è fatto uso del teorema della divergenza per cambiare il dominio di integrazione nel secondo integrale.



Esempio: Dall'espressione (2.25) emerge che la densità ρ_P è nulla se il vettore $\vec{P}$ è, ad esempio, uniforme. In questo caso, quale effetto dell'applicazione di un campo elettrico sul materiale, si ha la formazione della distribuzione di carica superficiale. La densità σ_P in un punto della superfice del dielettrico è pari alla proiezione del vettore $\vec{P}$ nella direzione normale alla superficie nel punto considerato. Ciò accade, ad esempio, in un condensatore a facce piane e parallele la cui regione compresa tra le armature è riempita con un materiale dielettrico omogeneo ed isotropo. All'applicazione di una differenza di potenziale tra le armature del condensatore, su queste si origineranno delle distribuzioni di carica superficiale di densità pari (in valore assoluto) a σ. Il campo elettrico $\vec{E}$ che si genera di conseguenza, orienta i dipoli elementari creando quindi due ulteriori distribuzioni di carica sulle superfici

[11] Rispettivamente

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dv'$$

per una distribuzione di carica con densità ρ in un volume $\mathcal{V}$ e

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,ds'$$

per una distribuzione di carica con densità σ su una superficie $\mathcal{S}$.

affacciate alle armature; in particolare $\sigma_P < 0$ in corrispondenza dell'armatura carica positivamente (dove $\sigma > 0$) e $\sigma_P > 0$ in prossimità dell'altra armatura (dove $\sigma < 0$). Queste due distribuzioni di carica determinano la formazione di un campo elettrico nella regione compresa tra le armature di segno opposto rispetto a quello prodotto dalle cariche situate sulle armature; pertanto, il campo elettrico in tale regione ha intensità inferiore rispetto a quello che si avrebbe in assenza del dielettrico.

2.11 Il vettore spostamento

La polarizzazione di un dielettrico può essere descritta dal punto di vista macroscopico attraverso il solo vettore polarizzazione $\vec{P}$, legato alle distribuzioni superficiale σ_P e volumetrica ρ_P delle cariche di polarizzazione attraverso le relazioni (2.24) e (2.25). Pertanto, noto tale vettore si possono determinare le relative distribuzioni di carica. La valutazione del campo elettrico in un dielettrico procede come nel vuoto, tenendo conto sia delle cariche libere che delle cariche legate, le quali saranno note a partire dalle corrispondenti distribuzioni. In principio tale determinazione potrebbe essere svolta analogamente a quanto fatto in precedenza, stabilendo prima il potenziale e deducendo da questo il campo elettrico. Tuttavia, prescindendo dalle difficoltà matematiche di questo procedimento, nella maggior parte dei casi le densità delle cariche di polarizzazione, o alternativamente il vettore $\vec{P}$, non sono noti a priori; invece sono usualmente note le distribuzioni delle cariche libere. Generalizzando la legge di Gauss al caso dei dielettrici, in una regione di spazio in cui sono presenti sia cariche libere che di polarizzazione, si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0}. \tag{2.26}$$

Sostituendo in questa espressione ρ_P dalla (2.25) si ottiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla} \cdot \vec{P},$$

ovvero:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) = \rho .$$

Tale relazione può essere espressa come:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \tag{2.27}$$

definendo il vettore $\vec{D}$ come:

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{2.28}$$

Maxwell attribuì al vettore $\vec{D}$ il nome di *vettore spostamento*; la relazione (2.27) mostra che tale vettore è originato dalle cariche libere, a differenza del campo elettrico che, come evidenziato dalla (2.26), dipende sia dalle cariche libere che da quelle di polarizzazione; dalla (2.28) si deduce che l'unità di misura del vettore spostamento è la medesima di quella del vettore polarizzazione, cioè

C/m^2. Nella maggior parte dei dielettrici il vettore polarizzazione $\vec{P}$ è proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}; \tag{2.29}$$

i dielettrici che soddisfano tale relazione in cui χ_e è uno scalare sono detti *lineari* e sono dei materiali amorfi, caratterizzati da isotropia spaziale. La quantità adimensionale χ_e prende il nome di *suscettività dielettrica* del mezzo materiale e fornisce un'indicazione della capacità che ha il mezzo di polarizzarsi sotto l'azione di un campo elettrico[12]. Sostituendo la (2.29) nella (2.28) si ottiene:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \tag{2.30}$$

dove si è posto

$$\varepsilon_r \equiv 1 + \chi_e; \tag{2.31}$$

tale quantità prende il nome di *costante dielettrica relativa* del materiale considerato. Il prodotto

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

è detto *costante dielettrica assoluta* del materiale considerato.

Integrando su un volume $\mathcal{V}$ racchiuso dalla superficie $\mathcal{S}$ ambo i membri della relazione (2.27) si ottiene:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dv = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = q,$$

dove q rappresenta la carica contenuta all'interno del volume considerato; applicando il teorema della divergenza al primo membro, si ha infine:

---

[12] Posto $\alpha \equiv \varepsilon_0 \chi_e$, la relazione (2.29) viene anche scritta nella forma $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, sottintendendo con tale espressione la relazione:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

In questo modo è possibile descrivere i materiali in cui il vettore polarizzazione non si allinea nella direzione del campo elettrico. La matrice:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix},$$

prende il nome di *tensore di polarizzabilità*. I dielettrici lineari sono quelli in corrispondenza dei quali il tensore di polarizzabilità è una matrice diagonale con gli elementi tutti uguali ($\alpha_{ii} = \alpha_{jj}, \alpha_{ij} = 0$, per $i, j = x, y, z$ e $i \neq j$).

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q \,. \tag{2.32}$$

Questa relazione, che rappresenta l'espressione integrale della legge di Gauss per il vettore spostamento, può essere interpretata affermando che il flusso di tale vettore attraverso una superficie chiusa, contenente, in generale, sia cariche libere che cariche di polarizzazione, dipende unicamente dalle cariche libere presenti all'interno. L'importanza della precedente relazione è nel fatto che, in generale, la superficie chiusa $\mathcal{S}$ può intersecare il dielettrico, invece che contenerlo interamente, per cui la carica di polarizzazione contenuta all'interno di $\mathcal{S}$ non è, in generale, nulla. Seguendo un approccio analogo a quello adoperato per dedurre la (2.1), il teorema di Coulomb per il vettore spostamento si esprime come:

$$\vec{D} = \sigma \hat{n} \,. \tag{2.33}$$

Infine, dalle relazioni (2.32) e (2.30) segue che in un dielettrico lineare la legge di Gauss in forma integrale si esprime come:

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \,. \tag{2.34}$$

Dalle relazioni (2.30) e (2.33) segue:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \hat{n} \tag{2.35}$$

che formalizza la diminuzione del campo elettrico, di un fattore $1/\varepsilon_r$, all'interno di un dielettrico rispetto al valore nel vuoto.

Sostituendo il campo elettrico $\vec{E}$ dalla relazione (2.30) nella (2.29) e facendo uso della (2.31) si ottiene:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\chi_e}{1+\chi_e} \vec{D} \,.$$

Se il dielettrico è lineare, χ_e è uno scalare ed i vettori $\vec{P}$ e $\vec{D}$ risultano paralleli. Applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri di tale identità, dalla relazione (2.25) segue:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\chi_e}{1+\chi_e} \right).$$

Se il dielettrico è omogeneo, il termine $\chi_e / (1+\chi_e)$ è indipendente dalle variabili spaziali ed il suo gradiente è nullo, quindi

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{\chi_e}{1+\chi_e} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \,;$$

in assenza di cariche libere nel dielettrico, dalla (2.27) segue $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$ per cui $\rho_P=0$. Pertanto, in un dielettrico lineare ed omogeneo, in assenza di cariche libere nel dielettrico le cariche volumetriche di polarizzazione sono nulle e la carica di polarizzazione si distribuisce unicamente sulle superfici. Se invece il dielettrico non è omogeneo il gradiente di $\chi_e/(1+\chi_e)$ è diverso da zero così, anche in assenza di cariche libere saranno presenti delle cariche volumetriche di polarizzazione, la cui densità dipende dal gradiente della funzione $\chi_e/(1+\chi_e)$:

$$\rho_P=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}=-\vec{D}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{\chi_e}{1+\chi_e}\right).$$

Esempio: Consideriamo un condensatore piano carico con armature di superficie *S* e distanti *d*. Nel vuoto la sua capacità è data dalla espressione (2.17):

$$C_0=\varepsilon_0\frac{S}{d}.$$

Supponiamo che la regione compresa tra le armature sia riempita da un materiale dielettrico di costante dielettrica relativa pari a ε_r. La differenza di potenziale *V* tra le armature di un condensatore piano è:

$$V=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}d=\frac{Q}{S}\frac{d}{\varepsilon_0\varepsilon_r},$$

dove *Q* rappresenta la carica distribuita (in valore assoluto) sulle armature ed il campo elettrico è espresso attraverso la (2.35). Dalla relazione (2.16) segue infine:

$$C=\frac{Q}{V}=\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{S}{d}=\varepsilon_r C_0;$$

cioè il fattore di aumento della capacità corrispondente all'introduzione tra le armature di un materiale di costante dielettrica relativa ε_r è pari al valore della costante dielettrica relativa stessa.

Sebbene provata limitatamente al caso del condensatore piano, è possibile verificare che la proprietà dimostrata attraverso l'esempio precedente ha carattere generale. Pertanto, la presenza di un dielettrico in tutto lo spazio compreso tra le armature di un condensatore di forma qualsiasi ne determina un aumento della capacità $(\varepsilon_r>1)$ di un fattore pari alla costante dielettrica relativa propria del dielettrico.

2.12 Energia elettrostatica in presenza di un dielettrico

L'energia elettrostatica in presenza di un dielettrico è fornita dalla relazione (1.45) che risulta ancora valida in questo contesto:

$$U_e=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}}V\rho\,dv,$$

dove l'integrale è esteso alla regione di spazio $\mathcal{V}$ occupata dalle cariche. Tuttavia in questo caso il valore della densità di carica deve essere dedotto dalla (2.27), così, sostituendo nella precedente espressione, si ha:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} V\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\,dv\,.$$

Procedendo quindi in maniera analoga a quanto fatto nel Paragrafo 1.11 si giunge alla relazione:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv\,, \tag{2.36}$$

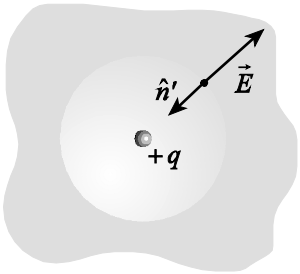
che corrisponde ad una densità di energia pari a $\vec{D}\cdot\vec{E}/2$. Utilizzando la relazione (2.30), la (2.36) diventa:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \left(\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\right)\cdot\vec{E}\,dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} \varepsilon_r E^2\,dv$$

e, se il mezzo è omogeneo risulta, infine:

$$U_e = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathcal{V}} E^2\,dv\,.$$

Esempio: Consideriamo un blocco di materiale dielettrico omogeneo e isotropo di costante dielettrica ε_r, all'interno del quale è praticata una cavità sferica. Supponiamo che al centro della cavità sia posta una carica puntiforme q positiva e stabiliamo la carica di polarizzazione q_{pol} che si origina sulla superficie della cavità. Indicando con σ_P la densità di carica di polarizzazione, risulta:



$$q_{pol} = 4\pi R^2\sigma_P\,,$$

dove R è il raggio della cavità. La densità σ_P può essere dedotta dal vettore polarizzazione $\vec{P}$ attraverso la relazione (2.24), pertanto dalla (2.29), esprimendo la suscettività dielettrica tramite la (2.31), segue:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\vec{E}$$

e moltiplicando ambo i membri per la normale alla superficie della cavità $\hat{n}'$, si ha:

$$\vec{P}\cdot\hat{n}' = \varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)\vec{E}\cdot\hat{n}'\,.$$

Dalla (2.24) segue che il primo membro di questa identità è pari a σ_P, inoltre, siccome la carica è positiva, il campo elettrico $\vec{E}$ nel dielettrico è diretto nel verso opposto a $\hat{n}'$, per cui $\vec{E}\cdot\hat{n}' = -E$; pertanto, sostituendo, si ha:

$$\sigma_P = -\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - 1\right)E\,.$$

Il campo elettrico nel dielettrico può essere ricavato dall'estensione della legge di Gauss (2.34) e si trova:

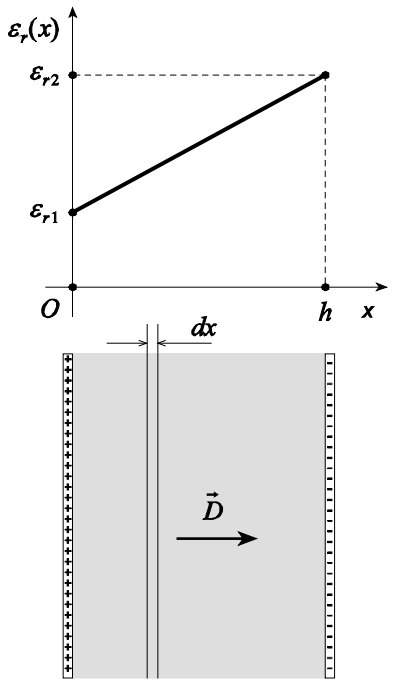
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{R^2}\,,$$

per cui, sostituendo nell'espressione precedente e ricavando q_{pol}, si ha:

$$q_{pol} = -q\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}.$$

Tale espressione prova che la carica di polarizzazione ha segno opposto rispetto a q e, in valore assoluto è sempre minore di q.

Esempio: Consideriamo un condensatore piano la cui regione tra le armature è riempita da un dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa varia in modo lineare da un valore ε_{r1} a ε_{r2} passando dall'armatura positiva a quella negativa. Cioè, se h è la distanza tra le armature, il valore della costante dielettrica relativa al variare della distanza x tra le armature è dato dall'espressione:



$$\varepsilon_r(x) = \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h}x.$$

La capacità di tale condensatore si può stabilire schematizzandolo come la serie di infiniti condensatori caratterizzati, ciascuno, da una capacità il cui inverso vale $dx/\left[\varepsilon_r(x)\varepsilon_0 S\right]$, dove S è la superficie delle armature. Pertanto l'inverso della capacità del condensatore C vale:

$$\frac{1}{C} = \int_0^h \frac{dx}{\varepsilon_r(x)\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\int_0^h \frac{dx}{\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h}x} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\frac{h}{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}\ln\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right).$$

Siccome il dielettrico non è omogeneo, in questo caso la densità volumetrica delle cariche di polarizzazione all'interno del dielettrico è diversa da zero. Se q è la carica presente sull'armatura positiva, dalla (2.33) segue che il vettore spostamento vale:

$$\vec{D} = \sigma\hat{x} = \frac{q}{S}\hat{x},$$

poiché $\sigma = q/S$ è la densità con cui è distribuita la carica libera sull'armatura positiva. Dalla relazione (2.29), facendo uso della (2.30) per esprimere il campo elettrico $\vec{E}$ nel dielettrico attraverso il vettore spostamento e adoperando inoltre la relazione (2.31), si ha:

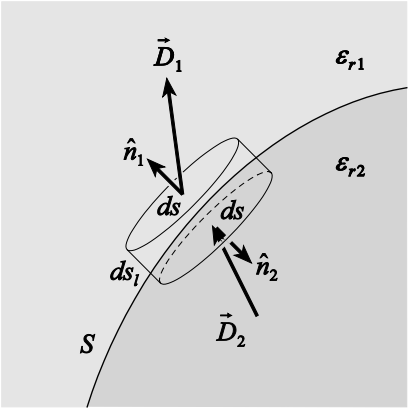
$$\vec{P}(x) = \chi_e(x)\varepsilon_0\vec{E} = \left[\varepsilon_r(x) - 1\right]\varepsilon_0\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r(x)} = \frac{\varepsilon_r(x) - 1}{\varepsilon_r(x)}\vec{D} = \frac{q}{S}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r(x)}\right]\hat{x} = \frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h}x}\right)\hat{x},$$

pertanto, dalla (2.25) segue che la densità volumetrica della carica di polarizzazione ρ_P vale:

$$\rho_P(x) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{dP(x)}{dx} = -\frac{q(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1})}{hS}\frac{1}{\left(\varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h}x\right)^2}.$$

2.13 Condizioni di raccordo all'interfaccia tra due dielettrici

Consideriamo la superficie S di separazione tra due dielettrici diversi di costanti dielettriche relative ε_{r1} e ε_{r2}. Supponiamo che tale superficie sia priva di cariche libere. Consideriamo inoltre un cilindro infinitesimo di basi ds parallele a S la cui superficie laterale ds_l sia un infinitesimo di ordine superiore a ds. Trascurando il flusso attraverso la superficie laterale, il flusso del vettore $\vec{D}$ attraverso l'intera superficie del cilindro vale:



$$d\phi\left(\vec{D}\right) = \vec{D}_1 \cdot \hat{n}_1\, ds + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}_2\, ds = \left(D_{n1} - D_{n2}\right) ds\,,$$

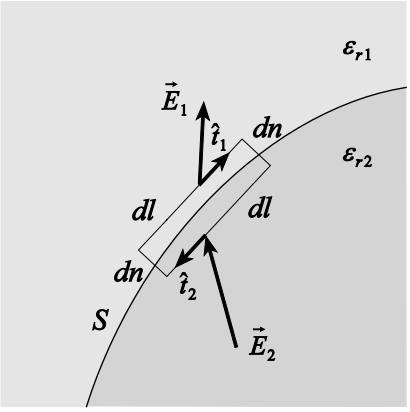
dove $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$ rappresentano, rispettivamente, i vettori spostamento nelle due regioni e D_{n1} e D_{n2} sono le proiezione lungo le normali alle basi del cilindro di tali vettori; questo flusso è nullo in quanto, per ipotesi, la superficie di interfaccia tra i due dielettrici è priva di cariche libere, così:

$$D_{n1} = D_{n2}\,,$$

inoltre dalla relazione (2.30) segue:

$$\varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_{r2} E_{n2}\,. \tag{2.37}$$

Cioè, attraversando l'interfaccia tra due dielettrici diversi la componente del vettore spostamento, normale all'interfaccia, non subisce alcuna discontinuità mentre la componente normale del campo elettrico è discontinua.



Consideriamo un percorso chiuso infinitesimo costituito da due tratti elementari dl paralleli alla superficie S e due tratti dn perpendicolari alla superficie, infinitesimi di ordine superiore a dl. Trascurando il contributo dei due tratti dn, la circuitazione del vettore $\vec{E}$ lungo tale percorso vale:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \hat{t}_1\, dl + \vec{E}_2 \cdot \hat{t}_2\, dl = \left(E_{t1} - E_{t2}\right) dl\,,$$

dove $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ rappresentano i campi elettrici nelle due regioni e E_{t1} e E_{t2} rappresentano le proiezioni lungo le tangenti al percorso specificato dei campi elettrici. Siccome il campo elettrostatico è conservativo, la circuitazione del vettore $\vec{E}$ lungo un qualsiasi percorso chiuso è nulla e pertanto:

$$E_{t1} = E_{t2}\,, \tag{2.38}$$

quindi, dalla (2.30):

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_{r2}}\,.$$

Cioè, attraversando la superficie di separazione fra due dielettrici diversi la componente del campo elettrico parallela all'interfaccia non subisce alcuna discontinuità mentre la componente parallela del vettore spostamento è discontinua.

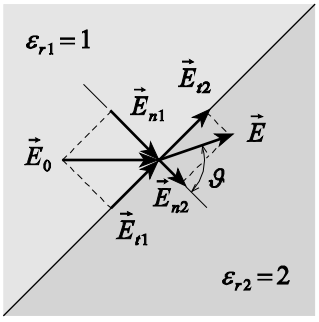
Pertanto, le relazioni di raccordo all'interfaccia tra due dielettrici diversi sono, per il campo elettrico:

$$\begin{cases} \varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_{r2} E_{n2} \,, \\ E_{t1} = E_{t2} \end{cases},$$

e per il vettore spostamento:

$$\begin{cases} D_{n1} = D_{n2} \,, \\ \dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_{r1}} = \dfrac{D_{t2}}{\varepsilon_{r2}} . \end{cases}$$

Esempio: Una lastra di dielettrico di costante dielettrica relativa pari a 2 è posta, nel vuoto, a 45° rispetto alle linee di forza di un campo elettrico esterno uniforme $\vec{E}_0$. A partire dalle condizioni di raccordo stabiliamo l'andamento delle linee di forza all'interno della lastra. Dalla (2.37) segue:



$$E_{n2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{n1}$$

così, sostituendo a ε_{r1}, 1 e a ε_{r2}, 2, rispettivamente le costanti dielettriche relative del vuoto e del mezzo materiale considerato, si ha:

$$E_{n2} = \frac{1}{2} E_{n1}$$

quindi, facendo il rapporto membro a membro con la (2.38)

$$E_{t2} = E_{t1} \,,$$

siccome

$$E_{n1} = E_{t1} \,,$$

si ha:

$$\tan \vartheta = \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = 2 \frac{E_{t1}}{E_{n1}} = 2 \,,$$

essendo ϑ l'angolo compreso tra la direzione del campo elettrico $\vec{E}$ nel dielettrico e la normale all'interfaccia, così:

$$\vartheta \approx 63° \,.$$