

5 PROPRIETÀ MAGNETICHE DEI MATERIALI



André Marie Ampère

A seguito della scoperta di Ørsted dell'azione magnetica prodotta da un filo conduttore percorso da corrente, l'ipotesi più naturale che molti fisici avanzarono per spiegare questo effetto fu che, in tale circostanza, il conduttore si magnetizzi. Nel 1820 Ampère propose un'interpretazione alternativa che, al contrario, ipotizzava che un magnete si debba ritenere costituito da un insieme di correnti. In particolare Ampère immaginò che, ad esempio, all'interno di un magnete cilindrico si situino un complesso di correnti circolari equiverse, disposte perpendicolarmente all'asse del magnete. In tale modello, un filo conduttore fisso percorso da corrente, situato parallelamente all'asse del magnete, determina una forza su questo facendolo deviare. Tale ipotesi è alla base dell'interpretazione moderna dei fenomeni magnetici. L'attuale conoscenza della struttura microscopica della materia ci porta a ricondurre, in una descrizione semiclassica, le *correnti amperiane* ai moti degli elettroni negli atomi. In un tale modello, ad esempio per l'atomo di idrogeno, l'elettrone ruota attorno al nucleo con una velocità \vec{v} di modulo costante lungo un percorso circolare. Se r è il raggio dell'orbita, il tempo T necessario a descrivere tale orbita è:

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

e l'intensità della corrente I associata a questo moto vale:

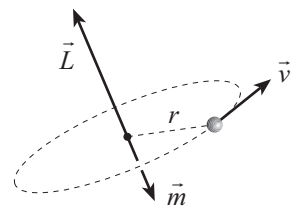
$$I = -\frac{e}{T} = -\frac{ev}{2\pi r}, \quad (5.1)$$

dove $-e$ rappresenta la carica dell'elettrone. Dalla relazione (4.8), se S indica la superficie dell'orbita, il momento magnetico \vec{m} associato a questo moto ha modulo pari a:

$$m = IS = -\frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = -\frac{1}{2} evr.$$

Siccome il modulo del momento angolare \vec{L} dell'elettrone rispetto all'asse di rotazione vale $m_e vr$, dove m_e indica la massa dell'elettrone, il momento magnetico si scrive:

$$\vec{m} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)\vec{L},$$



in cui il segno segue dal fatto che la carica dell'elettrone è negativa.

Una descrizione completa dei fenomeni atomici richiede l'impiego della meccanica quantistica, nondimeno in tale ambito è possibile provare che la relazione precedente continua a restare valida, sebbene il momento angolare assumi solo valori proporzionali ad una quantità \hbar pari a $h/(2\pi)$, in cui h , detta *costante di Planck*, vale $6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ circa; in particolare risulta:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

e pertanto:

$$m = \sqrt{l(l+1)} \frac{e\hbar}{2m_e} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Il momento magnetico corrispondente alla rivoluzione dell'elettrone attorno al nucleo prende il nome di *momento magnetico orbitale*. Siccome nella maggior parte delle sostanze il momento orbitale di un elettrone si compensa con quello, di verso contrario, di un altro elettrone orbitante nella direzione opposta, l'effetto magnetico prodotto dal moto orbitale degli elettroni è nullo o molto piccolo. Un ulteriore contributo al momento magnetico dell'atomo è costituito da una caratteristica dell'elettrone che prende il nome di *spin* e rappresenta un momento angolare intrinseco di questa particella. Il modulo dello spin \vec{S} è pari a $\hbar/2$ ed a tale momento angolare è associato un momento magnetico, detto *momento magnetico di spin* m_B , che in questo caso assume il valore:

$$\vec{m}_B = -\left(\frac{e}{m_e}\right) \vec{S},$$

pertanto:

$$m_B = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Negli atomi o molecole gli elettroni sono accoppiati tra loro con gli spin in direzioni opposte, con la conseguente compensazione dei relativi momenti magnetici; tuttavia, gli atomi con un numero dispari di elettroni o quelli in cui l'accoppiamento con gli spin contrapposti non è favorito energeticamente, possono avere uno o più elettroni spaiati e, di conseguenza, un momento magnetico non nullo. In generale il momento magnetico di un atomo è la somma vettoriale, calcolata secondo le regole della meccanica quantistica, dei momenti magnetici orbitali e di spin¹.

¹ Anche i costituenti del nucleo atomico, il protone ed il neutrone, possiedono un momento angolare di spin \vec{S} di modulo pari a $\hbar/(2\pi)$ e di conseguenza determinano un momento magnetico. Per il protone risulta:

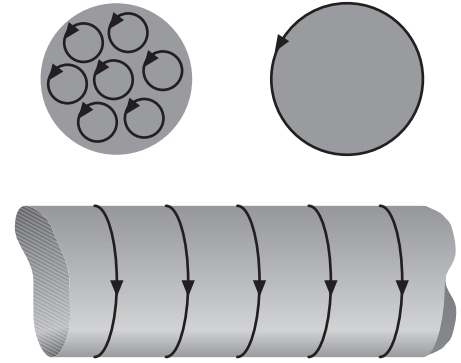
$$\vec{m}_p = 2.79 \left(\frac{e}{2m_p}\right) \vec{S},$$

dove m_p è la massa del protone; per il neutrone si ha:

$$\vec{m}_n = -1.91 \left(\frac{e}{2m_n}\right) \vec{S},$$

5.1 Magnetizzazione

Consideriamo un materiale omogeneo in cui gli atomi o le molecole costituenti siano dotati di un momento magnetico elementare; supponiamo di realizzare un cilindro macroscopico molto lungo rispetto alla sua sezione. Supponiamo infine che tutti questi momenti magnetici siano allineati parallelamente all'asse del cilindro; in tale circostanza si osserva che le correnti elementari interne al cilindro tendono ad elidersi mutuamente, lasciando il solo contributo delle correnti situate in corrispondenza della superficie. Pertanto, dal punto di vista macroscopico il cilindro magnetizzato equivale ad una distribuzione superficiale di corrente; tale corrente prende il nome di *corrente di magnetizzazione*.



La corrente di magnetizzazione può essere descritta in maniera quantitativa introducendo il *vettore di magnetizzazione* \vec{M} , in maniera analoga a quanto già fatto col vettore di polarizzazione per i materiali dielettrici; sia:

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V},$$

in cui $\sum_i \vec{m}_i$ rappresenta la somma vettoriale di tutti i momenti magnetici contenuti nel volume ΔV ; dimensionalmente tale vettore si esprime in A/m . Il limite espresso nella forma precedente può essere scritto come:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv},$$

per cui ad un volume dv del materiale magnetizzato corrisponde un momento di dipolo magnetico $\vec{M} dv$. Dalla (4.42), il potenziale vettore prodotto da un momento magnetico infinitesimo $d\vec{m}$ vale:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \hat{r}}{r^2} dv,$$

utilizzando l'identità $\vec{\nabla}(1/r) = \hat{r}/r^2$, in cui si intende che le operazioni di derivazione sono eseguite rispetto alle coordinate dell'elemento di volume che contiene il dipolo, la relazione precedente diventa:

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) dv,$$

e integrando su tutto il volume \mathcal{V} del materiale, si ha:

dove m_n è la massa del neutrone. Poiché la massa del protone e quella del neutrone sono circa 2000 volte più grandi di quella dell'elettrone, il modulo del momento magnetico associato allo spin dei componenti del nucleo atomico risulta di tre ordini di grandezza circa inferiore rispetto a quello dell'elettrone e pertanto il loro contributo viene solitamente trascurato nel computo del momento magnetico complessivo dell'atomo.

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \vec{M} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) dv;$$

facendo uso dell'identità vettoriale:

$$\psi \vec{\nabla} \times \vec{T} = \vec{T} \times \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \times (\vec{T} \psi),$$

in cui a ψ corrisponde $1/r$ ed a \vec{T} corrisponde \vec{M} , l'espressione del potenziale vettore diventa:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r} \vec{\nabla} \times \vec{M} dv - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{M}}{r} \right) dv.$$

Il secondo integrale di questa somma può essere espresso in una forma differente adoperando l'identità²:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \times \vec{w} dv = - \int_{\mathcal{S}} \vec{w} \times d\vec{s} = - \int_{\mathcal{S}} \vec{w} \times \hat{n} ds,$$

dove \mathcal{S} rappresenta la superficie di contorno al volume \mathcal{V} , pertanto si ha:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}}{r} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\vec{M} \times \hat{n}}{r} ds. \quad (5.2)$$

Analogamente a quanto fatto nel caso dei dielettrici, dalle espressioni del potenziale vettore determinato da densità di correnti volumetriche e superficiali³, la relazione (5.2) mostra che l'effetto della magnetizzazione può essere ricondotto alla combinazione di una corrente distribuita sulla superficie esterna del materiale, con densità lineare $\vec{M} \times \hat{n}$, in cui \hat{n} è al solito il versore normale uscente dalla superficie del materiale, e una corrente interna al materiale, di densità $\vec{\nabla} \times \vec{M}$:

$$\vec{J}_{MS} \equiv \vec{M} \times \hat{n}, \quad (5.3)$$

$$\vec{J}_M \equiv \vec{\nabla} \times \vec{M}, \quad (5.4)$$

² Si veda l'Appendice B per la sua dimostrazione.

³ Rispettivamente:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J} dv}{r}$$

per una corrente che attraversa un volume \mathcal{V} e

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\vec{J}_s ds}{r}$$

per una corrente distribuita su una superficie \mathcal{S} .

in cui \vec{J}_{MS} si misura in A/m e \vec{J}_M in A/m^2 . Le correnti associate alle densità \vec{J}_{MS} e \vec{J}_M devono intendersi *legate* perché il corrispondente moto delle cariche è confinato all'interno degli atomi, a differenza delle correnti libere in cui le cariche possono spostarsi in modo relativamente libero internamente ai conduttori.

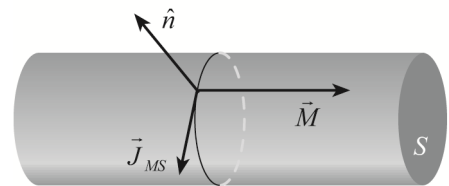
Le (5.3) e (5.4) stabiliscono nel caso più generale le relazioni tra il vettore magnetizzazione \vec{M} , introdotto per caratterizzare il momento magnetico acquisito dal mezzo materiale, e le correnti di magnetizzazione, che costituiscono l'aspetto macroscopico delle correnti atomiche. Questa descrizione risulta formalmente analoga a quella di un dielettrico polarizzato in cui l'effetto del mezzo si calcola a partire da una distribuzione superficiale di carica di polarizzazione σ_p e da una distribuzione di volume di densità ρ_p , legate al vettore polarizzazione \vec{P} dalle relazioni (2.24) e (2.25):

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \vec{P} \cdot \hat{n}, \\ \rho_p &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \end{aligned}$$

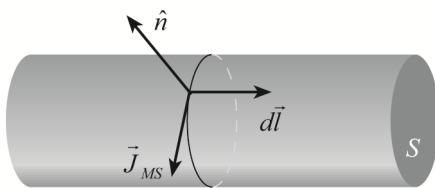
Pertanto, adoperando tali definizioni, la (5.2) si esprime come:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_M}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_{MS}}{r} dS. \tag{5.5}$$

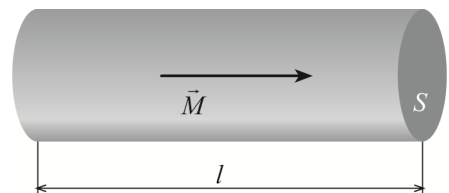
Esempio: In un cilindro uniformemente magnetizzato, ad esempio nella direzione del suo asse, dalla (5.4) segue che la densità di corrente di magnetizzazione \vec{J}_M è nulla, per cui la magnetizzazione è dovuta alla sola densità di corrente lineare \vec{J}_{MS} . Dalla (5.3) si deduce che tale vettore è tangente al cilindro e orientato rispetto al vettore magnetizzazione secondo la regola della mano destra (si veda la figura). Per ricavare l'intensità della corrente lineare di magnetizzazione I_{MS} occorre calcolare:



$$I_M = \int_{\mathcal{L}} \vec{J}_{MS} \cdot (d\vec{l} \times \hat{n}), \tag{5.6}$$



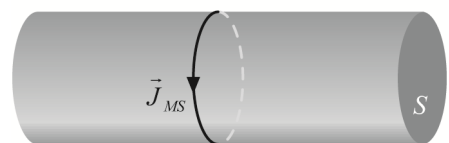
dove l'integrazione è estesa alla lunghezza \mathcal{L} sulla quale è distribuito il vettore \vec{J}_{MS} . Nel caso del cilindro descritto precedentemente, se il vettore $d\vec{l}$ è tangente alla sua superficie laterale e parallelo all'asse, la lunghezza attraversata dalla corrente di densità \vec{J}_{MS} è l ,

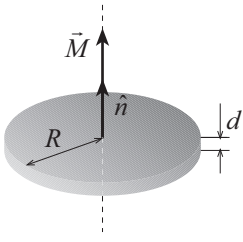


quindi, se \vec{J}_{MS} è uniforme lungo l si ha:

$$I_M = J_{MS} l.$$

Ciò in analogia alla densità di corrente introdotta nella relazione (3.3), detta *densità volumetrica di corrente* \vec{J}_V che, se distribuita uniformemente su una sezione S , determina una corrente di intensità pari al prodotto $J_V S$.





Esempio: Consideriamo un disco formato con un materiale omogeneo magnetizzato, di raggio R e spessore d . Supponendo che il vettore di magnetizzazione \vec{M} sia diretto parallelamente all'asse del disco, stabiliamo il vettore campo magnetico \vec{B} al centro del disco. Il disco uniformemente magnetizzato corrisponde ad un dipolo magnetico \vec{m} pari a:

$$\vec{m} = \vec{M}V,$$

dove V è il volume del disco pari a Sd , dove S è la superficie delle basi. Dal teorema di equivalenza di Ampere segue che tale configurazione è equivalente ad una spira percorsa da una corrente I_M che genera nel suo centro lo stesso campo magnetico \vec{B} . Per determinare questa corrente è possibile procedere in due maniere. Identifichiamo con \vec{m} il momento di dipolo della spira equivalente esprimendolo come:

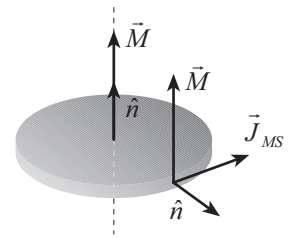
$$\vec{m} = I_M S \hat{n},$$

dove \hat{n} è il versore normale passante per l'asse del disco; uguagliando questa espressione con la relazione precedente, si trova:

$$\vec{M}V = I_M S \hat{n},$$

da cui segue:

$$I_M = \frac{MV}{S} = \frac{MSd}{S} = Md.$$

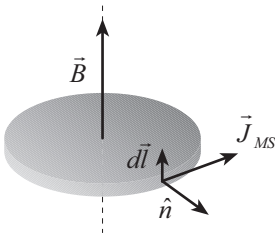


Alternativamente, dalla relazione (5.3) è possibile dedurre la densità lineare di corrente di magnetizzazione \vec{J}_{MS} ; tale vettore è diverso da zero solo in corrispondenza del bordo del disco ed ha intensità:

$$J_{MS} = M;$$

infine, dalla (5.6), integrando lungo lo spessore \mathcal{L} del bordo segue:

$$I_M = \int_{\mathcal{L}} \vec{J}_{MS} \cdot (d\vec{l} \times \hat{n}) = \int_{\mathcal{L}} J_{MS} dl = J_{MS}d = Md.$$



Nota I_M , è possibile ricavare \vec{B} attraverso l'espressione del campo magnetico al centro di una spira circolare percorsa da corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_M}{2R} \hat{n} = \frac{\mu_0 M d}{2R} \hat{n}.$$

5.2 Il vettore \vec{H}

A partire dalle densità di corrente \vec{J}_{MS} e \vec{J}_M , la relazione (5.5) permette di dedurre il potenziale vettore e il corrispondente campo magnetico prodotto dal materiale magnetizzato, come se le relative correnti fossero originate da circuiti posti nel vuoto. Cioè gli effetti prodotti dal materiale magnetizzato sono completamente descrivibili dalla relazione (5.5) attraverso le densità di corrente espresse dalle (5.3) e (5.4). Pertanto, noto il vettore \vec{M} , in principio si può calcolare il contributo al campo magnetico nello spazio dovuto al fenomeno della magnetizzazione; tuttavia \vec{M} non è agevolmente determinabile in maniera analitica per cui, tale approccio alla determinazione del campo magnetico in tutto lo spazio, non è generalmente perseguibile.

In presenza di materiale magnetizzato le sorgenti del campo magnetico non sono soltanto ascrivibili alle correnti libere, di densità \vec{J} , ma occorre considerare anche le correnti dovute al fenomeno della magnetizzazione, pertanto, in tale circostanza, la legge di Ampère si esprime come:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M);$$

dividendo ambo i membri per μ_0 e adoperando la relazione (5.4) si ottiene:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{M},$$

siccome μ_0 è una costante; da tale relazione segue infine:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}. \quad (5.7)$$

Il vettore tra le parentesi ha la proprietà di avere quali sorgenti le correnti libere (analogamente al vettore spostamento nel caso elettrico con le cariche libere). Definendo un campo vettoriale come:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad (5.8)$$

la relazione (5.7) diventa:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (5.9)$$

In questa maniera è possibile estendere la validità della legge di Ampère ai mezzi magnetizzabili; in particolare, qualora il vettore \vec{M} risulti nullo, come accade, ad esempio, nel vuoto, i vettori \vec{B} e \vec{H} differiscono per la sola costante μ_0 . Dalla (5.8) segue:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \quad (5.10)$$

Questa relazione fra i tre vettori \vec{B} , \vec{H} e \vec{M} presenta una analogia con la relazione (2.28) $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, che lega tra loro i vettori \vec{D} , \vec{E} e \vec{P} , tuttavia, mentre è concettualmente evidente la similitudine fenomenologica tra i vettori \vec{M} e \vec{P} , non è altrettanto manifesta l'analogia tra i vettori \vec{B} o \vec{H} e i vettori \vec{E} o \vec{D} . Infatti, sebbene si possa identificare una analogia tra \vec{D} e \vec{H} , questa è solo formale poiché, mentre nel caso dei dielettrici risulta quasi sempre impossibile scindere le cariche totali in cariche libere e cariche di polarizzazione, e quindi \vec{D} riveste un ruolo concettualmente importante ma trascurabile nella pratica, nel caso dei processi di magnetizzazione è generalmente semplice scindere le correnti totali in correnti libere e correnti di magnetizzazione, così il ruolo del campo \vec{H} è decisamente più importante di quanto non lo sia quello del campo \vec{D} nel caso elettrico. Dalla definizione del vettore \vec{H} segue che tale grandezza si esprime in A/m .

Integrando ambo i membri della (5.9) su una superficie aperta \mathcal{S} attraversata dal vettore \vec{J} si ottiene:

$$\int_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{s},$$

applicando il teorema del rotore all'integrale al primo membro, indicando con I la corrente $\int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{s}$, si ottiene:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad (5.11)$$

in cui \mathcal{C} è il contorno della superficie \mathcal{S} . La (5.11) rappresenta la forma integrale della relazione (5.9).

Nel caso dei materiali dielettrici la relazione di proporzionalità tra il campo elettrico applicato e la polarizzazione che ne consegue è stata rappresentata attraverso la (2.29) con l'introduzione di una quantità detta suscettività dielettrica. Per analogia la *suscettività magnetica* dovrebbe essere definita come il rapporto tra l'intensità del vettore di magnetizzazione ed il modulo del campo magnetico, vista l'affinità dei ruoli rivestiti da questi due vettori. Tuttavia, per ragioni di carattere storico, questa quantità si definisce attraverso la relazione seguente:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

così, dalla (5.10), il campo magnetico per una sostanza magnetizzata può essere scritto come:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H};$$

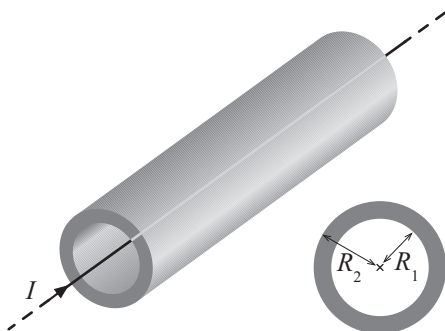
la quantità $1 + \chi_m$ prende il nome di *permeabilità magnetica relativa* del mezzo considerato, e si indica:

$$\mu_r \equiv 1 + \chi_m;$$

pertanto, sostituendo, si ha:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad (5.12)$$

dove μ prende il nome di *permeabilità magnetica (assoluta)* del mezzo. Occorre infine fare presente che tale trattazione non può essere applicata alle sostanze *ferromagnetiche*.



Esempio: Consideriamo un filo conduttore indefinito di raggio trascurabile percorso da una corrente stazionaria I , posto sull'asse di un tubo cilindrico, di materiale magnetizzabile, di raggi R_1 e R_2 . Stabiliamo l'andamento dei vettori \vec{H} , \vec{B} ed \vec{M} in tutto lo spazio. La simmetria del problema suggerisce che i campi dipendano dalla sola distanza r dall'asse. Consideriamo una circonferenza \mathcal{C} di raggio $r < R_1$ concentrica all'asse del tubo e disposta perpendicolarmente a tale asse. Applicando la relazione (5.11) a tale circonferenza, si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H = I,$$

cioè:

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} \tag{5.13}$$

Per $r < R_1$ si è nel vuoto, pertanto è possibile ricavare il campo magnetico dalla relazione (5.12) per $\mu_r = 1$, così:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{5.14}$$

Per $R_1 < r < R_2$, siccome la circuitazione del vettore \vec{H} dipende dalle sole correnti di conduzione, continua a valere l'espressione (5.13) e, analogamente per $r > R_2$. Dalla (5.12) segue che nel passaggio dalla regione interna al tubo, dove $r < R_1$ a quella in cui $R_1 < r < R_2$, il campo magnetico subisce una discontinuità, cioè:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \tag{5.15}$$

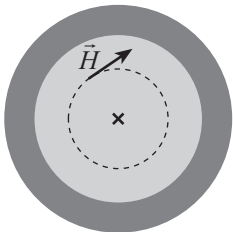
e infine, per $r > R_2$ continua a valere la (5.14). Il vettore magnetizzazione \vec{M} sarà diverso da zero solo per $R_1 < r < R_2$; dalla relazione (5.10), utilizzando la (5.13) e la (5.15), il suo modulo vale:

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} - \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} = \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Pertanto il vettore \vec{H} vale:

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} \quad r > 0;$$

il campo magnetico vale:

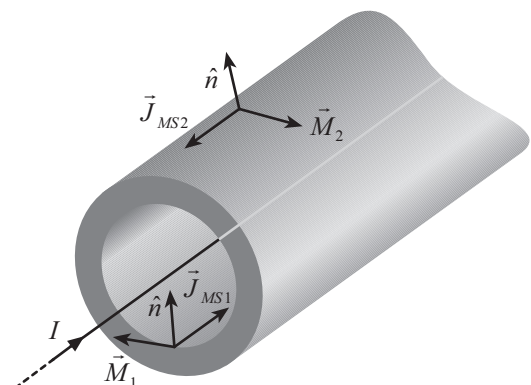
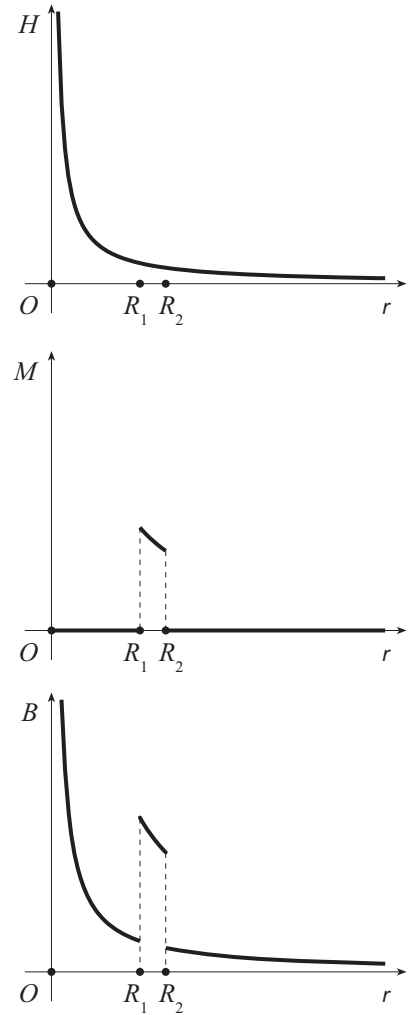


$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & 0 < r < R_1, \\ \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} & R_1 < r < R_2, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R_2; \end{cases}$$

e il vettore magnetizzazione vale:

$$M = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1, \\ \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{r} & R_1 < r < R_2, \\ 0 & r > R_2. \end{cases}$$

Vettorialmente, \vec{H} , \vec{B} ed \vec{M} sono tangenti alle circonferenze concentriche al filo col verso dipendente da quello della corrente I secondo la regola della mano destra; le densità lineari di corrente di magnetizzazione sulla superficie interna, \vec{J}_{MS1} , ed esterna, \vec{J}_{MS2} , del tubo sono date dalla relazione (5.3) e pertanto hanno i versi indicati

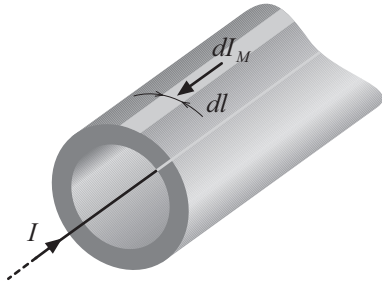


in figura e i moduli:

$$J_{MS1} = M_1 = \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_1},$$

$$J_{MS2} = M_2 = \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_2}.$$

Per stabilire le intensità delle correnti di magnetizzazione dividiamo la corrente che percorre le superfici del tubo in tante strisce, parallele all'asse e di spessore infinitesimo dl , ciascuna equiparabile ad un filo rettilineo percorso dalla corrente dI_M pari a $J_{MS} dl$, allora:



$$I_{M1} = \int_0^{2\pi R_1} J_{MS1} dl = J_{MS1} 2\pi R_1 = \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_1} 2\pi R_1 = (\mu_r - 1)I =$$

$$= \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_2} 2\pi R_2 = J_{MS2} 2\pi R_2 = \int_0^{2\pi R_2} J_{MS2} dl = I_{M2}.$$

Cioè alle diverse densità di corrente \vec{J}_{MS1} e \vec{J}_{MS2} corrispondono eguali correnti che scorrono parallelamente a I , I_{M1} in senso concorde e I_{M2} in senso discorde.

Esempio: (Campo magnetico di una bobina avvolta su un supporto magnetizzabile) Consideriamo un solenoide indefinito percorso da una corrente I e avvolto attorno ad un cilindro magnetizzabile, come nel precedente paragrafo. Per quanto visto, la circuitazione del vettore \vec{H} lungo il percorso \mathcal{C} di figura vale:

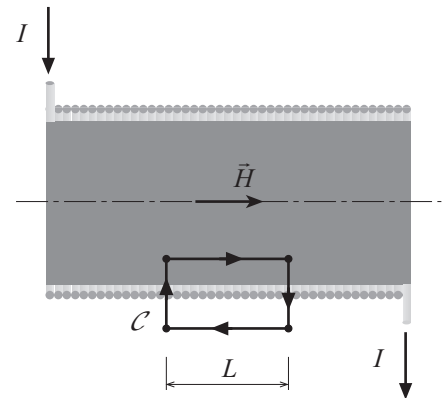
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = HL = nLI,$$

cioè:

$$H = nI.$$

Applicando la relazione (5.12) segue:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r nI.$$



5.3 Sorgenti del campo \vec{H}

La caratteristica del campo elettrostatico di presentare dei *poli*, nel senso che le sue linee di forza sono aperte, originando dalle cariche e terminando su queste, viene rappresentata matematicamente dalla legge di Gauss che, in forma differenziale si esprime come $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. L'assenza di poli magnetici è sintetizzata dalla relazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. D'altra parte, applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri dell'equazione (5.10), siccome la divergenza del vettore \vec{B} è nulla, si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}.$$

Consideriamo un magnete permanente, ossia tale da non richiedere delle correnti libere per sostenere la magnetizzazione; Supponiamo che il magnete abbia forma cilindrica e sia

uniformemente magnetizzato lungo il suo asse, al quale associamo un'ascissa x ; pertanto, il vettore \vec{M} sarà diretto lungo x e si avrà:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \frac{dM}{dx}.$$

Introducendo quindi una *densità di poli magnetici* ρ_m definita come:

$$\rho_m \equiv -\frac{dM}{dx},$$

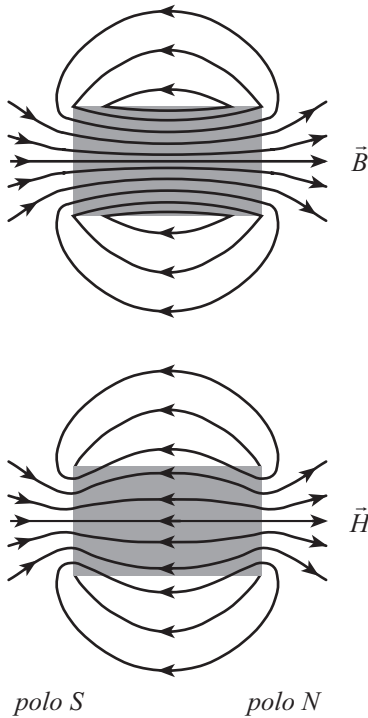
risulterà:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho_m.$$

Dall'analisi dell'andamento di ρ_m con x si evince che

il campo \vec{H} ammette dei poli situati in corrispondenza delle estremità del cilindro considerato e, in generale, dove risulta non nulla la divergenza di \vec{M} . Quindi, in assenza di correnti libere, $\vec{J} = \vec{0}$ e il vettore \vec{H} soddisfa le relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= \rho_m; \end{aligned}$$

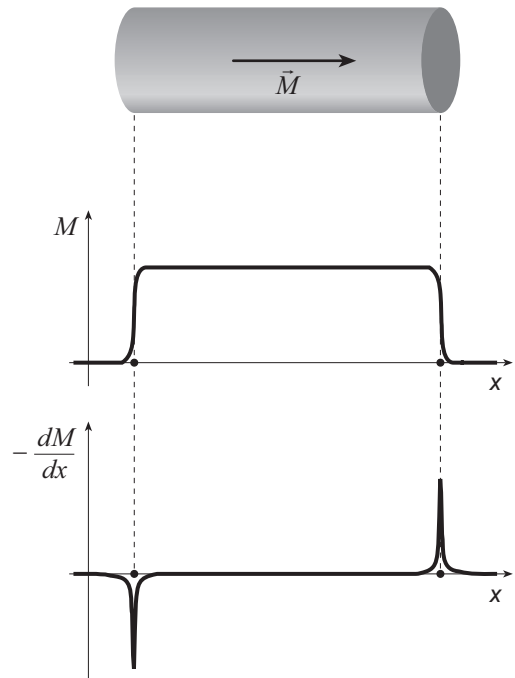


ciò mette in luce l'analogia col campo elettrostatico, che soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

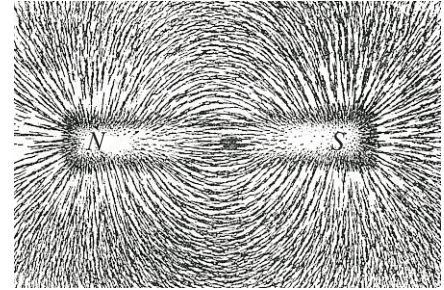
Cioè entrambi i campi sono conservativi e sono generati da poli che possono essere positivi (da essi si dipartono le linee di flusso) o negativi (in essi convergono tali linee). Questo concilia inoltre l'uso del termine *polo magnetico* con il fatto che il campo \vec{B} è a divergenza nulla: i poli magnetici a cui ci si riferisce alludendo alle estremità di un magnete permanente sono, in effetti, sorgenti del campo \vec{H} e non del campo \vec{B} .

L'analogia tra i due sistemi di equazioni consente di ricavare la configurazione di linee di forza di \vec{H} . Con riferimento alla figura, siccome \vec{M} presenta una discontinuità in corrispondenza delle interfacce rappresentate dalle estremità del cilindro magnetizzato, queste costituiranno un polo negativo, detto *polo sud*, (a sinistra



nella figura) e un polo positivo, detto *polo nord*, (a destra). Queste linee di flusso risultano simili a quelle del campo elettrico \vec{E} generate da due distribuzioni di carica di segno opposto separate da una certa distanza, cioè a quelle di un dipolo elettrico.

Il campo \vec{H} prodotto dalla magnetizzazione del materiale punta nel verso opposto a quello del vettore \vec{M} all'interno del materiale e per questo motivo il campo \vec{H} interno al magnete è detto *campo demagnetizzante*. All'esterno del materiale, \vec{M} è nullo ed i campi \vec{B} e \vec{H} sono legati tra loro da una relazione di proporzionalità diretta attraverso il coefficiente μ_0 , pertanto le linee di flusso di questi due campi, all'esterno del materiale, sono identiche. Così le differenze tra \vec{B} e \vec{H} si manifestano al solo interno del materiale, dove \vec{B} è proporzionale, sempre attraverso il coefficiente μ_0 , alla somma $\vec{H} + \vec{M}$.



Linee di forza generate da un magnete (adattato da *Practical Physics*, 1914)

5.4 Classificazione dei materiali magnetici



Dispositivo adoperato da Faraday per lo studio del diamagnetismo (Royal Institution, London)

Nel 1845 Faraday osservò che un pezzo di vetro posto in prossimità di una grossa elettrocalamita veniva debolmente respinto da questa; analoghi effetti repulsivi erano stati notati in precedenza, ma tali osservazioni erano rimaste isolate. Faraday trovò molteplici sostanze che godevano di questa caratteristica e le chiamò *diamagnetiche*. Le sostanze che invece risultano attratte dai poli magnetici furono denominate *paramagnetiche*. Alla fine di un lungo studio sperimentale, Faraday concluse che non esistono corpi neutri nei confronti del fenomeno magnetico, ma tutti i corpi sono o paramagnetici o diamagnetici. Le sostanze possono essere distinte attraverso i valori della corrispondente suscettività magnetica χ_m (o della permeabilità magnetica relativa μ_r , pari a $1 + \chi_m$), relativamente al valore nullo che assume nel vuoto. Vale la seguente classificazione:

<i>Sostanze diamagnetiche</i>	$\chi_m < 0$ ($ \chi_m \approx 10^{-5}$)	$\mu_r < 1$
<i>Sostanze paramagnetiche</i>	$\chi_m > 0$ ($\chi_m \approx 10^{-5}$)	$\mu_r > 1$
<i>Sostanze ferromagnetiche</i>	$\chi_m > 0$ ($\chi_m \approx 10^3 \div 10^5$)	$\mu_r \gg 1$

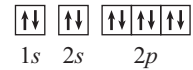
Siccome χ_m per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche è molto piccolo, il prodotto $\mu_0\mu_r$ per tali sostanze è praticamente uguale a μ_0 . Inoltre, come già anticipato, la relazione di semplice proporzionalità tra i vettori \vec{B} e \vec{H} indicata nella (5.12) non ha valore per i materiali ferromagnetici; per tali sostanze, infatti, il valore di μ_r dipende sia dallo stato precedente che dal trattamento subito dalla sostanza.

5.4.1 Sostanze diamagnetiche

Il diamagnetismo può essere considerato un fenomeno di tipo generale, nel senso che è comune a tutte le sostanze; i materiali paramagnetici e ferromagnetici sono tali per la presenza di altri effetti

più significativi che si sovrappongono al diamagnetismo, pure presente. Nel caso dei materiali propriamente diamagnetici, l'assenza di un momento di dipolo permanente da parte degli atomi costituenti esalta questo effetto. L'applicazione di un campo magnetico esterno ad una sostanza diamagnetica determina l'induzione nel materiale di un debole momento magnetico di verso opposto a quello del campo, tale momento si annulla alla rimozione del campo esterno.

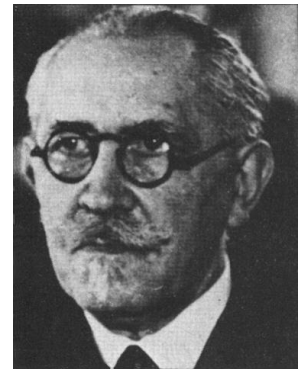
Esempio: L'atomo del neon ha 10 elettroni disposti secondo la configurazione $1s^2 2s^2 2p^6$; poiché tutte le coppie di elettroni per livello sono appaiate con momenti magnetici di spin contrapposti, l'atomo di questo elemento non presenta un momento di dipolo magnetico permanente, come mostrato dal diagramma orbitale di figura. Sono diamagnetici molti elementi, tra cui il rame, l'argento, il mercurio, l'oro, il bismuto e il carbonio negli stati di diamante o della grafite. Il bismuto e il diamante sono i materiali col diamagnetismo più intenso (rispettivamente con χ_m pari a -16.6×10^{-5} e -2.1×10^{-5}). I materiali superconduttori raffreddati al di sotto della temperatura critica, in presenza di un campo magnetico esterno, annullano il campo magnetico all'interno diventando dei materiali diamagnetici perfetti, con $\chi_m = -1$ o $\mu_r = 0$ (*effetto Meissner*). Questo fenomeno, scoperto nel 1933 da Walther Meissner e Robert Ochsenfeld, è dovuto alla generazione di correnti elettriche superficiali in questi materiali al di sotto della temperatura critica, tali da rendere nullo il campo magnetico totale all'interno del materiale.



La teoria per la descrizione del diamagnetismo fu proposta nel 1905 dal fisico francese Paul Langevin. L'azione di un campo magnetico sugli elettroni orbitanti attorno al nucleo atomico determina un moto di precessione antiorario del vettore momento angolare degli elettroni attorno alla direzione del campo magnetico (*precessione di Larmor*). Come il moto orbitale degli elettroni produce la corrente (5.1), al moto di precessione corrisponde una corrente che circola in senso antiorario attorno alla direzione del campo magnetico e che, dal teorema di equivalenza di Ampere genera, di conseguenza, un momento magnetico diretto in verso opposto rispetto al campo.

5.4.2 Sostanze paramagnetiche

Nel modello di Langevin il paramagnetismo è una proprietà dovuta alla presenza di atomi dotati di un momento di dipolo magnetico permanente, di origine orbitale o di spin. In assenza di un campo magnetico esterno i dipoli sono allineati casualmente, determinando una magnetizzazione netta nulla. La magnetizzazione in un materiale paramagnetico è una competizione tra l'effetto ordinante del campo magnetico esterno e l'effetto disordinante dell'agitazione termica; si trova infatti che se i momenti di dipolo magnetico non interagiscono tra loro, la suscettività del materiale segue la *legge di Curie*:



Paul Langevin

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T},$$

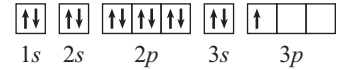
in cui ρ è la densità del materiale, T la temperatura assoluta e C un fattore di proporzionalità detto *costante di Curie*. Tale legge rappresenta un caso particolare della *legge di Weiss-Curie* che estende il modello anche al caso in cui i dipoli magnetici interagiscono tra loro:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_C}.$$

In tale espressione T_C può essere positiva, negativa o nulla; un valore positivo di T_C indica la temperatura di transizione (*temperatura di Curie*) al di sotto della quale il materiale presenta

proprietà ferromagnetiche, un valore negativo di T_c caratterizza i materiali che sono *antiferromagnetici* al di sotto di una certa temperatura di critica.

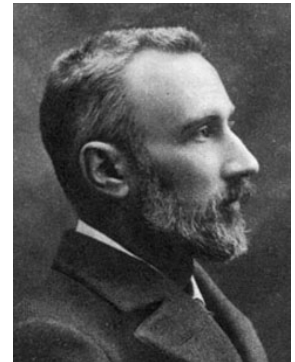
Esempio: L'atomo di alluminio ha 13 elettroni disposti secondo la configurazione $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$; lo spin dell'elettrone spaiato sul livello $3p$ determina un momento magnetico complessivo non nullo. Il piccolo valore della suscettività magnetica per questa classe di materiali relativamente a quella dei materiali ferromagnetici li porta ad essere considerati generalmente come materiali non magnetici. Esempi di materiali paramagnetici oltre all'alluminio sono il tungsteno, il cesio, il litio, e il sodio.



5.4.3 Sostanze ferromagnetiche

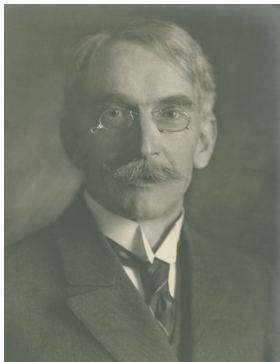
Mentre nei materiali paramagnetici la magnetizzazione dipende dalla presenza di un campo magnetico esterno per cui, all'annullarsi del campo tale magnetizzazione viene meno, nei materiali ferromagnetici è possibile osservare una magnetizzazione anche in assenza di un campo magnetico esterno (*magnetizzazione spontanea*). In tali materiali, a dispetto dell'agitazione termica, è presente un agente ordinante dovuto alla forte interazione fra dipoli elementari vicini che determina l'orientazione dei corrispondenti momenti tutti nella medesima direzione.

Sebbene a basse temperature la magnetizzazione spontanea risulti sostanzialmente indipendente dalla temperatura, all'aumentare della temperatura la magnetizzazione diminuisce per effetto dell'azione disordinante dell'agitazione termica sui dipoli magnetici elementari. Il fenomeno secondo cui una calamita perde le proprietà magnetiche sopra una certa temperatura fu riportato da Gilbert nel *De Magnete* e studiato successivamente da molti fisici, compreso Faraday, fino a Pierre Curie che, nel 1895 ne formulò la descrizione. La magnetizzazione spontanea si annulla in corrispondenza della temperatura di Curie T_c , ciò comporta che per ottenere una magnetizzazione nel materiale considerato per temperature superiori a T_c occorre applicare un campo magnetico esterno.



Pierre Curie

Una teoria dei materiali ferromagnetici fu proposta nel 1906 dal fisico francese Pierre Weiss. È possibile verificare sperimentalmente che la direzione del vettore magnetizzazione in un materiale ferromagnetico non è arbitraria, ma dipende dalla direzione degli assi cristallografici. Consideriamo idealmente un parallelepipedo di materiale ferromagnetico tagliato in maniera tale che un'asse risulti coincidente con una direzione preferenziale di magnetizzazione. A causa della magnetizzazione spontanea la regione di spazio situata in prossimità del solido sarà sede di un campo magnetico. È possibile provare che dal punto di vista energetico tale configurazione non è la più favorevole. L'energia associata al campo magnetico \vec{B} in tutto lo spazio è data dall'integrale⁴:



Pierre Weiss

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv,$$

dove il vettore \vec{H} è legato al campo magnetico dalla relazione (5.12) che, per semplicità, assumiamo valida anche per questi materiali con $\mu_r \gg 1$; nell'espressione precedente V indica il volume entro cui il prodotto $\vec{H} \cdot \vec{B}$ è diverso da zero. Nel caso in questione tale integrale può essere diviso in due

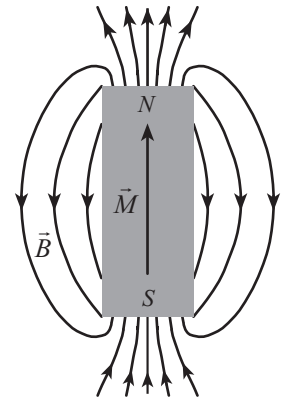
⁴ Questa relazione verrà ricavata nel par. 6.6

termini, uno calcolato nel volume del materiale e l'altro nello spazio restante:

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{esterno}} B^2 dv + \frac{1}{2\mu_0\mu_r} \int_{\text{materiale}} B^2 dv$$

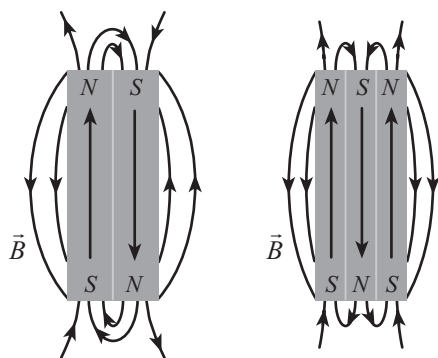
dove, essendo $\mu_r \gg 1$ il secondo addendo è trascurabile rispetto al primo, così:

$$U_m \approx \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{esterno}} B^2 dv.$$



Questa energia sarà tanto maggiore quanto più è esteso il volume entro il quale il campo magnetico assume valori diversi da zero. Configurando il volume in due regioni separate con magnetizzazioni contrapposte, dette *domini*, è possibile ridurre il valore dell'energia poiché in questa maniera diminuisce il volume entro cui è significativo il campo magnetico, in quanto le linee di forza si chiuderanno strettamente dal polo nord di un dominio a quello sud dell'altro. Siccome a tale configurazione compete un'energia magnetica inferiore a quella della configurazione precedente, ne segue che tale configurazione risulta favorita. Naturalmente è possibile estendere questo procedimento a maggiori frammentazioni dei domini per conseguire stati energeticamente sempre più favorevoli. Questo comportamento suggerisce che un materiale ferromagnetico ha la tendenza, per motivi energetici, ad organizzarsi in regioni in ciascuna delle quali la magnetizzazione è omogenea, ma differente da quella presente nelle regioni circostanti. Si prova inoltre che tale divisione non procede sino al completo disallineamento di tutti i dipoli magnetici elementari che costituiscono il materiale, poiché all'aumentare del numero di domini aumentano altre forme di energia interna sino a rendere sfavorevole l'ulteriore frammentazione dei domini; si raggiunge così una condizione di equilibrio corrispondente ad un numero di domini magnetici inferiore al numero dei dipoli elementari.

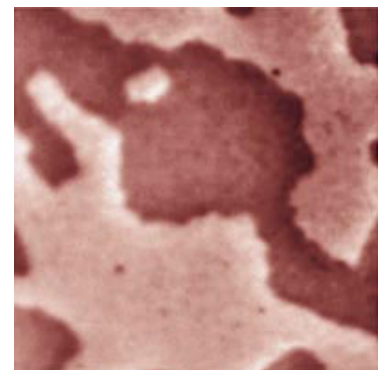
In assenza di un campo magnetico esterno il materiale non manifesta, in generale, proprietà



magnetiche perché, sebbene in un dominio sia presente una certa magnetizzazione spontanea, l'effetto è globalmente annullato dalle diverse magnetizzazioni dei domini contigui. L'effetto di un campo magnetico esterno corrisponde quindi all'alterazione della struttura a domini in misura tale da determinare l'orientazione dei vettori magnetizzazione locale nella direzione del campo esterno. Cioè, a seguito dell'applicazione del campo esterno aumenterà il numero di regioni in cui la magnetizzazione è orientata nella

direzione del campo, a scapito di quelle in cui è orientata diversamente. In pratica tale effetto sarà determinato o da uno spostamento delle pareti (*pareti di Bloch*) che delimitano i domini con magnetizzazione concorde al campo verso i domini di differente magnetizzazione, oppure da una specifica orientazione dei dipoli elementari costituenti i domini, nella direzione del campo esterno. L'esistenza dei domini magnetici fu confermata sperimentalmente nel 1931 da Francis Bitter attraverso osservazioni al microscopio.

Nel 1932 Louis-Eugène Néel mostrò che in alcune sostanze, per temperature inferiori ad una certa temperatura critica (*temperatura di Néel*), metà dei momenti magnetici è orientata in una certa direzione



Domini magnetici in un film di nickel spesso 8 nm. La direzione del vettore magnetizzazione è orientata perpendicolarmente al piano del foglio, il verso è entrante nelle regioni più scure e uscente in quelle più chiare. (R. Hoffmann et al., Univ. di Basel, Svizzera)

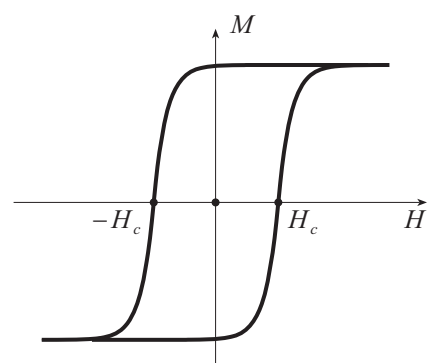
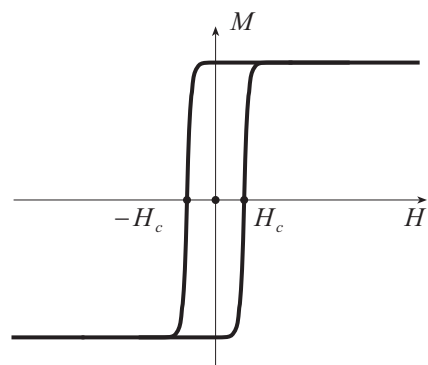
e l'altra metà è allineata nella direzione opposta, per cui la magnetizzazione risultante è nulla. Tali sostanze sono dette antiferromagnetiche.

5.5 Isteresi magnetica

Consideriamo un materiale ferromagnetico a temperature inferiori a quella di Curie e supponiamo che gli effetti dei domini magnetici siano mutuamente compensati, in modo che la magnetizzazione netta del materiale risulti nulla. Supponiamo inoltre che il materiale non sia mai stato in precedenza sottoposto ad un campo magnetico

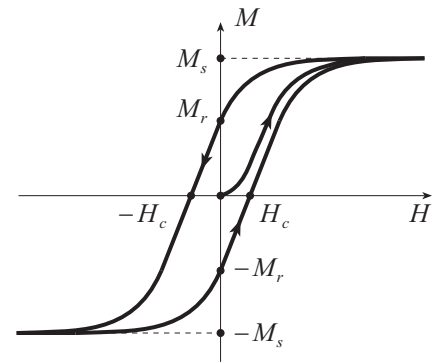
All'applicazione di un campo \vec{H} , col crescere del modulo di questo, l'intensità del vettore magnetizzazione \vec{M} nel materiale aumenterà con un andamento detto *curva di prima magnetizzazione*, sino a raggiungere un valore di saturazione M_s

corrispondente alla situazione in cui tutti i domini sono orientati nella direzione del campo esterno. Al ridursi del modulo di \vec{H} , l'intensità della magnetizzazione non diminuisce passando attraverso i valori assunti precedentemente ma, a causa della non linearità del fenomeno della magnetizzazione, segue un altro andamento. Quando il campo esterno si annulla, la magnetizzazione mantiene un valore non nullo M_r , detto *magnetizzazione residua*. Per annullare questa magnetizzazione si rende necessario, quindi, invertire il verso del campo applicato, sino a raggiungere un valore $-H_c$, detto *campo coercitivo*. Aumentando ulteriormente l'intensità del campo, sempre in tale direzione, si raggiunge una nuova condizione di saturazione corrispondente, in questo caso, allo stato in cui tutti i domini sono orientati nella nuova direzione del campo \vec{H} . Diminuendo l'intensità del campo sino ad annullarla, la magnetizzazione mantiene un valore non nullo $-M_r$. Per annullare tale magnetizzazione occorre nuovamente invertire la direzione del campo e portarlo ad un valore pari a H_c .



Infine, aumentando ulteriormente il campo \vec{H} si riottiene la condizione di saturazione corrispondente alla magnetizzazione M_s . Da questo punto in poi, riducendo il campo e poi aumentandolo nuovamente si ripercorre la stessa curva che prende il nome di *curva di isteresi*.

Attraverso la conoscenza dei valori dell'intensità della magnetizzazione residua M_r e del campo coercitivo H_c è possibile classificare i materiali dal punto di vista della risposta all'applicazione di un campo magnetico esterno. Un materiale ferromagnetico con un basso valore di H_c e con M_r prossimo al valore di saturazione M_s è caratterizzato dal richiedere campi poco intensi per raggiungere la saturazione. Siccome la suscettività magnetica del materiale è definita come il rapporto M/H , in prossimità dei tratti del ciclo in cui la pendenza è elevata, risulta alta, di conseguenza, anche la suscettività e quindi è grande anche la permeabilità del materiale. I materiali di questo tipo sono detti *dolci* nel senso che sono in grado di variare rapidamente il loro stato magnetico in corrispondenza di piccole variazioni del campo applicato. Un



materiale ferromagnetico in cui H_c è elevato, sebbene M_r sia prossimo a M_s è detto *duro*, perché presenta un'estrema difficoltà ad essere magnetizzato, nel senso che, se per effetto di un campo esterno viene portato alla condizione di saturazione, occorre fornire un campo intenso per determinarne la smagnetizzazione.

Esempio: In un sistema di memorizzazione su supporto magnetico è presente una testina magnetica realizzata in ferro dolce, per essere in grado di seguire rapidamente le variazioni della corrente applicata alla bobina eccitatrice, ed un supporto per l'immagazzinamento dei dati in ferro duro, in maniera da impedire la perdita di informazioni per smagnetizzazione.

5.6 Condizioni di raccordo all'interfaccia tra due materiali magnetici

Le condizioni di raccordo per i campi \vec{B} e \vec{H} nel passaggio da un mezzo materiale ad un altro possono essere dedotte in maniera analoga a quanto fatto per i vettori \vec{D} e \vec{E} nel caso dei materiali dielettrici. In particolare, considerando un cilindro infinitesimo che interseca l'interfaccia tra i due mezzi materiali, siccome il flusso del vettore \vec{B} attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo, si ottiene:

$$B_{n1} = B_{n2}; \quad (5.16)$$

inoltre, dalla (5.12) segue:

$$\mu_{r1} H_{n1} = \mu_{r2} H_{n2}.$$

Considerando un percorso infinitesimo chiuso situato a cavallo dell'interfaccia considerata e che non concatena alcuna corrente macroscopica, poiché in tal caso dalla (5.11) segue che la circuitazione del vettore \vec{H} è nulla, si ottiene:

$$H_{t1} = H_{t2},$$

e, dalla (5.12):

$$\frac{B_{t1}}{\mu_{r1}} = \frac{B_{t2}}{\mu_{r2}}. \quad (5.17)$$

Pertanto, le relazioni di raccordo all'interfaccia tra due mezzi materiali diversi sono, per il campo magnetico:

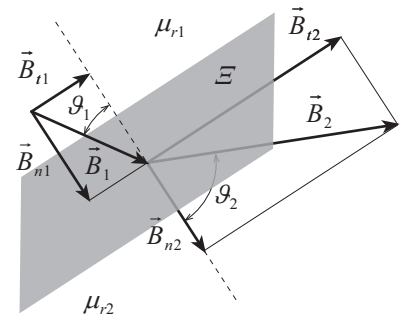
$$\begin{cases} B_{n1} = B_{n2} \\ \frac{B_{t1}}{\mu_{r1}} = \frac{B_{t2}}{\mu_{r2}} \end{cases},$$

e per il vettore \vec{H} :

$$\begin{cases} \mu_{r1} H_{n1} = \mu_{r2} H_{n2} \\ H_{t1} = H_{t2} \end{cases}$$

Esempio: Dalle condizioni di raccordo si evince che le linee di forza del campo magnetico tendono ad addensarsi all'interno di un materiale ferromagnetico. Sia \mathcal{E} la superficie di separazione tra due mezzi materiali di permeabilità magnetica relativa, rispettivamente μ_{r1} e μ_{r2} . Con riferimento alla figura, risulta:

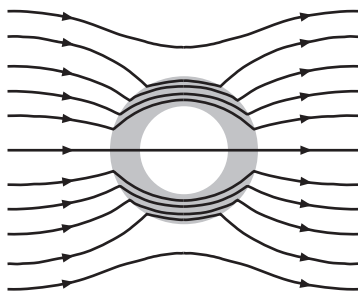
$$\begin{aligned} \tan \vartheta_1 &= \frac{B_{t1}}{B_{n1}}, \\ \tan \vartheta_2 &= \frac{B_{t2}}{B_{n2}}, \end{aligned}$$



per cui, dividendo membro a membro, dalla (5.16) e dalla (5.17), si ottiene:

$$\frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta_2} = \frac{B_{t1} B_{n2}}{B_{n1} B_{t2}} = \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}},$$

espressione nota come *legge della rifrazione delle linee di forza del campo magnetico* nel passaggio da un mezzo materiale ad un altro. Se $\mu_{r2} \gg \mu_{r1}$, come accade all'interfaccia tra il vuoto, in cui μ_{r1} vale 1, e un materiale ferromagnetico, in cui μ_{r2} è dell'ordine di $10^2 \div 10^4$, risulta $\vartheta_2 \gg \vartheta_1$, cioè il vettore \vec{B}_2 è praticamente parallelo alla



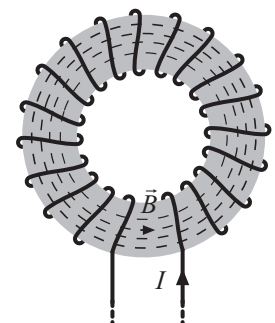
superficie \mathcal{E} . Questa proprietà è alla base del funzionamento degli *schermi magnetici*. Consideriamo un tubo di materiale ferromagnetico situato in una regione in cui è presente un campo magnetico; per quanto visto le linee di forza tendono ad addensarsi nel materiale dove il campo assume un valore elevato mentre sono quasi assenti all'interno. L'azione dello schermo è imperfetta poiché se il campo magnetico incide perpendicolarmente alla superficie del tubo e ϑ_1 vale 0, dalla relazione precedente si ha che anche ϑ_2 vale 0 e, pertanto, le corrispondenti linee di forza del campo magnetico penetrano all'interno. Tale dispositivo viene comunemente adoperato in tutte le circostanze in cui si rende necessario annullare il campo magnetico all'interno di una regione.

5.7 Circuiti magnetici

L'esempio precedente mostra come, adoperando un materiale ferromagnetico, è possibile confinare in maniera soddisfacente le linee di forza del campo magnetico in una ristretta regione dello spazio. Tale proprietà dei materiali ferromagnetici costituisce la base per la costruzione dei *circuiti magnetici*. Consideriamo N spire di filo conduttore uniformemente avvolte su un supporto ferromagnetico toroidale di sezione S e percorse da una corrente I ; trascurando le linee di forza di \vec{B} che escono dal supporto⁵, il flusso del campo magnetico assume lo stesso valore in corrispondenza di ciascuna sezione del supporto. Supponendo inoltre che il vettore \vec{B} sia uniforme su tutti i punti della sezione e diretto perpendicolarmente ad essa, assumendo valida per questo materiale la relazione (5.12), risulta:

$$\phi(\vec{B}) = BS = \mu_0 \mu_r SH.$$

(5.18)



⁵ Tali linee di forza costituiscono il *flusso disperso* del campo magnetico.

Inoltre, dalla (5.11), valutando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo la linea mediana \mathcal{C} del supporto (di lunghezza l), si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl = NI. \tag{5.19}$$

Confrontando le relazioni (5.18) e (5.19) segue:



John Hopkinson

$$NI = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S} \phi(\vec{B}); \tag{5.20}$$

questa espressione, formulata da John Hopkinson nella seconda metà del diciannovesimo secolo, mette in luce una relazione di proporzionalità tra la corrente complessiva NI che attraversa le spire del solenoide ed il flusso del campo magnetico $\phi(\vec{B})$. Tale relazione risulta formalmente analoga alla legge di Ohm applicata ad un circuito elettrico chiuso in cui un generatore di forza elettromotrice determina il flusso di una corrente attraverso una resistenza. Indicando con:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}$$

e definendo inoltre:

$$\mathcal{F} \equiv NI,$$

la legge di Hopkinson (5.20) si esprime come:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \phi(\vec{B}). \tag{5.21}$$

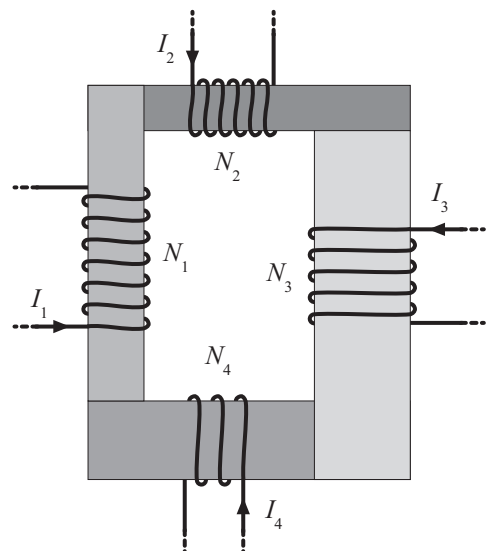
Le quantità \mathcal{F} ed \mathcal{R} , rispettivamente analoghe alla forza elettromotrice ed alla resistenza, prendono i nomi di *forza magnetomotrice* e *riluttanza*. La forza magnetomotrice si misura in *amperspire (Asp)* e, poiché il flusso del campo magnetico si esprime in *Wb*, la riluttanza si misura in *Asp/Wb*.

Esempio: Consideriamo il dispositivo di figura in cui i vari tronchi del circuito magnetico, posti a contatto tra loro come mostrato, sono caratterizzati da diversi valori della sezione e della permeabilità magnetica relativa; assumendo che sia trascurabile il flusso disperso, il flusso del campo magnetico attraverso le sezioni di ciascun tronco vale:

$$\phi(\vec{B}) = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = B_4 S_4;$$

inoltre, calcolando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo la linea mediana del circuito si ha:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + N_4 I_4,$$



dove l_1, l_2, l_3 e l_4 rappresentano le lunghezze di ogni tronco del circuito e N_1I_1, N_2I_2, N_3I_3 e N_4I_4 le forze magnetomotrici associate a ciascuna bobina. Indicando con:

$$\mathcal{F} = N_1I_1 + N_2I_2 + N_3I_3 + N_4I_4$$

la forza magnetomotrice totale agente sul circuito magnetico, dalla relazione (5.12) segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= N_1I_1 + N_2I_2 + N_3I_3 + N_4I_4 = H_1l_1 + H_2l_2 + H_3l_3 + H_4l_4 = \frac{B_1}{\mu_0\mu_{r1}}l_1 + \frac{B_2}{\mu_0\mu_{r2}}l_2 + \frac{B_3}{\mu_0\mu_{r3}}l_3 + \frac{B_4}{\mu_0\mu_{r4}}l_4 = \\ &= \frac{l_1}{\mu_0\mu_{r1}S_1}B_1S_1 + \frac{l_2}{\mu_0\mu_{r2}S_2}B_2S_2 + \frac{l_3}{\mu_0\mu_{r3}S_3}B_3S_3 + \frac{l_4}{\mu_0\mu_{r4}S_4}B_4S_4 = \\ &= \left(\frac{l_1}{\mu_0\mu_{r1}S_1} + \frac{l_2}{\mu_0\mu_{r2}S_2} + \frac{l_3}{\mu_0\mu_{r3}S_3} + \frac{l_4}{\mu_0\mu_{r4}S_4} \right) \phi(\vec{B}), \end{aligned}$$

pertanto, indicando con

$$\mathcal{R} \equiv \frac{l_1}{\mu_0\mu_{r1}S_1} + \frac{l_2}{\mu_0\mu_{r2}S_2} + \frac{l_3}{\mu_0\mu_{r3}S_3} + \frac{l_4}{\mu_0\mu_{r4}S_4} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4 \quad (5.22)$$

la somma delle riluttanze di ciascun tronco del circuito, risulta:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\phi(\vec{B}).$$

L'espressione (5.22) è analoga a quella relativa alla serie di resistenze; pertanto, i tronchi del circuito magnetico considerato e, di conseguenza, le corrispondenti riluttanze, sono detti in serie.

La relazione (5.21) può essere generalizzata in una espressione analoga alla legge di Kirchhoff per le tensioni:

$$\sum_m \mathcal{F}_m = \sum_l \sum_n \mathcal{R}_n \phi_l(\vec{B})$$

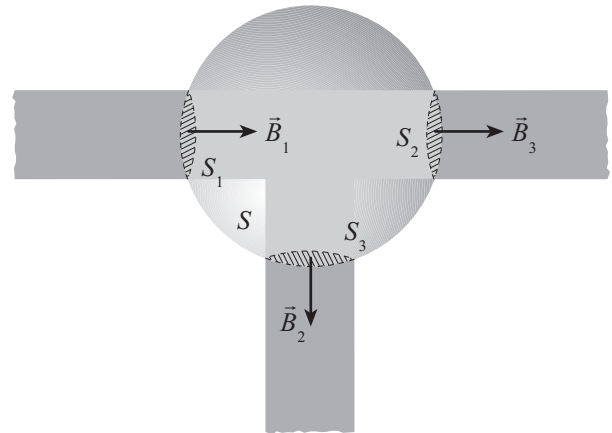
la quale afferma che la somma delle forze magnetomotrici in un circuito magnetico chiuso $\sum_m \mathcal{F}_m$ è uguale alla somma delle “cadute di tensione magnetica” $\mathcal{R}_n \phi_l(\vec{B})$ dei vari tronchi che costituiscono il circuito.

Consideriamo una porzione di circuito magnetico in cui confluiscono più tronchi, in analogia al caso dei circuiti elettrici a tale porzione in cui si uniscono le linee di flusso provenienti dai diversi tronchi diamo il nome di nodo. Valutando il flusso del campo magnetico attraverso una superficie S chiusa che contiene tale nodo, ed assumendo che sia trascurabile il flusso disperso, dalla (4.26) risulta:

$$0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -B_1S_1 + B_2S_2 + B_3S_3,$$

ovvero:

$$\phi_1(\vec{B}_1) - \phi_2(\vec{B}_2) - \phi_3(\vec{B}_3) = 0.$$



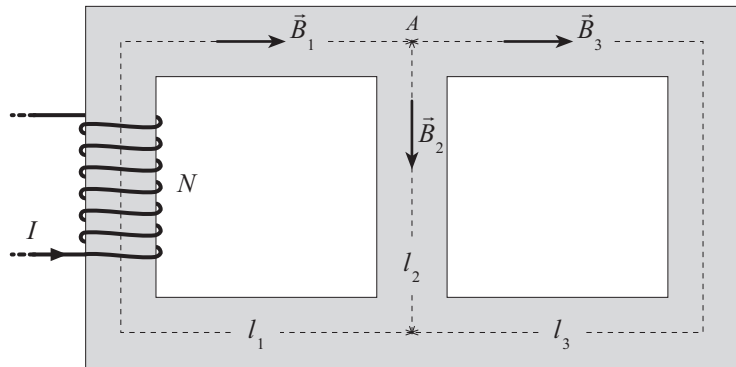
Questa relazione può essere facilmente generalizzata al caso di n tronchi attraverso la relazione:

$$\sum_{k=1}^n \phi_k (\vec{B}_k) = 0, \quad (5.23)$$

dove la somma è calcolata sul numero di tronchi che confluiscono nel nodo. Tale espressione rappresenta l'analogo della legge di Kirchhoff per le correnti relativa ai circuiti magnetici. Pertanto, in generale, per lo studio dei circuiti magnetici complessi è possibile ricorrere ai metodi risolutivi propri delle reti elettriche, facendo uso della formale analogia esistente tra circuiti elettrici e circuiti magnetici.

Esempio: Consideriamo il circuito magnetico di figura costituito da materiale ferromagnetico omogeneo di sezione S costante dove l'avvolgimento di N spire è percorso dalla corrente I . Applicando la relazione (4.26) ad una superficie chiusa contenente il nodo A , trascurando il flusso disperso risulta:

$$0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -B_1 S + B_2 S + B_3 S,$$



ovvero, posto:

$$\begin{cases} \phi_1 \equiv B_1 S, \\ \phi_2 \equiv B_2 S, \\ \phi_3 \equiv B_3 S, \end{cases} \quad (5.24)$$

si ha:

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3. \quad (5.25)$$

Calcolando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo le due maglie \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 che costituiscono il circuito, assumendo arbitrariamente il verso di circolazione orario per entrambe, dalla (5.11) si ha:

$$\begin{cases} \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI, \\ \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_3 l_3 - H_2 l_2 = 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

dove l_1 , l_2 e l_3 rappresentano la lunghezza di ciascun tronco che costituisce il circuito. Assumendo la validità della relazione (5.12), dalle (5.24) si ha:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi_1}{\mu_0 \mu_r S}, \\ H_2 &= \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi_2}{\mu_0 \mu_r S}, \\ H_3 &= \frac{B_3}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi_3}{\mu_0 \mu_r S}, \end{aligned}$$

e, sostituendo nelle (5.26) si ottiene:

$$\frac{\phi_1}{\mu_0 \mu_r S} l_1 + \frac{\phi_2}{\mu_0 \mu_r S} l_2 = NI, \quad (5.27)$$

$$-\frac{\phi_3}{\mu_0 \mu_r S} l_3 + \frac{\phi_2}{\mu_0 \mu_r S} l_2 = 0. \quad (5.28)$$

Risolvendo il sistema lineare tra le equazioni (5.25), (5.27) e (5.28) è possibile determinare il flusso del campo magnetico attraverso un qualsiasi tronco del circuito magnetico e, dalle relazioni (5.24) si ricavare le intensità dei campi magnetici nei tronchi. In particolare, ad esempio:

$$\phi_1 \left(\frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{\frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S} \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}}{\frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}} \right) = NI, \quad (5.29)$$

da cui segue:

$$B_1 = \frac{NI}{S} \frac{1}{\frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{\frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S} \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}}{\frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}}}. \quad (5.30)$$

Adoperando l'analogia tra circuiti magnetici e circuiti elettrici è possibile ritrovare agevolmente lo stesso risultato; associando ad ogni tronco del circuito magnetico la corrispondente riluttanza:

$$\mathcal{R}_1 \equiv \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S},$$

$$\mathcal{R}_2 \equiv \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S},$$

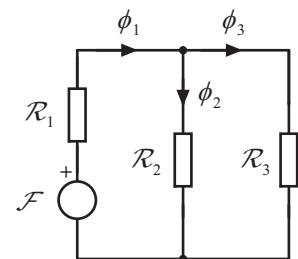
$$\mathcal{R}_3 \equiv \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S},$$

e indicando con \mathcal{F} la forza magnetomotrice NI , il circuito magnetico può essere schematizzato così come rappresentato nella figura. Da tale schema segue che il flusso ϕ_1 soddisfa la relazione:

$$\phi_1 \left(\mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} \right) = \mathcal{F}$$

che coincide con la (5.29).

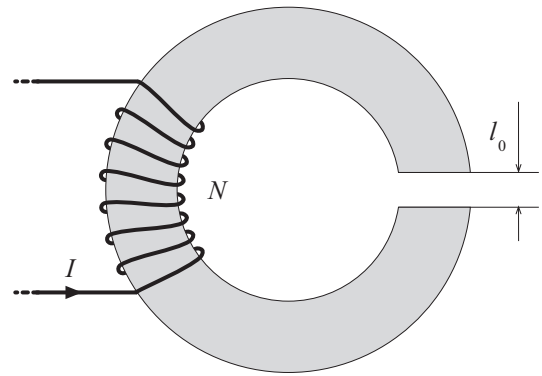
La legge di Hopkinson può continuare ad essere adoperata anche qualora nel circuito magnetico venga asportata una porzione di un tronco di lunghezza molto minore della sezione del tronco stesso, creando in aria un *traferro*. Dalla condizione di raccordo (5.16), segue che la componente normale del campo magnetico si mantiene continua in corrispondenza di qualsiasi interfaccia, pertanto, in prima approssimazione è possibile trascurare il flusso disperso e rappresentare il traferro attraverso la sua corrispondente riluttanza. Con la realizzazione di traferri è possibile quindi rendere accessibile un campo magnetico all'esterno del circuito; i circuiti magnetici dotati di traferro trovano applicazione della realizzazione di elettromagneti; invece, i circuiti magnetici chiusi si adoperano, ad esempio, nei trasformatori.



Esempio: Consideriamo un supporto ferromagnetico omogeneo toroidale di sezione S sul quale è realizzato un avvolgimento di N spire conduttrici percorse da una corrente I . Il circuito, di lunghezza complessiva l presenta un traferro in aria di lunghezza l_0 . Le riluttanze del circuito e del traferro valgono, rispettivamente:

$$\mathcal{R} = \frac{l-l_0}{\mu_0\mu_r S},$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{l_0}{\mu_0 S},$$



dove μ_r rappresenta la permeabilità magnetica relativa del materiale; poiché il traferro è in aria nel calcolo della corrispondente riluttanza \mathcal{R}_0 si è assunto $\mu_r = 1$. Il circuito considerato può essere schematizzato come mostrato in figura, così, applicando la legge di Hopkinson e considerando che le riluttanze \mathcal{R} e \mathcal{R}_0 sono disposte in serie, si ha:

$$\mathcal{F} = (\mathcal{R} + \mathcal{R}_0)\phi,$$

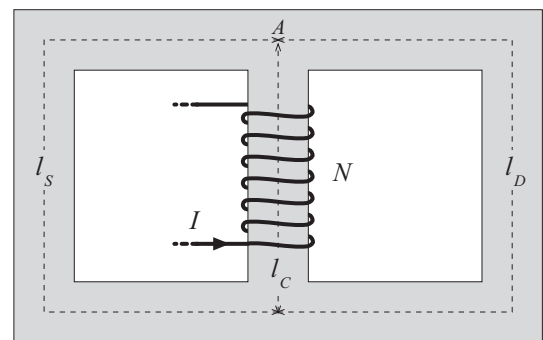
dove la forza magnetomotrice \mathcal{F} vale NI . Sostituendo alle riluttanze le corrispondenti espressioni è possibile, ad esempio, determinare il valore del campo magnetico nel traferro. Risulta infatti:

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R} + \mathcal{R}_0} = \frac{NI}{\frac{l-l_0}{\mu_0\mu_r S} + \frac{l_0}{\mu_0 S}},$$

così, dalla (5.18) segue:

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{NI}{\frac{l-l_0}{\mu_0\mu_r} + \frac{l_0}{\mu_0}}.$$

Esempio: Il circuito magnetico mostrato in figura è realizzato da due bracci uguali di materiale ferromagnetico, di lunghezza media $l_s = l_D$ pari a 102 cm e da una parte centrale di lunghezza l_C di 36 cm , sulla quale sono avvolte 100 spire conduttrici. La sezione di ogni parte del circuito è uniforme. Nota la curva di magnetizzazione ⁶ del materiale che costituisce il circuito, stabiliamo l'intensità della corrente I che deve percorrere l'avvolgimento affinché il campo magnetico attraverso i due bracci sia pari a 1.0 T . In corrispondenza del punto A il flusso del campo magnetico attraverso il tronco centrale del circuito si riparte equamente fra i due bracci, poiché questi sono identici; pertanto, l'intensità del campo in tali tronchi, $B_s = B_D$, deve essere metà di quella nel tronco centrale B_C :



$$B_D = 2B_C = 1.0\text{ T}.$$

Dalla curva di magnetizzazione si deduce che a queste intensità del campo magnetico corrispondono le intensità del vettore \vec{H} :

⁶ Si osservi che la curva di magnetizzazione per un materiale ferromagnetico può essere indifferentemente rappresentata sia attraverso la relazione funzionale tra \vec{M} e \vec{H} , come mostrato nel par. 5.5, che tra \vec{B} e \vec{H} , come in questo esempio. Le due rappresentazioni sono collegate tra loro dalla relazione (5.10).

$$H_D \approx 414 \text{ Asp/m};$$

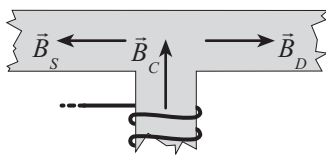
$$H_C \approx 196 \text{ Asp/m}.$$

Calcolando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo una delle due maglie che costituiscono il circuito si ha:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_D l_D + H_C l_C = NI,$$

da cui segue:

$$I = \frac{H_D l_D + H_C l_C}{N} \approx 4.9 \text{ A}.$$



Esempio: Se nel circuito magnetico dell'esempio precedente viene praticato un taglio di 1mm in corrispondenza del braccio di destra, valutiamo la corrente necessaria affinché il campo magnetico attraverso tale traferro abbia un'intensità pari a 0.4 T. Quando viene praticato il taglio, nel punto A il flusso del campo magnetico cessa di dividersi equamente tra i due bracci laterali, siccome per effetto del taglio presentano una riluttanza differente; dalla relazione (5.23) segue:

$$\phi_C = \phi_D + \phi_S,$$

dove ϕ_C , ϕ_D e ϕ_S rappresentano, rispettivamente, il flusso del campo magnetico attraverso i bracci centrale, destro e sinistro, \vec{B}_C , \vec{B}_D e \vec{B}_S . Siccome la sezione di ciascun tronco del circuito è uniforme, si ha:

$$B_C = B_D + B_S. \quad (5.31)$$

Indicando con \vec{B}_i il campo magnetico nel traferro, il corrispondente vettore \vec{H}_i ha intensità:

$$H_i = \frac{B_i}{\mu_0} \approx 3.2 \times 10^5 \text{ Asp/m};$$

trascurando il flusso disperso, i campi \vec{B}_D e \vec{B}_i , rispettivamente nel tronco destro del circuito e nel traferro, possono essere assunti uguali, pertanto:

$$B_D = B_i = 0.4 \text{ T}$$

e, dalla curva di magnetizzazione segue che:

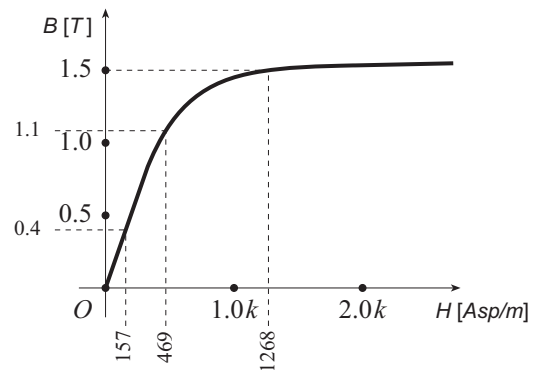
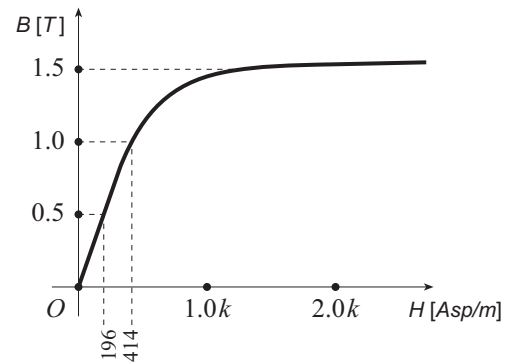
$$H_D \approx 157 \text{ Asp/m}.$$

Valutando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo la maglia costituita dai due bracci esterni del circuito ed osservando che $l_i \ll l_D$, risulta:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_i l_i + H_D (l_D - l_i) - H_S l_S \approx H_i l_i + H_D l_D - H_S l_S = 0,$$

essendo nulla la forza magnetomotrice in questa maglia; da tale relazione segue quindi che l'intensità del vettore \vec{H} nel tronco di sinistra vale:

$$H_S = \frac{H_i l_i + H_D l_D}{l_S} \approx 469 \text{ Asp/m};$$



a cui corrisponde un campo magnetico:

$$B_s = 1.1 T.$$

Nota quindi l'intensità del campo magnetico nei due bracci laterali, attraverso la relazione (5.31) è possibile stabilire l'intensità del campo magnetico nel tronco centrale:

$$B_c = B_D + B_s \approx 1.5 T,$$

a cui corrisponde:

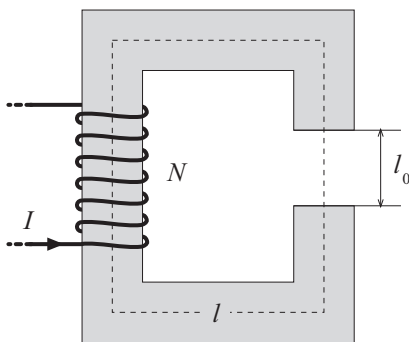
$$H_c \approx 1268 \text{ Asp/m}.$$

Infine, calcolando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo la maglia di destra del circuito si ha:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_i l_i + H_D l_D + H_c l_c = NI,$$

da cui segue:

$$I = \frac{H_i l_i + H_D l_D + H_c l_c}{N} \approx 9.3 A.$$



Esempio: Un elettromagnete è costruito avvolgendo 100 spire conduttrici attorno ad un nucleo ferromagnetico la cui curva di isteresi è mostrata in figura. La lunghezza media del circuito magnetico che costituisce l'elettromagnete è di 140 cm e lo spessore del traferro è di 10 cm. Stabiliamo l'intensità I_s della corrente attraverso l'avvolgimento, necessaria a portare il materiale alla saturazione, in corrispondenza del punto S del ciclo di isteresi. In tale punto, i corrispondenti valori dell'intensità del vettore \vec{H} e del campo magnetico \vec{B} sono:

$$H_s \approx 43 \times 10^3 \text{ Asp/m},$$

$$B_s \approx 1.4 T;$$

Valutando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo il circuito magnetico considerato, nella condizione di saturazione si ha:

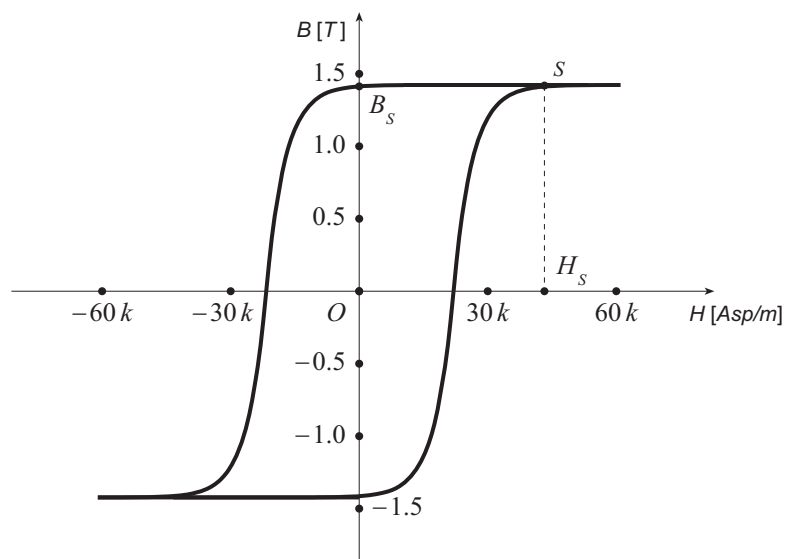
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{0s} l_0 + H_s (l - l_0) = NI_s,$$

dove H_{0s} rappresenta l'intensità del vettore \vec{H} nel traferro alla saturazione, cioè:

$$H_{0s} = \frac{B_s}{\mu_0}.$$

Sostituendo nella precedente espressione segue:

$$I_s = \frac{B_s l_0}{\mu_0 N} + \frac{l - l_0}{N} H_s \approx 1.7 kA.$$



Esempio: Consideriamo il circuito magnetico dell'esempio precedente, supponiamo che una volta raggiunta la condizione di saturazione del materiale ferromagnetico, la corrente attraverso l'avvolgimento venga progressivamente ridotta fino al valore di 500 A. Stabiliamo le intensità del vettore \vec{H} e del campo magnetico \vec{B} nel traferro nelle due circostanze in cui la curva di isteresi venga percorsa facendo scorrere la corrente attraverso l'avvolgimento in un verso oppure nell'altro. Valutando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo il circuito magnetico si ha:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_0 l_0 + H(l - l_0) = NI,$$

dove H_0 rappresenta l'intensità del vettore

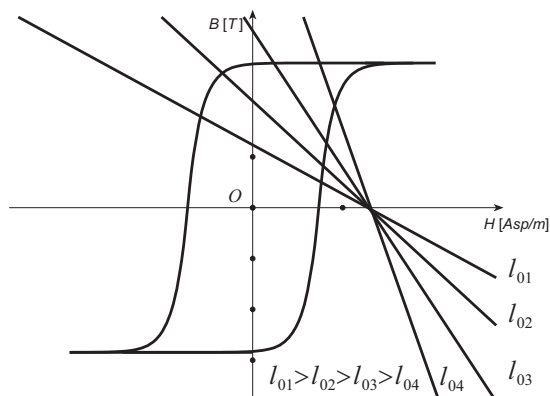
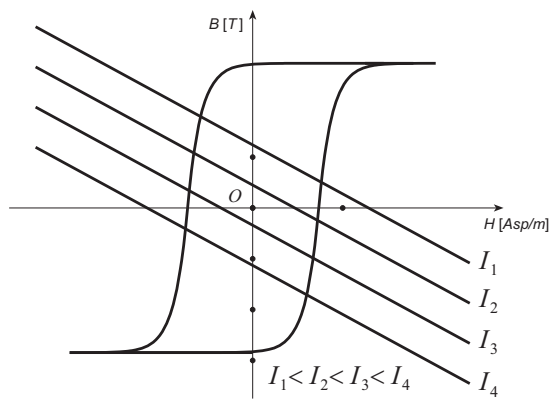
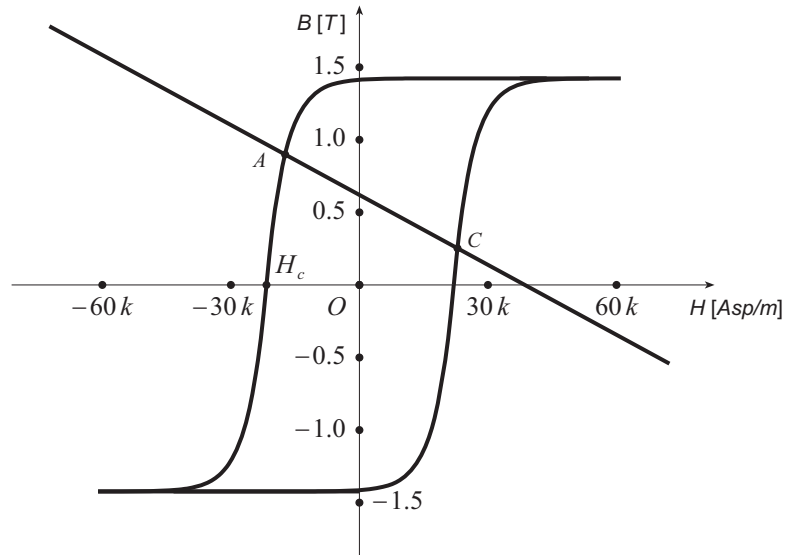
\vec{H} nel traferro, B/μ_0 ; sostituendo nella precedente espressione è possibile ricavare l'intensità del campo magnetico:

$$B = -\mu_0 \frac{l-l_0}{l_0} H + \mu_0 \frac{NI}{l_0}, \tag{5.32}$$

facendo l'intersezione di questa retta di carico con la curva di isteresi si trovano i due stati:

$$H_A \approx -17 \times 10^3 \text{ Asp/m},$$

$$B_A \approx 9.1 \text{ T};$$



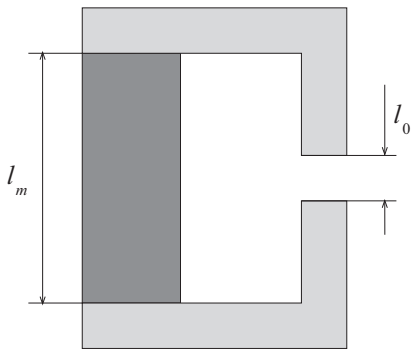
$$H_C \approx 23 \times 10^3 \text{ Asp/m},$$

$$B_C \approx 0.3 \text{ T}.$$

Il primo dei due è ottenuto portando prima l'intensità del vettore \vec{H} ad un elevato valore positivo fino a raggiungere la saturazione, per il secondo stato, invece, tale vettore è stato portato ad un elevato valore negativo. Si osservi che nel primo stato i vettori \vec{H} e \vec{B} nel materiale sono discordi, nel secondo invece sono concordi; in particolare se a partire dallo stato A l'intensità di \vec{H} fosse ulteriormente aumentata fino a portarla al valore coercitivo H_c (in questo caso di $-22 \times 10^3 \text{ Asp/m}$), il campo magnetico risulterebbe nullo; ovviamente nel traferro, i vettori \vec{H} e \vec{B} sono sempre concordi. Qualora venga fatta cambiare l'intensità della corrente attraverso l'avvolgimento, la retta di carico (5.32) si sposta mantenendosi sempre parallela a se stessa, poiché il relativo coefficiente angolare dipende solo dalla geometria del circuito magnetico. Se viene diminuito lo spessore del traferro la retta di carico ruota in senso orario attorno all'intercetta orizzontale; nel limite in cui lo spessore del traferro viene annullato la retta di carico si dispone parallelamente all'asse verticale, il relativo valore del campo magnetico rappresenta il massimo valore ottenibile per la corrispondente corrente nell'avvolgimento, naturalmente in questo caso tale campo non è accessibile all'esterno del materiale. Una particolare circostanza si ha qualora la corrente attraverso l'avvolgimento si annulla, la retta di carico diventa:

$$B = -\mu_0 \frac{l-l_0}{l_0} H,$$

e passa per l'origine. La presenza del campo magnetico in assenza della corrente indica che il materiale è diventato un magnete permanente, in questo caso i vettori \vec{H} e \vec{B} nel materiale si mantengono sempre discordi. Se in queste condizioni lo spessore del traferro viene annullato, si annullerebbe di conseguenza anche il corrispondente vettore \vec{H} ; quando \vec{H} è nullo, dalla relazione (5.10) segue che il campo magnetico \vec{B} vale $\mu_0 \vec{M}$ e il suo modulo, dato dall'intersezione della curva di isteresi con l'asse verticale, è detto *campo magnetico residuo*.



Esempio: Il magnete di figura è costituito da una sbarra magnetizzata di sezione S pari a 40 cm^2 e lunghezza l_m di 30 cm e da due àncore di ferro dolce di sezione S_0 pari a 20 cm^2 che delimitano un traferro di spessore l_0 pari a 4 cm . In figura è mostrata la curva di isteresi del materiale che costituisce la sbarra magnetizzata. Stabiliamo il campo magnetico nel traferro assumendo trascurabile il flusso disperso e supponendo molto elevata la permeabilità magnetica relativa del materiale che costituisce le àncore. Valutando la circuitazione del vettore \vec{H} lungo il circuito magnetico che costituisce il magnete, si ottiene:

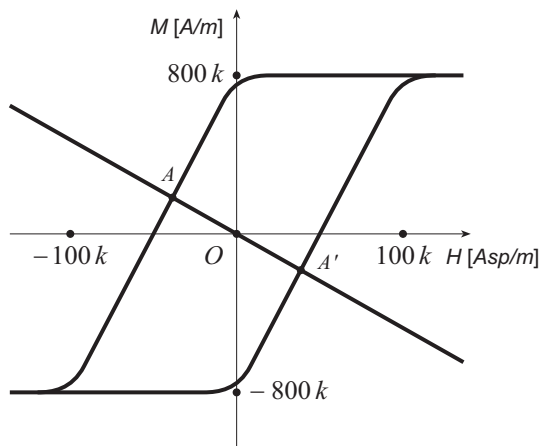
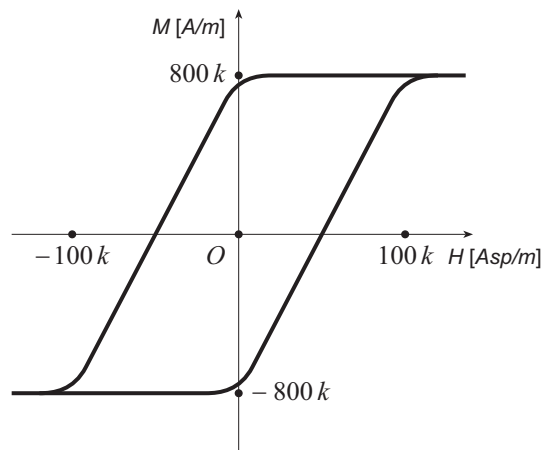
$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m l_m + 2H_a l_a + H_0 l_0 = 0,$$

dove H_m , H_a e H_0 indicano rispettivamente le intensità del vettore \vec{H} nella sbarra magnetizzata, nell'àncora e nel traferro; l_a è la lunghezza delle àncore. Poiché la permeabilità magnetica relativa del materiale che costituisce le àncore è molto elevata, il termine H_a , pari a $B_a / \mu_0 \mu_r$, in cui B_a è il modulo del campo magnetico nelle àncore, può essere considerato trascurabile nella somma precedente. Trascurando inoltre il flusso disperso, dalla relazione (5.23) segue:

$$B_m S = B_0 S_0, \tag{5.33}$$

dove B_m e B_0 rappresentano rispettivamente le intensità del campo magnetico nella sbarra magnetizzata e nel traferro; siccome B_0 vale $\mu_0 H_0$, da tale relazione e dalla precedente, si ha:

$$H_m l_m + \frac{B_0 S_m}{\mu_0 S_0} l_0 = 0,$$



da cui segue:

$$B_0 = -\mu_0 \frac{l_m S_0}{l_0 S_m} H_m,$$

sostituendo quindi questa quantità nella (5.10) si ottiene l'espressione della retta di carico del circuito magnetico in termini di relazione funzionale tra i vettori \vec{M} e \vec{H} :

$$M = -\left(1 + \frac{l_m S_0}{l_0 S_m}\right) H_m.$$

Dall'intersezione della retta di carico con la curva di isteresi si ricava:

$$H_{mA} \approx -38 \times 10^3 \text{ Asp/m},$$

$$M_A \approx 183 \times 10^3 \text{ A/m}.$$

Infine, dalle relazioni (5.33) e (5.10) segue:

$$B_0 = B_m \frac{S}{S_0} = \mu_0 (H_{mA} + M_A) \frac{S}{S_0} \approx 0.36 T.$$