

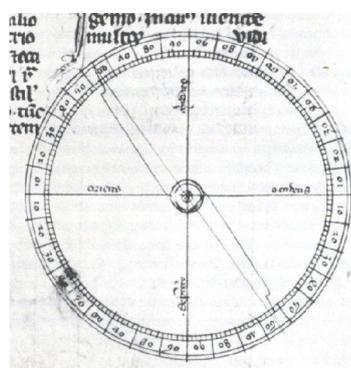
## 4 IL CAMPO MAGNETICO STATICO

Come i fenomeni elettrici, anche quelli magnetici erano noti sin dagli antichi greci, i quali denominarono *μαγνητης λιθος* il minerale proveniente dalla regione di *Μαγνης* in Macedonia, responsabile di tali fenomeni. Nel 600 a.C. Talete per primo formulò una teoria dei fenomeni magnetici che riconduceva le azioni attrattive al possesso di una sorta di anima da parte di alcuni materiali; sia Platone che Lucrezio invece ritenevano che, come nel caso elettrico, i fenomeni magnetici erano dovuti all'emissione di effluvi.

Sant'Agostino nel 428 per primo descrisse il fenomeno secondo cui, quando un magnete solleva una catena di ferro, ogni anello esercita un'attrazione magnetica sugli anelli successivi, inoltre rilevò come un pezzo di ferro situato su un piatto d'argento viene posto in movimento dall'azione di un magnete situato al di sotto del piatto. Sant'Agostino non formulò particolari ipotesi sull'origine di tali fenomeni attribuendone genericamente l'origine ad una manifestazione della divinità.

Nell'XI secolo si scoprì che un ago di ferro opportunamente magnetizzato servendosi di una calamita, quando viene deposto sull'acqua sopra una tavoletta di legno si orienta nella direzione nord-sud. L'ago di ferro così preparato fu successivamente sostituito da un magnete permanente<sup>1</sup> e il dispositivo, dotato di un sistema di sospensioni tale da mantenerlo sempre disposto orizzontalmente malgrado le sollecitazioni cui poteva essere soggetto, fu chiamato *bussola*.

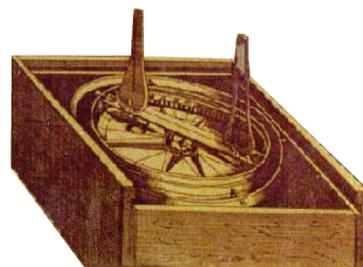
Nel 1262 Petrus Peregrinus da Marincourt, con l'obiettivo di descrivere una macchina che realizzava il moto perpetuo compilò, sotto forma di epistola, il trattato sul magnetismo *De magnete*. In questo documento Peregrinus elencava le principali caratteristiche dei magneti permanenti e spiegava come identificare le polarità di un magnete permanente sagomato a forma di sfera. Inoltre in questo trattato è descritto il fenomeno dell'induzione magnetica, secondo cui un corpo di ferro diventa esso stesso un magnete quando è posto in prossimità di una calamita e il fenomeno secondo cui una calamita spezzata in due parti continua ad essere una calamita, conservando le polarità. Peregrinus rigettava un'ipotesi allora comune che attribuiva l'orientazione dell'ago della bussola alla presenza di grossi giacimenti di materiale magnetico nelle regioni settentrionali della Terra,



Bussola riprodotta da Petrus Peregrinus da Marincourt nel trattato *De magnete*

attribuendo invece questo fenomeno ad un influsso del cielo. Peregrinus rilevò anche la *declinazione magnetica*, cioè l'angolo tra la direzione indicata dall'ago della bussola e il meridiano geografico in Italia. Solo all'inizio del XVI secolo, quando divennero comuni i viaggi transoceanici si comprese che la declinazione magnetica varia da luogo a luogo e, nel 1635 Henry Gellibrand mostrò che tale grandezza, in uno stesso luogo, è soggetta a lente derive temporali. Nel 1544 Georg Hartmann costatò il fenomeno dell'*inclinazione magnetica*, secondo cui un ago calamitato in grado di ruotare attorno ad un'asse orizzontale, orienta il polo nord verso il basso nell'emisfero boreale.

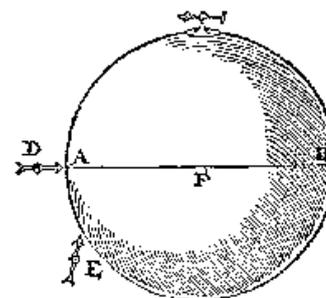
Inspirato ai lavori di Peregrinus, Gilbert realizzò quale modello della Terra un magnete di forma sferica al quale attribuì il nome di



Bussola del XVII secolo con sospensione cardanica (Robert Dudley, *Dell'arcano del mare*, Firenze 1646)

<sup>1</sup> Per indicare il nord magnetico, l'ago era sagomato a forma di freccia, *calamus* in latino, da cui derivò il termine calamita per denominare i magneti permanenti.

*terrella*. Spostando sulla superficie della *terrella* un piccolo ago magnetico Gilbert era in grado di riprodurre l'orientamento della bussola verso il nord terrestre. Da tale risultato Gilbert dedusse che la Terra si comporta come una grande calamita. Attualmente si ritiene che la parte più esterna del nucleo della Terra sia costituita da materiali ferrosi allo stato fuso i quali, contenendo particelle cariche, per effetto della convezione, cioè della tendenza del materiale più freddo e più denso ad affondare e di quello più caldo e meno denso a risalire, e della rotazione terrestre generano delle correnti elettriche che, come si vedrà nel seguito, originano un campo magnetico lungo un asse dipolare nord-sud. Nel *De magnete* di Gilbert viene riportata anche l'osservazione secondo cui un pezzo di ferro, fucinato mentre è orientato nella direzione nord-sud, si magnetizza secondo tale direzione. Per quanto riguarda le ipotesi sull'origine del fenomeno magnetico, Gilbert si rifaceva alle idee animistiche di Talete.



Direzione dell'ago della bussola in corrispondenza di vari punti sulla *terrella* di Gilbert



Hans Christian Ørsted

Nel 1750 il fisico inglese John Michell scoprì che la forza repulsiva tra i poli omologhi di due magneti varia con l'inverso del quadrato della distanza. Tale legge fu confermata indipendentemente nel 1789 da Coulomb adoperando una bilancia di torsione.

L'analogia tra i fenomeni di attrazione e repulsione elettrica e magnetica aveva suggerito, già ai primi sperimentatori, l'idea dell'esistenza di un qualche legame tra questi due fenomeni. Franklin aveva notato l'effetto di magnetizzazione di una cassa contenente stoviglie metalliche colpita da un fulmine e Beccaria riusciva a magnetizzare un pezzo di ferro utilizzando la scarica di una bottiglia di Leida. La disponibilità di correnti costanti di forte intensità seguita all'invenzione della pila elettrica fornì un nuovo impulso alla ricerca della connessione tra il fenomeno elettrico e quello magnetico.

Prima del 1820 i soli fenomeni magnetici noti erano prodotti dalle calamite o dal ferro magnetizzato; nel luglio di quell'anno il fisico danese Hans Christian Ørsted nel corso di un'esperienza dimostrativa presso la propria abitazione, finalizzata a provare il riscaldamento di un filo conduttore percorso da corrente, si accorse della deviazione dell'ago di una bussola in corrispondenza del passaggio della corrente attraverso il filo. In particolare, in disaccordo con l'opinione comune che riteneva che tutte le interazioni di natura elettrica o magnetica si propagassero lungo la congiungente le cariche elettriche o i poli magnetici, Ørsted osservò che l'ago della bussola si dispone sempre perpendicolarmente al filo percorso da corrente.

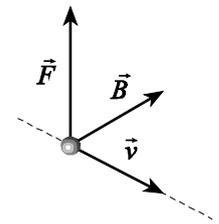
In elettrostatica è stato introdotto il campo elettrico come mediatore dell'interazione tra cariche così, in principio, potrebbe essere perseguito un metodo analogo per l'introduzione del campo magnetico, tuttavia, non essendo mai state osservate delle cariche magnetiche isolate, tale approccio risulta nella pratica insoddisfacente. L'esperienza di Ørsted rivela che i campi magnetici sono prodotti da cariche in moto e, come si vedrà tra breve, i campi magnetici hanno effetto sulle cariche in moto; pertanto, un'analogia al caso elettrostatico più adeguata alla descrizione dei fenomeni magnetici comporta l'assunzione che il campo magnetico media l'interazione tra cariche in movimento ovvero tra correnti.



L'esperienza di Ørsted

## 4.1 Forza di Lorentz

Prescindendo per il momento dalle sorgenti del campo magnetico, valutiamo come si esplica l'interazione tra un campo magnetico ed una particella carica. Allo scopo assumiamo che la particella non sia soggetta ad altri campi al di fuori di quello magnetico che consideriamo uniforme. Sperimentalmente, si verifica che, qualora la carica sia in quiete rispetto alle sorgenti che originano il campo magnetico, su di essa non si esercita alcuna forza. Supponiamo che la particella sia posta in movimento; in tal caso si osserva che il moto della particella non si mantiene rettilineo uniforme; l'assenza, per ipotesi, di altri campi suggerisce l'esistenza di un'interazione tra la particella in moto ed il campo magnetico presente nella regione considerata. Nel 1892, in una teoria sull'elettrone, il fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz formalizzò come



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

la forza esercitata da un campo magnetico  $\vec{B}$  su una carica  $q$  in moto con velocità  $\vec{v}$  rispetto alle sorgenti del campo<sup>2</sup>. Indicando con  $\vartheta$  è l'angolo compreso tra i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ , in modulo si ha:

$$F = qvB \sin \vartheta.$$

Si noti che la relazione (4.1) rende impossibile la determinazione del vettore  $\vec{B}$  attraverso una singola misura; infatti, mentre in elettrostatica la forza  $\vec{F}$  agente su una carica  $q$  per effetto di un campo elettrico  $\vec{E}$  vale  $q\vec{E}$ , misurando  $\vec{F}$  si può risalire sia all'intensità che all'orientazione di  $\vec{E}$  conoscendo le caratteristiche della carica  $q$ ; nel caso del magnetismo, la forza  $\vec{F}$  è sempre perpendicolare al piano definito dai vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ , indipendentemente dall'angolo  $\vartheta$ , così non può essere stabilita l'orientazione di  $\vec{B}$  attraverso una misura di  $\vec{F}$ . A tale scopo si può, ad esempio, ricercare l'angolo in corrispondenza del quale la forza espressa dalla (4.1) si annulla, per poi stabilire, con una seconda misura, l'intensità di  $\vec{B}$ .

Poiché la forza è sempre perpendicolare alla direzione della velocità, il lavoro elementare eseguito da tale forza vale:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = (q \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0,$$

cioè, il lavoro compiuto dalla forza magnetica su una particella in moto è nullo; ne segue che l'energia cinetica della particella resta invariata durante tale moto e, di conseguenza, la velocità cambia in misura tale da lasciarne invariato il modulo.

L'unità di misura del campo magnetico è il *tesla* ( $T$ ), anche noto come *weber per metro quadro* ( $Wb/m^2$ ), ed è definito attraverso l'espressione (4.1);  $1 T$  rappresenta l'intensità del campo magnetico che determina una forza di  $1 N$  su di una carica di  $1 C$  che si muove alla velocità di  $1 m/s$  perpendicolarmente al campo, così:

<sup>2</sup> Sperimentalmente si osserva che l'espressione (4.1) si mantiene valida anche per velocità prossime a quella della luce nel vuoto. Questo costituisce una prova dell'indipendenza della carica dalla velocità.

$$[B] = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = \frac{N}{A \cdot m} \equiv T \equiv \frac{Wb}{m^2};$$

un'altra unità di uso comune è il *gauss* ( $G$ ) e risulta che  $1 T$  è uguale a  $10^4 G$ .

Se agiscono contemporaneamente un campo elettrico  $\vec{E}$  ed un campo magnetico  $\vec{B}$  su una particella di carica  $q$  in moto con velocità  $\vec{v}$ , la forza totale agente sulla particella è data da:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B};$$

benché  $\vec{F}$  venne ottenuta in questa forma nel 1889 dall'ingegnere inglese Oliver Heaviside come generalizzazione di risultati sperimentali,  $\vec{F}$  è detta *forza di Lorentz* e rappresenta la somma della forza elettrica e magnetica cui può essere, in generale, sottoposta una particella carica.

**Esempio:** (*Moto di una carica in un campo magnetico uniforme*) Consideriamo una particella di carica  $q$  e di massa trascurabile  $m$ , immersa in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ , il cui vettore velocità iniziale  $\vec{v}_0$  giace su di un piano  $\mathcal{E}$  perpendicolare alla direzione di  $\vec{B}$ . In queste condizioni, trascurando la gravità, la forza  $\vec{F}$  agente sulla particella è la sola forza di Lorentz espressa dalla relazione (4.1). Poiché questa forza lascia invariato il modulo della velocità, risulta  $v(t) = v_0$ . Inoltre  $\vec{F}$  giace sempre nel piano  $\mathcal{E}$  ortogonale a  $\vec{B}$ . Quindi, nel suo moto, la particella è sottoposta ad una forza di modulo costante, normale alla velocità, pertanto, possiamo concludere che la particella compie un moto circolare uniforme la cui accelerazione centripeta è:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qv_0B}{m};$$

d'altra parte, in un moto circolare l'accelerazione centripeta vale  $v_0^2/R$ , dove  $R$  è il raggio della traiettoria, dunque:

$$\frac{v_0^2}{R} = \frac{qv_0B}{m},$$

da cui segue:

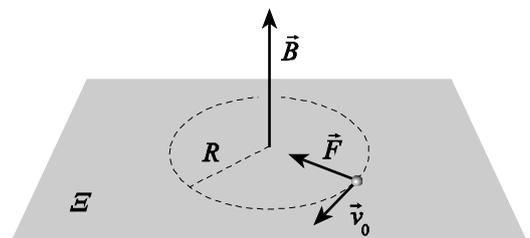
$$R = \frac{mv_0}{qB};$$

il raggio di curvatura  $R$  è, quindi, proporzionale al modulo della quantità di moto della particella,  $mv_0$ . La velocità angolare  $\omega$  è tale che  $v_0 = \omega R$ , da cui:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{m},$$

così il periodo di rivoluzione della particella<sup>3</sup> è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB},$$



<sup>3</sup> L'inverso di tale quantità:

$$f = \frac{qB}{2\pi m},$$

prende il nome di *frequenza di ciclotrone*, per ragioni che verranno spiegate in seguito.

e risulta indipendente dalla velocità  $\vec{v}_0$ . Supponiamo che il vettore velocità  $\vec{v}_0$  formi un angolo  $\mathcal{G}$  con la direzione del campo magnetico  $\vec{B}$ . Decomponendo il vettore  $\vec{v}_0$  lungo le direzioni parallela e perpendicolare a  $\vec{B}$  si hanno, rispettivamente i vettori  $\vec{v}_{0\perp}$  e  $\vec{v}_{0\parallel}$ , tali che:

$$v_{0\perp} = v_0 \sin \mathcal{G},$$

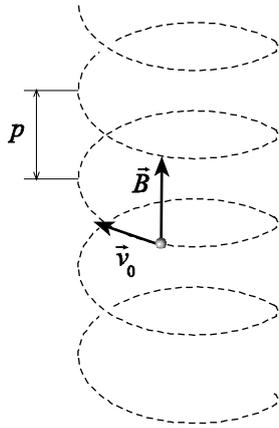
$$v_{0\parallel} = v_0 \cos \mathcal{G},$$

allora, dalla relazione (4.1), siccome  $\vec{v}_{0\parallel}$  e  $\vec{B}$  sono paralleli, segue:

$$\vec{F} = q \vec{v}_0 \times \vec{B} = q(\vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0\parallel}) \times \vec{B} = q \vec{v}_{0\perp} \times \vec{B} + q \vec{v}_{0\parallel} \times \vec{B} = q \vec{v}_{0\perp} \times \vec{B},$$

e, in modulo:

$$F = q v_{0\perp} B = q v_0 B \sin \mathcal{G}.$$



Quindi, il moto della particella lungo la direzione parallela a  $\vec{B}$  è rettilineo uniforme con velocità pari a  $v_0 \cos \mathcal{G}$ , mentre ortogonalmente a  $\vec{B}$  il moto è circolare uniforme, con raggio di curvatura  $R$  e periodo  $T$  dati, rispettivamente, dalle relazioni:

$$R = \frac{mv_{0\perp}}{qB} = \frac{mv_0 \sin \mathcal{G}}{qB},$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$

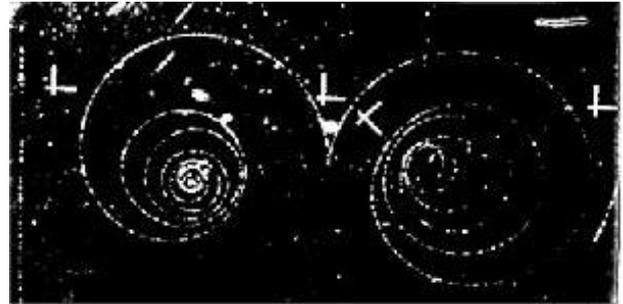
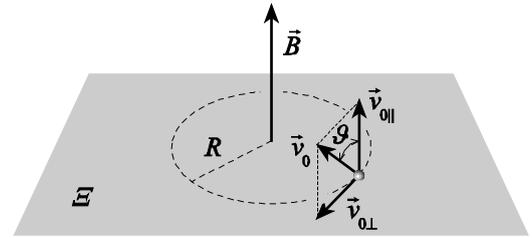
Pertanto, la traiettoria descritta dalla particella è un'elica cilindrica il cui passo  $p$  vale:

$$p = v_{0\parallel} T = \frac{2\pi m v_0 \cos \mathcal{G}}{qB}.$$

L'esempio precedente mostra un approccio per lo studio del moto di una particella carica in un campo magnetico, è possibile tuttavia risolvere questo tipo di problemi in maniera più formale, proiettando sugli assi coordinati l'equazione del moto:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \vec{E} + q \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}. \tag{4.2}$$

**Esempio:** Relativamente al caso trattato nel precedente esempio, il campo elettrico è assente mentre il campo magnetico è uniforme; ponendo l'asse  $z$  parallelamente alla direzione di  $\vec{B}$ , la proiezione della (4.2) sui tre assi si scrive:

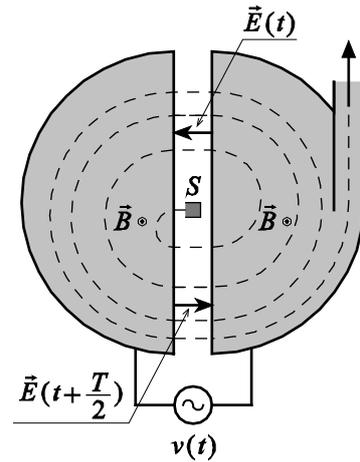


Traiettorie spiraleggianti di un elettrone (a sinistra) e un positrone (a destra) in una camera a bolle. Il mezzo sensibile di questo rivelatore di particelle è costituito da un liquido ad una temperatura prossima al suo punto di ebollizione. Il passaggio di una particella carica attraverso il liquido è evidenziato dalla scia di bolle prodotte nel liquido lungo la traiettoria. Perpendicolarmente al piano del foglio e uscente da questo è disposto un campo magnetico che determina il percorso circolare delle particelle e consente di stabilirne la carica; la forma delle traiettorie è in effetti a spirale in quanto durante il loro percorso le particelle perdono energia negli urti col mezzo e di conseguenza il raggio di curvatura delle traiettorie tende a ridursi. Il positrone e l'elettrone sono stati creati in coppia dal decadimento di un fotone proveniente dal basso, invisibile perché, essendo privo di carica, non produce bolle nel liquido.

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = q \frac{dy}{dt} B, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -q \frac{dx}{dt} B, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = 0; \end{cases}$$

si perviene quindi ad un sistema di equazioni differenziali che può essere risolto in modo tradizionale, una volta definite le condizioni iniziali.

**Esempio:** (*il ciclotrone*) Le sperimentazioni di fisica nucleare vengono solitamente condotte adoperando delle macchine acceleratrici in cui particelle cariche sono portate ad elevate energie cinetiche prima di essere utilizzate quali proiettili contro nuclei; l'analisi degli effetti delle collisioni fornisce delle indicazioni sulle caratteristiche delle forze nucleari e delle particelle elementari. Nel *ciclotrone*, inventato da Ernest Orlando Lawrence nel 1932, un campo elettrico di piccola estensione viene ripetutamente attraversato da particelle cariche in modo che ad ogni passaggio esse vengono accelerate, mentre un campo magnetico normale alla direzione della velocità delle particelle viene adoperato per incurvare la traiettoria e riportare le particelle sotto l'azione del campo elettrico per una successiva accelerazione. In figura è mostrato lo schema di tale macchina. Le particelle si muovono, nel vuoto, in una camera formata da due semiscatole cilindriche conduttrici cave ( $D$ ) separate tra loro in modo che, mediante l'applicazione di un'opportuna differenza di potenziale  $v(t)$ , nella zona libera tra le due  $D$  si stabilisce un campo elettrico  $\vec{E}(t)$  la cui funzione è quella di accelerare le particelle cariche



che attraversano tale zona. Esternamente alle due semiscatole cilindriche è presente un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme e costante che, per effetto della forza di Lorentz impone una traiettoria semicircolare alle particelle. Una particella carica, emessa da una sorgente di ioni  $S$  posta al centro del dispositivo, viene accelerata dal campo elettrico  $\vec{E}(t)$  acquistando energia cinetica. La velocità della particella è diretta verso una delle due cavità dove il campo  $\vec{B}$  le impone la traiettoria circolare. All'uscita dalla cavità il campo elettrico  $\vec{E}(t+T/2)$  è invertito rispetto a  $\vec{E}(t)$  e pertanto determina un ulteriore aumento dell'energia cinetica ed il moto verso l'altra cavità. La frequenza di rivoluzione, pari a  $qB/(2\pi m)$ , essendo indipendente dalla velocità della particella, consente di sincronizzarne i suoi successivi passaggi attraverso la regione in cui è presente il campo elettrico con l'alternarsi della differenza di potenziale  $v(t)$  e quindi con il variare del verso del campo elettrico. Ciò richiede che la frequenza del generatore coincida con la frequenza di ciclotrone. Siccome il raggio di curvatura vale

$$R = \frac{mv}{qB},$$

in corrispondenza di ogni semigioco, al crescere di  $v$  aumenta anche  $R$ , per cui le particelle, dopo aver descritto una traiettoria spiraleggiante, vengono espulse attraverso un opportuno deflettore. L'energia cinetica raggiunta delle particelle è proporzionale al numero  $n$  di rivoluzioni:

$$E_k = 2nqV_M = \frac{1}{2}mv_{max}^2,$$

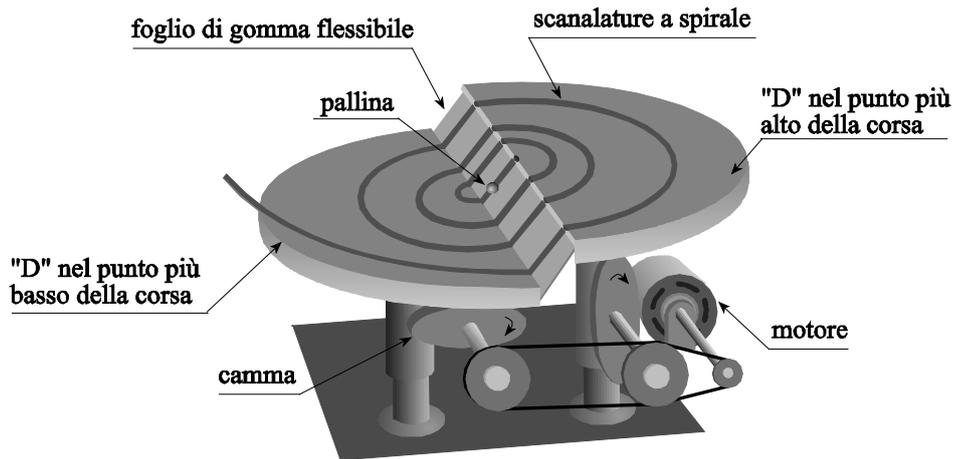
dove  $V_M$  è la differenza di potenziale tra le  $D$  e  $v_{max}$  rappresenta la massima velocità raggiunta. Siccome:

$$R_{max} = \frac{mv_{max}}{qB},$$

allora:



Primo ciclotrone costruito da Lawrence, con raggio di circa 4.5 cm, in grado di accelerare protoni sino ad un'energia di 80 keV.



Modello meccanico di ciclotrone. In questo modello la pallina subisce una accelerazione ad ogni rotolamento lungo la sezione inclinata, in gomma, che congiunge le due piattaforme mobili, corrispondenti agli elettrodi acceleratori della macchina reale. Il meccanismo a camme solleva ciascuna piattaforma mentre la pallina percorre la scanalatura a spirale, così ad ogni successivo transito la pallina compie un passaggio sempre in discesa e di conseguenza aumenta la sua velocità. (adattato da R. Wilson, R. Littauer, *Accelerators: Machines of Physics*, New York, Doubleday Anchor, 1960).

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{q^2 B^2 R_{max}^2}{2m}$$

D'altra parte, dalla relazione:

$$E_k = 2nqV_M = \frac{q^2 B^2 R_{max}^2}{2m}$$

è possibile ricavare il numero di rivoluzioni nell'intero processo di accelerazione:

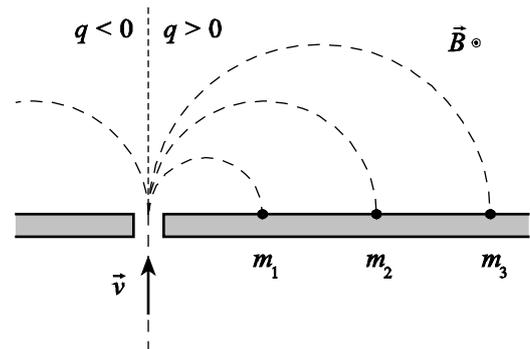
$$n = \frac{qB^2 R_{max}^2}{4mV_M}$$

Questo dispositivo funziona nel modo descritto finché la velocità  $v_{max}$  si mantiene trascurabile rispetto alla velocità della luce nel vuoto, altrimenti per un effetto relativistico la massa diventa significativamente dipendente dalla velocità, impedendo di fatto la sincronizzazione del campo elettrico accelerante con la frequenza di ciclotrone.

**Esempio:** (lo spettrometro di massa) Lo spettrometro di massa, realizzato nel 1920 dal chimico inglese Francis Williams Aston, è uno strumento usato per valutare la massa di particelle cariche. In particolare, con tale dispositivo è possibile ottenere elevate precisioni in misure relative, ossia qualora si vogliono determinare piccole differenze di massa di atomi raggruppati in un medesimo sistema, come accade per gli isotopi di uno stesso elemento. Si noti che gli isotopi di un elemento sono atomi che differiscono tra loro unicamente per il numero di neutroni presenti nel nucleo e non sono distinguibili tra loro attraverso metodi chimici poiché, avendo la medesima struttura atomica, posseggono le stesse proprietà chimiche. Prima di entrare nello spettrometro gli atomi vengono preventivamente ionizzati, ad esempio vengono fatti diventare degli ioni monovalenti, di carica  $+e$  e la loro velocità è portata ad un opportuno valore attraverso dei campi elettrici acceleratori e degli opportuni filtri che eliminano le particelle con velocità differente da quella stabilita. Il fascio collimato di ioni positivi della opportuna velocità  $\vec{v}$  è introdotto in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  normale a  $\vec{v}$ . Pertanto ciascuno ione descriverà una traiettoria circolare di raggio:

$$R = \frac{m v}{q B}$$

Siccome il rapporto  $v/B$  è uguale per tutti gli atomi, attraverso la misura di  $R$  è possibile stabilire il rapporto  $q/m$  e inoltre, se  $q$  è



noto, si può determinare  $m$ . Come anticipato, il metodo risulta particolarmente preciso nelle misure relative; se il fascio è costituito da ioni di uguale carica e differente massa  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , si ha:

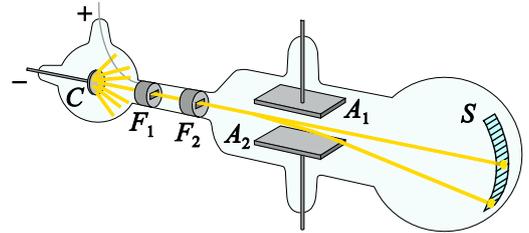


Spettrometro di massa realizzato da Aston nel 1925 (Cavendish Laboratory museum, Cambridge)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{m_1}{m_2}, \frac{R_1}{R_3} = \frac{m_1}{m_3}, \dots,$$

per cui, nota una delle masse, ad esempio  $m_1$ , dai rapporti tra i raggi di curvatura  $R_1/R_k$  è possibile determinare le altre masse  $m_k$ . La determinazione sperimentale dei valori di  $R$  viene effettuata attraverso una lastra fotografica che viene sensibilizzata a seguito dell'urto degli ioni, oppure con un rivelatore elettronico di ioni.

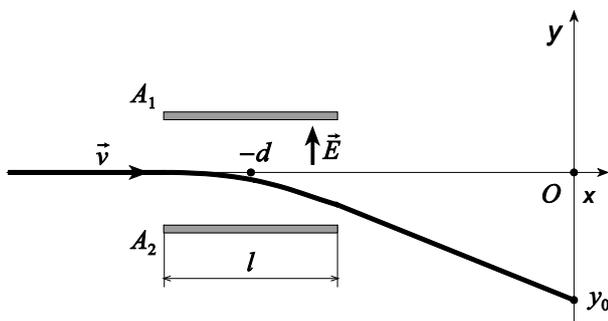
**Esempio:** (la scoperta dell'elettrone) Nel 1838 M. Faraday osservò la formazione di un arco luminoso tra due elettrodi collegati ad una serie di batterie posti in un tubo di vetro in cui era fatto il vuoto; Faraday notò inoltre che l'intensità della luce prodotta in questa maniera aumentava col diminuire della pressione del gas contenuto nel tubo. L'arco luminoso si originava dall'elettrodo posto a potenziale minore (catodo) e terminava sull'elettrodo a potenziale maggiore (anodo). Col migliorare delle tecniche per fare il vuoto si scoprì che la luminosità, anziché formare un arco, tendeva a saturare l'intero tubo.



Intorno al 1870 il fisico inglese William Crookes riuscì a ridurre al di sotto di  $10^{-6} \text{ atm}$  la pressione all'interno di un tubo di vetro per lo studio della scarica, accentuando un fenomeno già notato da Faraday, cioè la formazione di una regione priva di luminosità nelle vicinanze del catodo; Crookes scoprì che in corrispondenza dell'estrazione dell'aria, la regione oscura prendeva ad estendersi per tutta la lunghezza del tubo e, solo in prossimità dell'anodo, si illuminava la regione di vetro che costituiva il tubo. Questa luminosità veniva accentuata se la parte interna del tubo vicino l'anodo veniva coperta da una vernice a base di solfuro di zinco. Nel 1869 il fisico tedesco Johann Hittorf ipotizzò che tale fenomeno era causato da qualcosa che veniva emesso dal catodo che, viaggiando in linea retta attraverso il tubo, provocava la luminescenza in prossimità dell'anodo. A queste entità venne attribuito il nome di *raggi catodici*. Alla fine del diciannovesimo furono svolti molteplici esperimenti per comprendere la natura dei raggi catodici, ovvero se si trattava di particelle o di qualche forma di radiazione. La controversia venne risolta nel 1897 quando Joseph John Thomson, al termine di una serie di esperimenti, giunse alla conclusione che i raggi catodici hanno natura particellare, misurandone, in particolare, il rapporto tra la carica e la massa delle particelle che li costituiscono. In figura è mostrata una rappresentazione schematica dell'apparato adoperato da Thomson per tale determinazione. Un fascio di raggi catodici, emesso dal catodo  $C$ , focalizzato attraverso gli elettrodi forati  $F_1$  e  $F_2$ , passa attraverso gli elettrodi  $A_1$  e  $A_2$  tra i quali è disposto un campo elettrico  $\vec{E}$ ; inoltre, un sistema di bobine esterne al tubo, non mostrate nella figura, determina un campo magnetico  $\vec{B}$  nella regione compresa tra gli elettrodi  $A_1$  e  $A_2$ , diretto perpendicolarmente sia al campo elettrico che al fascio. Il fascio, dopo aver attraversato gli elettrodi  $A_1$  e  $A_2$  raggiunge lo schermo  $S$  dove viene rivelato attraverso la luminosità che produce quando lo colpisce. Quando penetrano nella regione tra gli elettrodi in cui è presente il campo elettrico, in assenza di campo magnetico le particelle del fascio, per effetto della carica posseduta sono soggette ad una forza:

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

dove  $q$  è la carica delle particelle del fascio; pertanto il moto tra gli elettrodi di tali particelle è descritto dalla relazione:



$$m\vec{a} = q\vec{E}.$$

Assumendo che le particelle abbiano una velocità iniziale  $\vec{v}$  diretta del verso positivo delle  $x$  di intensità  $v_x$  (si veda la figura) e che penetrino nella regione compresa tra le armature in corrispondenza del punto di coordinate  $(-d-l/2, 0)$ , dove  $d$  è la distanza tra il centro degli elettrodi  $A_1$  e  $A_2$  di lunghezza  $l$  e lo schermo  $S$ , integrando l'equazione precedente si trova:

$$\begin{cases} x = -d - \frac{l}{2} + v_x t, \\ y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2. \end{cases} \quad \left( -d - \frac{l}{2} < x < -d + \frac{l}{2} \right)$$

Eliminando il parametro  $t$  tra queste equazioni segue:

$$y = \frac{qE}{2mv_x^2} x^2 + \frac{qE(2d+l)}{2mv_x^2} x + \frac{qE(2d+l)^2}{8mv_x^2} \quad \left( -d - \frac{l}{2} < x < -d + \frac{l}{2} \right)$$

pertanto, nella regione compresa tra gli elettrodi  $A_1$  e  $A_2$  il moto è parabolico. Le particelle del fascio superano la regione compresa tra tali elettrodi al tempo  $l/v_x$  nel punto di coordinata  $x$  pari a  $-d+l/2$  e coordinata  $y$  uguale a  $qEl^2/(2mv_x^2)$ . Al di fuori di tale regione, non agendo forze, il moto delle particelle è rettilineo uniforme; la velocità lungo la direzione  $x$  resta invariata, la velocità lungo  $y$  vale:

$$v_y = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=\frac{l}{v_x}} = \left. \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \right) \right|_{t=\frac{l}{v_x}} = \frac{qEl}{mv_x}.$$

Le equazioni orarie del moto al di fuori della regione compresa tra gli elettrodi  $A_1$  e  $A_2$  sono, quindi:

$$\begin{cases} x = -d + \frac{l}{2} + v_x \left( t - \frac{l}{v_x} \right), \\ y = \frac{qEl^2}{2mv_x^2} + \frac{qEl}{mv_x} \left( t - \frac{l}{v_x} \right). \end{cases} \quad \left( -d + \frac{l}{2} < x \leq 0 \right)$$

Eliminando il parametro  $t$  tra queste equazioni si trova:

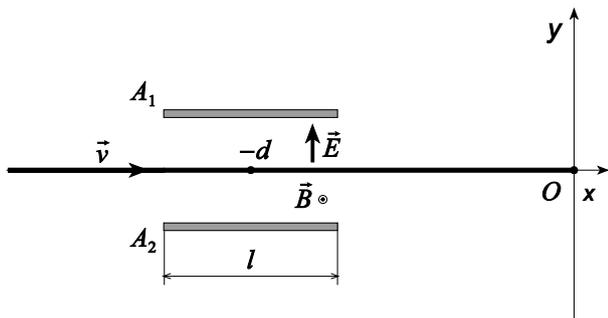
$$y = \frac{qEl}{mv_x^2} x + \frac{qEld}{mv_x^2}. \quad \left( -d + \frac{l}{2} < x \leq 0 \right)$$

In questa relazione, imponendo  $x \equiv 0$  si deduce la coordinata  $y$  di impatto delle particelle sullo schermo:

$$y_0 = \frac{qEld}{mv_x^2} \tag{4.3}$$

Da tale espressione è possibile dedurre il rapporto  $q/m$  nota la velocità  $v_x$ ; per ricavare questa quantità si applica un campo magnetico  $\vec{B}$  perpendicolarmente al campo elettrico  $\vec{E}$  nella regione compresa tra gli elettrodi  $A_1$  e  $A_2$ , come indicato in figura, e se ne regola l'intensità in modo che il fascio di particelle non subisca alcuna deviazione attraversando questa regione. Ciò significa che la risultante delle forze agenti sulle particelle del fascio è nulla, ovvero:

$$q\vec{E} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$



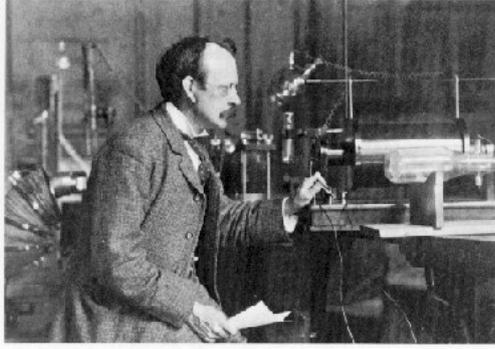
Sviluppando tale relazione, poiché i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  sono perpendicolari, segue:

$$v_x = \frac{E}{B}.$$

Infine, sostituendo nella relazione (4.3) si ottiene:

$$\frac{q}{m} = \frac{y_0 E}{l d B^2}.$$

Il valore attualmente accettato per questo rapporto è  $1.7588 \times 10^{11} \text{ C/kg}$  e corrisponde al rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone. Alla luce dell'identificazione degli elettroni quali costituenti dei raggi catodici è possibile dare una interpretazione della fenomenologia della scarica nei tubi a vuoto. L'intenso campo elettrico che si determina tra catodo ed anodo nel tubo causa la ionizzazione delle molecole residue presenti nel tubo stesso; in particolare, gli ioni positivi attratti dal catodo, collidendo con esso, determinano l'emissione di elettroni. Avendo carica negativa, gli elettroni sono respinti dal catodo e percorrono l'intero tubo verso l'anodo a velocità crescente. Nei primi esperimenti in cui il vuoto all'interno del tubo era solo parziale, si poteva osservare una luminosità diffusa nel tubo dovuta agli urti degli elettroni con le molecole residue del gas; in conseguenza di tali urti le molecole si ionizzavano e quando riacquistavano l'elettrone perso si trovavano in uno stato eccitato dal quale decadevano allo stato fondamentale attraverso l'emissione



J.J. Thomson.

Joseph John Thomson

della luce che veniva osservata. Col migliorare delle caratteristiche del vuoto, il numero di molecole residue si riduceva e pertanto scompariva la luminosità diffusa nel tubo. Il fenomeno che produce l'illuminazione dello schermo coperto dalla vernice a base di Solfuro di Zinco quando è colpito dal fascio di elettroni è detto *fluorescenza* ed è analogo a quello che causa la diffusione della luminosità nel tubo parzialmente svuotato. A partire dalla scoperta dell'elettrone e prima che venisse identificato il nucleo dell'atomo, nel 1904 Thomson propose un modello atomico detto *plum pudding model* (a *panettone* in italiano) in cui l'atomo si assumeva fosse composto da elettroni immersi in una distribuzione uniforme di cariche positive tali da neutralizzare la carica negativa degli elettroni. La successiva scoperta del nucleo atomico nel 1911 da parte di Ernest Rutherford portò ad abbandonare questo modello.

## 4.2 Effetto di un campo magnetico su una corrente

Consideriamo un conduttore rettilineo di sezione  $S$ , percorso da una corrente  $I$  e immerso in un campo magnetico esterno  $\vec{B}$  uniforme; dalla relazione (4.1) segue che la forza agente sulle cariche del conduttore in moto con velocità di deriva  $\vec{v}_d$  è  $q\vec{v}_d \times \vec{B}$ . Se  $n$  rappresenta il numero di cariche libere disponibili per unità di volume, la forza per unità di volume  $\vec{f}$  agente sulle cariche è:

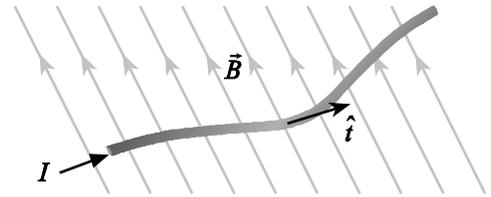
$$\vec{f} = qn\vec{v}_d \times \vec{B} = \vec{J} \times \vec{B},$$

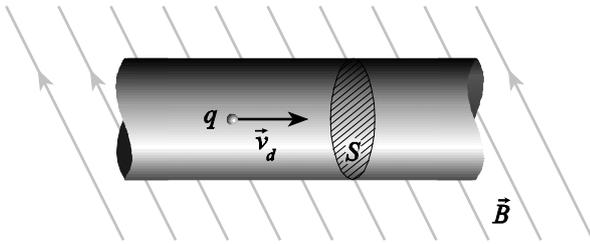
dove  $\vec{J}$  è la densità di corrente nel conduttore. La forza agente su ciascuna carica viene trasferita a tutta la massa del filo conduttore attraverso gli urti con gli atomi che lo costituiscono. Pertanto, la forza che si esplica su di un volume elementare  $dV$  pari a  $S dl$  è:

$$d\vec{F} = \vec{f} dV = \vec{J} \times \vec{B} S dl.$$

Nell'ipotesi che il conduttore possa ritenersi filiforme, se  $\hat{t}$  è il versore tangente a tale conduttore, il vettore densità di corrente  $\vec{J}$  può esprimersi come  $J\hat{t}$ , inoltre, siccome l'elemento  $d\vec{l}$  vale  $dl\hat{t}$ , la relazione precedente diviene:

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} S dl = J\hat{t} \times \vec{B} S dl = J(\hat{t} dl) \times \vec{B} S = JS d\vec{l} \times \vec{B}.$$





Nell'ipotesi che la densità di corrente sia uniforme in tutto il conduttore e perpendicolare alla sua sezione, il prodotto  $JS$  è pari alla corrente  $I$  attraverso il conduttore, pertanto:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (4.4)$$

espressione ricavata da André Marie Ampère nel 1820 che per primo ebbe l'idea di descrivere il conduttore percorso da corrente come un insieme di *elementi di corrente*  $I d\vec{l}$ . Infine, per ottenere la forza totale agente sull'intero filo conduttore, se  $U$  e  $V$  indicano gli estremi del filo, integrando l'equazione precedente, si ha:

$$\vec{F} = I \int_U^V d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (4.5)$$

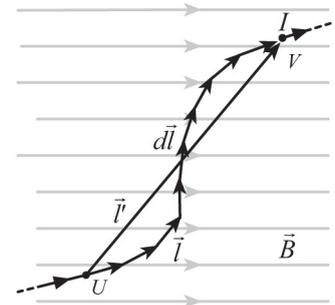
**Esempio:** Consideriamo un filo conduttore, percorso da una corrente  $I$ , posto in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ . La forza agente sul tratto di filo compreso tra gli estremi  $U$  e  $V$  vale:

$$\vec{F} = I \int_U^V d\vec{l} \times \vec{B} = I \left( \int_U^V d\vec{l} \right) \times \vec{B},$$

cioè  $\vec{B}$  è stato portato fuori dal segno di integrale poiché, essendo uniforme, assume lo stesso valore in corrispondenza di ciascun elemento  $d\vec{l}$  del conduttore. D'altra parte l'integrale tra parentesi rappresenta il vettore risultante  $\vec{l}$  di tutti gli elementi  $d\vec{l}$  del conduttore:

$$\vec{l} \equiv \int_U^V d\vec{l},$$

così la forza  $\vec{F}$  può essere espressa come<sup>4</sup>:



<sup>4</sup> Questo risultato può essere conseguito in maniera formale calcolando direttamente l'integrale (4.5); allo scopo supponiamo, per semplicità, che il percorso da  $U$  a  $V$  sia piano, risulta allora:

$$d\vec{l} = \hat{x} dx + \hat{y} dy,$$

inoltre il campo  $\vec{B}$  può essere espresso come:

$$\vec{B} = \hat{x} B_x + \hat{y} B_y + \hat{z} B_z,$$

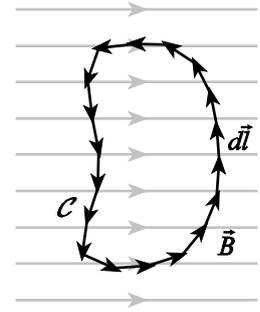
sostituendo nella (4.5), si ha, quindi:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I \int_U^V d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_U^V \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ dx & dy & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= I \int_U^V \left[ \hat{x} B_z dy - \hat{y} B_z dx + \hat{z} (B_y dx - B_x dy) \right] = I \left( \hat{x} B_z \int_U^V dy - \hat{y} B_z \int_U^V dx + \hat{z} B_y \int_U^V dx - \hat{z} B_x \int_U^V dy \right) = \\ &= I \left( \hat{x} B_z \Delta y - \hat{y} B_z \Delta x + \hat{z} B_y \Delta x - \hat{z} B_x \Delta y \right) = I \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \Delta x & \Delta y & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = I \vec{l} \times \vec{B}, \end{aligned}$$

$$\vec{F} = I \vec{l}' \times \vec{B}.$$

Supponiamo ora che il filo conduttore sia chiuso su se stesso in modo da formare una spira  $\mathcal{C}$ ; in questo caso la forza agente su tale conduttore vale:

$$\vec{F} = I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \times \vec{B} = I \left( \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \right) \times \vec{B},$$



d'altra parte, siccome l'insieme dei vettori  $d\vec{l}$  forma un poligono chiuso, allora:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} = \vec{0},$$

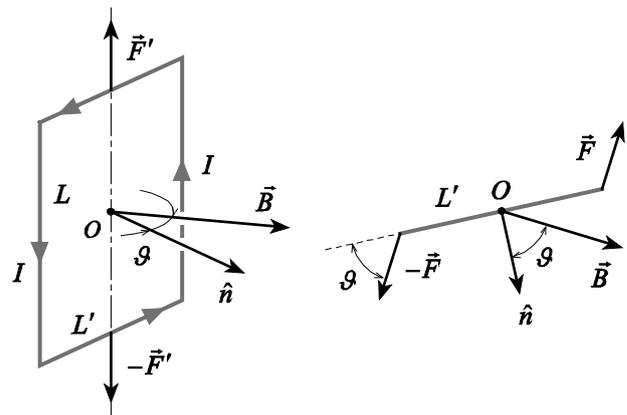
così, di conseguenza:

$$\vec{F} = \vec{0}.$$

Tale risultato ci porta a concludere che la forza magnetica totale che si esercita su una spira percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico uniforme, è nulla.

**Esempio:** (forza magnetica su una spira rettangolare)

Sempre nel 1820 Ørsted sospendendo una piccola batteria ad un filo e chiudendo il circuito ne constatò la rotazione in corrispondenza dell'avvicinamento di un magnete. Consideriamo una spira rettangolare rigida immersa in un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ , diretto normalmente ad una coppia dei suoi lati, e percorsa da una corrente  $I$ . Trascuriamo il campo magnetico che, come si vedrà nel seguito, è prodotto dalla spira stessa. Alla luce di quanto ottenuto nell'esempio precedente, l'azione del campo magnetico uniforme sulla spira determina una forza risultante nulla; supponiamo quindi che tale spira sia vincolata ad un asse passante per il punto medio di una coppia dei suoi lati, in modo da poter ruotare attorno a questo asse (si veda la figura). Analizziamo le singole forze agenti su ciascun tratto della spira, osservando che il vettore  $d\vec{l}$  è diretto in ogni punto parallelamente ai lati. Le forze agenti sui lati inferiore e superiore, di lunghezza  $L'$ , hanno intensità:



$$F' = IBL' \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = IBL' \cos \vartheta,$$

in cui  $\vartheta$  rappresenta l'angolo tra la normale  $\hat{n}$  alla spira e la direzione del vettore  $\vec{B}$ ; il verso di queste forze è opposto per cui, giacendo lungo la stessa retta di applicazione, non determinano effetti dinamici sulla spira. Le intensità delle forze agenti sui lati verticali della spira di lunghezza  $L$  sono:

$$F = IBL; \tag{4.6}$$

anche in questo caso le due forze hanno lo stesso modulo e la stessa direzione con verso opposto, tuttavia tali forze non condividono la medesima retta di applicazione. Per la coppia di forze  $\vec{F}$  risulta, quindi, in generale diverso da zero il momento torcente; per la singola forza questo momento, rispetto all'asse (si veda la figura), ha intensità:

in cui si è posto:

$$\vec{l}' \equiv \hat{x} \Delta x + \hat{y} \Delta y.$$

$$\tau_F = F \frac{L'}{2} \sin \vartheta$$

e, siccome entrambi i momenti hanno uguali intensità, direzioni e versi, il momento totale  $\vec{\tau}$  risulterà doppio del momento  $\vec{\tau}_F$ , così per il modulo risulta:

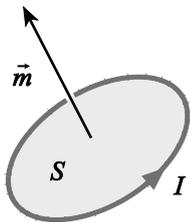
$$\tau = 2\tau_F = 2F \frac{L'}{2} \sin \vartheta = FL' \sin \vartheta = IBLL' \sin \vartheta, \tag{4.7}$$

in cui si è sostituita l'espressione di  $F$  dalla (4.6). D'altra parte, il prodotto  $LL'$  rappresenta l'area  $S$  della spira, per cui, introducendo un vettore così definito:

$$\vec{m} \equiv IS \hat{n}, \tag{4.8}$$

la relazione (4.7) diventa:

$$\tau = mB \sin \vartheta;$$



infine, a questa espressione può essere fatta corrispondere la relazione vettoriale:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Dall'esame di queste ultime due espressioni, possiamo osservare che il sistema raggiunge l'equilibrio meccanico quando  $\vec{\tau} = \vec{0}$ , ovvero per  $\vartheta = 0$ , cioè quando la spira si dispone perpendicolarmente al campo magnetico, ed i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{m}$  risultano allineati.

Il vettore  $\vec{m}$  definito nella relazione (4.8) dell'esempio precedente prende il nome di *momento di dipolo magnetico*; il suo verso segue la regola della mano destra, nel senso che, se si associa il verso della corrente nella spira a quello delle dita della mano destra che si chiudono sul palmo della mano, il verso di  $\vec{m}$  punta nella direzione indicata dal pollice. Dimensionalmente il momento di dipolo magnetico si esprime in  $A \cdot m^2$ .

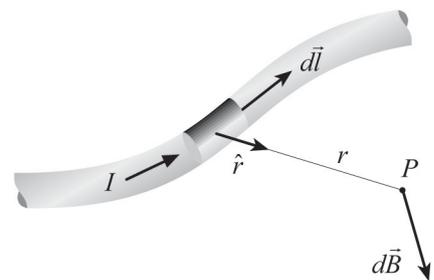
Il fatto che una spira percorsa da corrente si comporti come un dipolo magnetico, le cui proprietà saranno approfondite in seguito, fu suggerito da Ampère nel 1820 e va sotto il nome di *teorema di equivalenza di Ampère*<sup>5</sup>. Con riferimento ad una spira di superficie  $S$  percorsa da una corrente  $I$ , orientando il verso di un vettore  $\vec{S}$ , come quello che vede circolare la corrente in senso antiorario, il teorema di equivalenza di Ampère si esprime come:

$$\vec{m} = I\vec{S}, \tag{4.9}$$

e rappresenta una proprietà generale delle spire chiuse percorse da corrente.

### 4.3 La legge di Biot-Savart

Alla fine del 1820 Jean Baptiste Biot e Félix Savart dedussero sperimentalmente le caratteristiche della forza esercitata su un magnete permanente da un filo conduttore percorso da corrente. Consideriamo un conduttore filiforme percorso da una corrente  $I$  stazionaria; sia  $d\vec{l}$  un tratto elementare del conduttore orientato nel verso di  $I$ , il campo magnetico  $d\vec{B}$  determinato da tale tratto



Banco di Ampère, dispositivo per lo studio dell'interazione di un campo magnetico con una spira percorsa da corrente.

<sup>5</sup> Come vedremo nel seguito, l'equivalenza della spira chiusa percorsa da corrente, sottolineata dal nome attribuito a tale teorema e messa in luce da Ampère, è da intendersi con i magneti permanenti.

in corrispondenza di un punto  $P$  posto a distanza  $r$  da  $d\vec{l}$  vale:

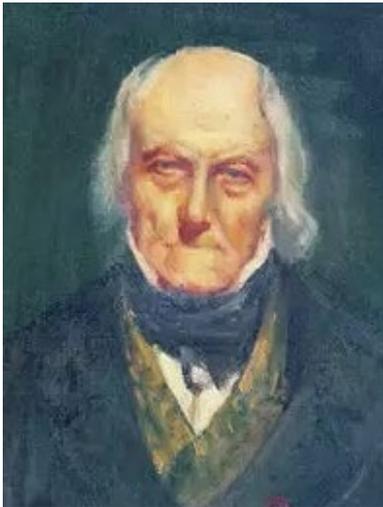
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2}, \quad (4.10)$$

dove  $\hat{r}$  è un versore che spicca dal tratto  $d\vec{l}$  e punta verso  $P$  e  $\mu_0$  è la *permeabilità magnetica del vuoto* che vale:

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \approx 1.257 \times 10^{-6} \frac{T \cdot m}{A}.$$

La relazione (4.10) rappresenta l'espressione della *legge di Biot-Savart*. Se  $\hat{t}$  indica il versore tangente, punto per punto, al filo conduttore, siccome  $d\vec{l}$  può essere espresso come  $\hat{t} dl$ , dalla (4.10), segue:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \hat{t} \times \hat{r}}{4\pi r^2} dl.$$



Jean Baptiste Biot

Naturalmente, queste relazioni che forniscono l'espressione di  $d\vec{B}$ , sebbene di validità generale, devono essere intese soltanto quali strumenti di calcolo, in quanto, sperimentalmente, non è possibile misurare in alcun modo il contributo di un elemento infinitesimo di filo che, a sua volta, non può esistere indipendentemente dal resto del filo. Pertanto, considerando la sovrapposizione dei contributi di tutti gli elementi  $d\vec{l}$  in cui può essere suddiviso il conduttore, si ha:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.11)$$

dove l'integrale è esteso ad un tratto  $\mathcal{L}$  del filo conduttore. Occorre notare le somiglianze tra l'espressione della legge di Biot-Savart relativa al magnetismo e l'espressione della legge di Coulomb dell'elettrostatica. Mentre una carica puntiforme determina un campo elettrico, un elemento di corrente  $I d\vec{l}$  produce un campo magnetico; inoltre, l'intensità del campo magnetico dipende dall'inverso del quadrato della distanza dall'elemento di corrente analogamente a come il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme dipende dalla distanza dalla carica. Tuttavia, come fu evidenziato sperimentalmente da Biot e da Savart, le direzioni dei due campi risultano completamente differenti. Il campo elettrico in un punto  $P$  generato da una carica puntiforme è diretto radialmente, cioè come il vettore  $\vec{r}$  che origina dalla carica ed ha estremo libero in  $P$ , mentre il campo magnetico in un punto  $P$  prodotto da un elemento di corrente è perpendicolare sia all'elemento di corrente che al vettore  $\vec{r}$  che origina da tale elemento ed ha estremo libero in  $P$ .



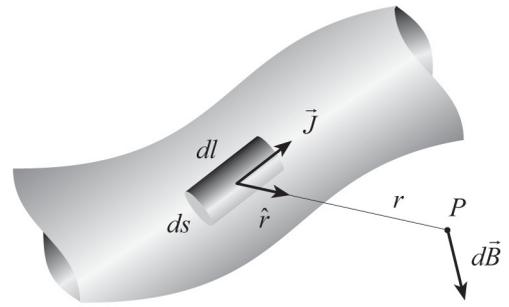
Félix Savart

Qualora il conduttore non fosse filiforme, si considera un

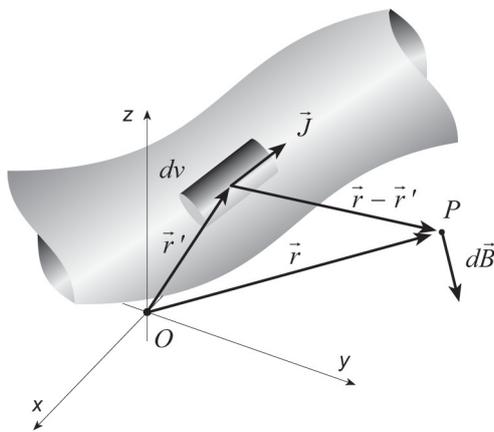
elemento di conduttore di lunghezza  $dl$  e sezione  $ds$  percorso da una corrente di densità  $\vec{J}$ ; l'elemento di corrente può essere espresso come:

$$dI \vec{dl} = dI dl \hat{t} = J ds dl \hat{t} = (J \hat{t}) ds dl = \vec{J} dv,$$

dove  $dv$  è il volume  $dsdl$  dell'elemento considerato e  $\vec{J}$  è parallelo a  $d\vec{l}$ . Pertanto, nel punto  $P$  situato a distanza  $r$  dall'elemento considerato, dalla (4.10) si ha:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI \vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} dsdl \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} dv \quad (4.12)$$



così, integrando in tutto il volume  $V$  in cui  $\vec{J}$  è diverso da zero, risulta:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} dv. \quad (4.13)$$

Nel sistema di riferimento di figura, la (4.12) si esprime come:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (4.14)$$

**Esempio:** (*Campo magnetico prodotto da una carica in moto*) La densità di carica  $\vec{J}$  è legata alla velocità dei portatori di carica  $\vec{v}$  ed alla loro concentrazione  $n$  dalla relazione:

$$\vec{J} = nq\vec{v},$$

dove  $q$  indica la carica dei portatori; così, sostituendo nella (4.12) si ha:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} nd\tau,$$

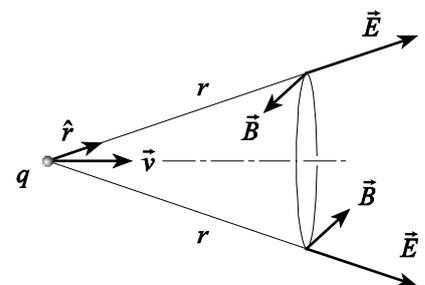
dove si è indicato il volume elementare con  $d\tau$  anziché con  $dv$ . Siccome il prodotto  $nd\tau$  indica il numero di cariche contenute nel volume  $d\tau$ , qualora si consideri un'unica carica, l'integrazione di tale termine deve determinare un risultato unitario, quindi:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Si osservi che il campo elettrico generato dalla stessa carica nel medesimo punto in cui è calcolato il campo magnetico vale:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r},$$

nell'ipotesi in cui per le cariche in moto continuo a valere le formule pertinenti all'elettrostatica. Quindi, confrontando queste ultime due relazioni, si trova:



$$\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E},$$

dove si è posto:

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad (4.15)$$

cioè  $c$  è pari al modulo della velocità della luce nel vuoto. Occorre altresì aggiungere che tali relazioni hanno validità solo nel limite in cui il modulo della velocità  $\vec{v}$  è molto minore di  $c$ , così l'interesse nelle precedenti derivazioni risiede unicamente nel fatto che le relazioni ricavate mettono in luce come il campo magnetico prodotto da una carica in movimento non dipenda dalle cause che ne originano il moto.

**Esempio:** (*Campo magnetico prodotto da un tratto di conduttore rettilineo filiforme*) Consideriamo un tratto di conduttore rettilineo percorso da una corrente stazionaria  $I$  e stabiliamo il campo magnetico presente in un punto  $P$  posto a distanza  $R$  dal tratto di filo considerato. Nel sistema di riferimento di figura risulta:

$$d\vec{l} \times \hat{r} = |d\vec{l} \times \hat{r}| \hat{x} = (dy \sin \vartheta) \hat{x}$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo compreso tra la direzione del versore  $\hat{r}$  e quella dell'asse  $y$ ; facendo uso di tale identità nella relazione (4.10), si ha:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \times \hat{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dy \sin \vartheta \hat{x}.$$

Inoltre, siccome  $r$  vale  $R/\sin \vartheta$  e  $-R/y = \tan \vartheta$ , da cui segue che  $dy = (R/\sin^2 \vartheta) d\vartheta$ , sostituendo nella precedente espressione, si trova:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin^2 \vartheta}{R^2} \frac{R}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta \sin \vartheta \hat{x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin \vartheta d\vartheta \hat{x}.$$

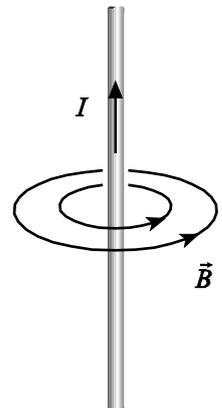
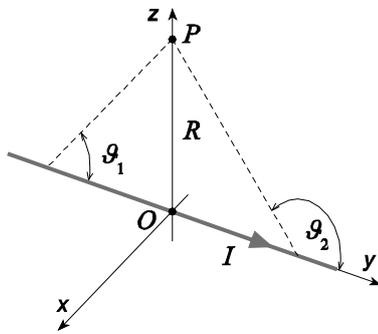
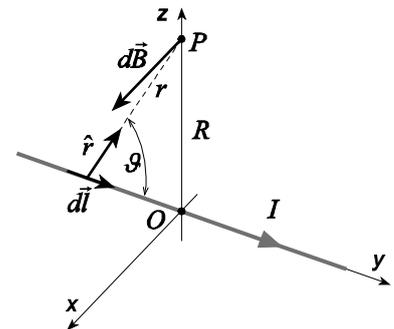
Integrando su tutti gli elementi di corrente che costituiscono il tratto di conduttore, considerato cioè tra gli angoli  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  indicati in figura, si ha:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin \vartheta d\vartheta \hat{x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) \hat{x}.$$

Dalla relazione precedente segue in particolare che, per un filo di lunghezza infinita, siccome  $\vartheta_1$  vale 0 e  $\vartheta_2$  vale  $\pi$ , risulta:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{x}; \quad (4.16)$$

quindi, per un filo di lunghezza infinita le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze concentriche con il centro del filo e disposte nel piano perpendicolare alla direzione del filo. Il verso del vettore  $\vec{B}$  segue la regola della mano destra, nel senso che, se il pollice punta nel verso della corrente, il vettore campo magnetico punta nella direzione delle quattro dita. Si noti infine che questa relazione ha la stessa forma funzionale del campo elettrico generato da una distribuzione rettilinea, indefinita, di carica elettrica.



**Esempio:** (*Campo magnetico prodotto da un nastro conduttore percorso da corrente*) Consideriamo un nastro conduttore di lunghezza indefinita, larghezza  $l$  e spessore trascurabile, percorso da una corrente uniforme  $I$ . Stabiliamo l'intensità del campo magnetico in un punto situato nel piano del nastro, alla distanza  $d$  dal bordo più vicino del nastro. Il campo magnetico nel punto  $P$  (si veda la figura) può essere considerato come la somma dei contributi infinitesimi delle strisce di larghezza  $dx$  assimilate a fili conduttori percorsi da correnti  $di$ . Poiché la corrente è uniformemente distribuita sulla superficie del nastro, risulta:

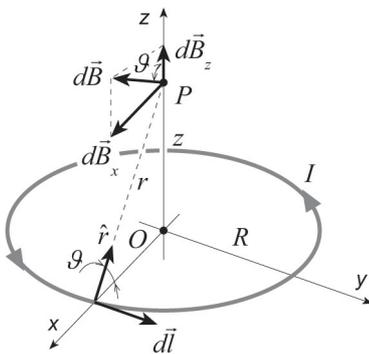
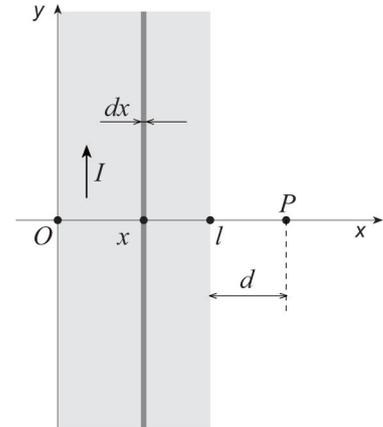
$$di = \frac{I}{l} dx.$$

Pertanto, il contributo al calcolo dell'intensità del campo da parte di ciascuna corrente infinitesima, situata in corrispondenza dell'ascissa  $x$  (si veda la figura), è calcolabile facendo uso della relazione (4.16):

$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+d)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \frac{dx}{x+d};$$

così, integrando si ha:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \int_0^l \frac{dx}{x+d} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \ln\left(1 + \frac{l}{d}\right).$$



**Esempio:** (*Campo magnetico prodotto sull'asse di una spira circolare percorsa da una corrente*) Consideriamo una spira circolare di raggio  $R$  percorsa da una corrente  $I$ . Introduciamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della spira ed asse  $z$  coincidente con l'asse della spira. Stabiliamo l'intensità del campo magnetico in corrispondenza del punto  $P$  posto sull'asse, alla coordinata  $z$ . Il contributo al campo magnetico da parte di un elemento di corrente  $I d\vec{l}$  è dato dalla relazione (4.10); d'altra parte, siccome il vettore  $d\vec{l}$  ed il versore  $\hat{r}$  sono perpendicolari, il modulo del prodotto  $d\vec{l} \times \hat{r}$  coincide con  $dl$ , quindi:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|I d\vec{l} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

Il vettore  $d\vec{B}$  è perpendicolare al piano definito da  $\hat{r}$  e da  $d\vec{l}$ ; quando si considerano i contributi  $d\vec{B}$  di tutti gli elementi  $I d\vec{l}$  che formano la spira, si osserva che le componenti parallele all'asse  $z$  si sommano, mentre quelle perpendicolari si elidono a due a due, per la simmetria del problema. Nei punti dell'asse della spira il campo magnetico è, dunque, parallelo all'asse stesso e concorde a questo se l'orientazione corrisponde a quella della corrente secondo la regola della mano destra. Il contributo al campo da parte della componente diretta lungo l'asse  $z$  è:

$$dB_z = dB \cos \vartheta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \vartheta,$$

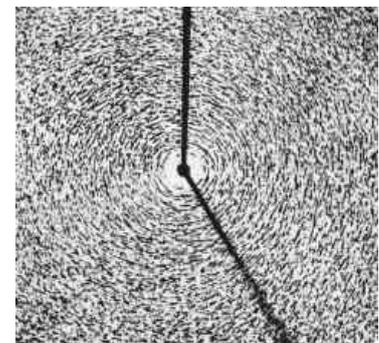
dove  $\cos \vartheta$  può essere espresso come il rapporto  $R/r$ ; pertanto, integrando lungo tutta la spira, si ha:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{spira} \frac{I dl}{r^2} \cos \vartheta = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} \int_{spira} dl = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}.$$

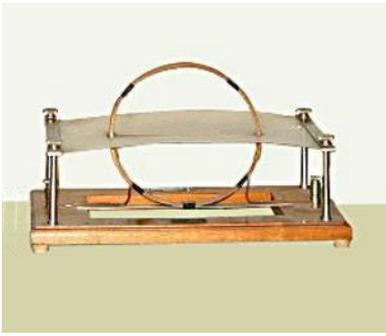
Infine, poiché  $r^2 = R^2 + z^2$ , allora:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}.$$

Al centro della spira, per  $z$  pari a 0, il campo assume la massima intensità  $B_{max}$  e



Rappresentazione delle linee di forza del campo magnetico prodotto da un filo conduttore percorso da corrente.



Dispositivo per lo studio del campo magnetico prodotto da una spira percorsa da corrente.

risulta:

$$\vec{B}_{max} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}, \quad (4.18)$$

mentre per  $z \rightarrow \infty$  il campo si annulla. Quando è soddisfatta la condizione  $z \gg R$ , l'espressione del campo diventa:

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I(\pi R^2)}{z^3} \hat{z}; \quad (4.19)$$

d'altra parte, dalla relazione (4.9) segue che alla spira può essere associato un momento di dipolo magnetico dato da:

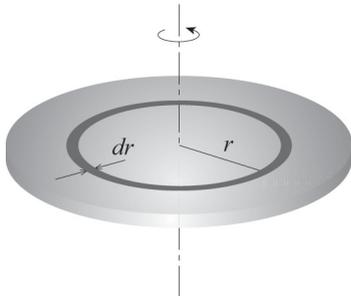
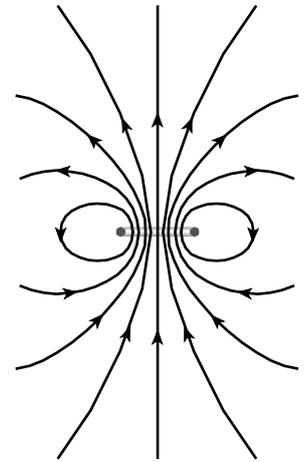
$$\vec{m} = I(\pi R^2) \hat{z},$$

così, sostituendo nell'espressione di  $\vec{B}$  per  $z \gg R$ , segue:

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{z^3}. \quad (4.20)$$

Questa relazione è simile a quella trovata per il campo elettrico a grande distanza da un dipolo elettrico dove risulta  $\vec{E} \approx [1/(4\pi\epsilon_0)](2\vec{p}/z^3)$ ; per analogia col dipolo elettrico si deduce inoltre che l'energia potenziale di un dipolo magnetico, quando questo è immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$ , è data dalla relazione:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (4.21)$$



**Esempio:** (Campo magnetico prodotto sull'asse di un disco rotante) Stabiliamo l'intensità del campo magnetico nel centro di un disco di raggio  $R$  caricato uniformemente con una carica  $q$ , posto in rotazione alla velocità angolare  $\omega$  intorno ad un asse passante per il centro e perpendicolare al piano del disco. Indicando con  $\sigma$  la densità della carica sulla superficie del disco, pari a  $q/(\pi R^2)$ , su una corona circolare di raggi  $r$  e  $r + dr$  è distribuita una carica:

$$dq = 2\pi r \sigma dr = 2\pi r \frac{q}{\pi R^2} dr = \frac{2qr}{R^2} dr.$$

Quando il disco ruota con velocità angolare  $\omega$  pari a  $2\pi/T$ , dove  $T$  è il periodo di rotazione, al moto della carica  $dq$  corrisponde una corrente:

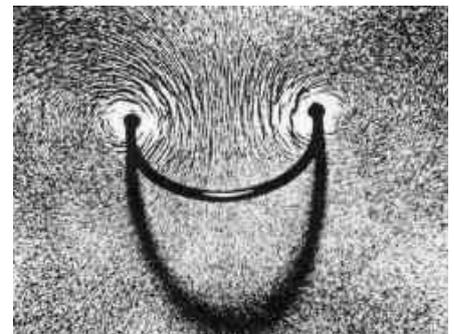
$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{2qr\omega}{R^2 2\pi} dr = \frac{qr\omega}{\pi R^2} dr.$$

Questa corrente, assimilata alla corrente che scorre in una spira circolare di raggio  $r$ , origina nel centro del disco un campo magnetico di intensità data dalla relazione (4.18):

$$dB = \frac{\mu_0}{2r} dI = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q\omega}{R^2} dr,$$

pertanto l'intensità del campo magnetico dovuto all'intero disco, vale:

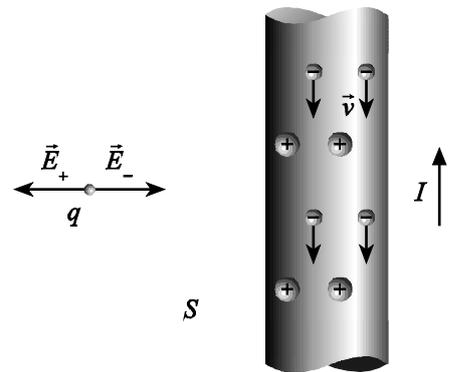
$$B = \int_0^R \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q\omega}{R^2} dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q\omega}{R^2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q\omega}{R^2} R = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{q\omega}{R}.$$



Rappresentazione delle linee di forza del campo magnetico prodotto da una spira circolare percorsa da corrente.

### 4.4 Elettromagnetismo e sistemi di riferimento

Consideriamo una particella di carica  $q > 0$  situata a distanza  $r$  da un filo conduttore percorso dalla corrente  $I$ . Supponiamo che sia la particella che il filo si trovino in quiete in un sistema di riferimento inerziale  $S$ . Sia  $\vec{v}$  la velocità di deriva degli elettroni nel filo. Considerato un tratto generico  $l$  del filo, al suo interno ci sarà un uguale numero di cariche positive e negative,  $Q$  e  $-Q$ , per cui il filo risulterà complessivamente neutro. In particolare assumendo che la carica sia distribuita uniformemente, le densità delle cariche positive e negative varranno, rispettivamente:



$$\lambda_+ = \frac{Q}{l},$$

$$\lambda_- = -\frac{Q}{l},$$

così risulta  $\lambda_+ = |\lambda_-|$ ; indicando con  $\vec{E}_+$  il campo elettrico prodotto dalle cariche positive e con  $\vec{E}_-$  quello prodotto dalle cariche negative, il campo elettrico in corrispondenza della carica  $q$ , avrà intensità:

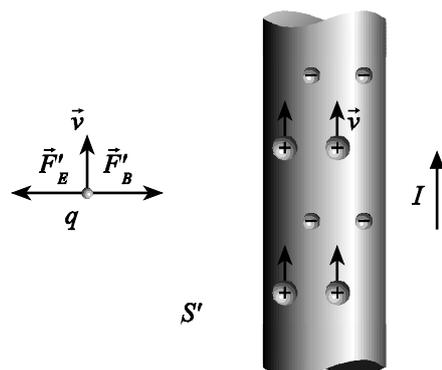
$$E = E_+ + E_- = \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\lambda_-}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{l} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \left(-\frac{Q}{l}\right) = 0, \tag{4.22}$$

per cui non influenza lo stato della particella. La corrente  $I$  attraverso il filo è:

$$I = -\frac{Q}{T} = -\frac{Q}{l} v = \lambda_- v,$$

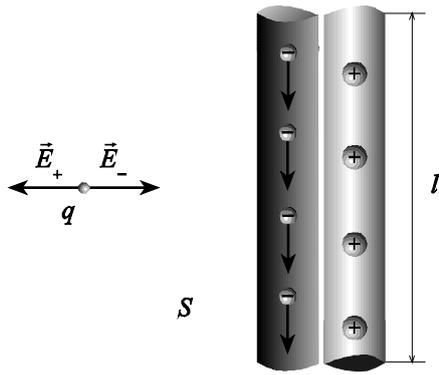
dove  $T$ , uguale a  $l/v$ , rappresenta il tempo impiegato dagli elettroni per percorrere il tratto  $l$  del filo alla velocità  $\vec{v}$ . Pertanto, dalla (4.16) segue che il campo magnetico in corrispondenza della particella ha intensità pari a:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda_- v}{2\pi r};$$



tale campo non produce effetti dinamici sulla particella carica essendo questa a riposo.

Consideriamo ora il punto di vista di un osservatore solidale con un sistema di riferimento  $S'$  in moto assieme agli elettroni nel filo. In questo caso la corrente è prodotta dal moto degli ioni positivi del conduttore e inoltre la carica  $q$  sarà in moto con velocità  $\vec{v}$ . Tale carica sarà quindi soggetta ad una forza  $\vec{F}'_B$  di natura magnetica. Tuttavia se l'accelerazione della particella è nulla nel sistema di riferimento  $S$ , lo deve essere anche in  $S'$  siccome l'accelerazione è una grandezza invariante in corrispondenza del passaggio da un sistema di riferimento ad un



altro in moto rettilineo uniforme rispetto al primo; ne segue che in  $S'$  la particella deve essere soggetta ad un'ulteriore forza tale da annullare la risultante delle forze agenti sulla particella. Questa forza deve essere di natura elettrica. Per stabilire l'origine di tale forza consideriamo il filo nel sistema di riferimento  $S$  come costituito da due sbarrette di lunghezze  $l_+$  e  $l_-$  uguali e pari a  $l$ , una carica positivamente, a riposo, e l'altra, carica negativamente, in moto. In questo sistema di riferimento, dalla (4.22) si ha:

$$E_+ = |E_-|,$$

quindi deve risultare

$$\lambda_+ = |\lambda_-|. \quad (4.23)$$

Nel sistema di riferimento  $S'$ , per poter bilanciare la forza magnetica  $\vec{F}'_B$ , i campi elettrici  $E'_+$  e  $E'_-$  devono necessariamente essere, in modulo, diversi e, in particolare, deve valere la relazione:

$$E'_+ > |E'_-|,$$

per cui, in questo caso deve aversi:

$$\lambda'_+ > |\lambda'_-|,$$

cioè:

$$\frac{Q}{l'_+} > \frac{|-Q|}{l'_-},$$

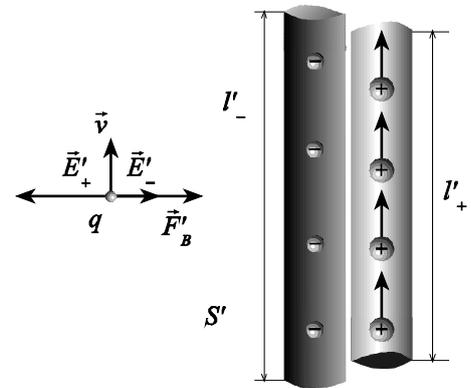
dove si sono indicate con  $l'_+$  e  $l'_-$  le lunghezze delle due sbarrette in  $S'$ . Se assumiamo che la carica contenuta nelle sbarrette sia, in valore assoluto, la stessa, indipendentemente dal fatto che siano in quiete o in moto, dalla relazione precedente si ha:

$$l'_+ < l'_-.$$

È possibile quantificare la relazione precedente a partire dal bilancio delle forze agenti sulla particella nel sistema di riferimento  $S'$ . La forza magnetica  $\vec{F}'_B$  in tale sistema, dovuta alla corrente associata al moto delle cariche positive  $\lambda_+ v$ , ha intensità:

$$F'_B = qvB' = qv \frac{\mu_0 \lambda'_+ v}{2\pi r} = q \frac{\mu_0 \lambda'_+ v^2}{2\pi r} = q \frac{\mu_0 v^2}{2\pi r} \frac{Q}{l'_+},$$

e la forza elettrica  $\vec{F}'_E$  ha intensità:



$$F'_E = q \left( \frac{\lambda'_+}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\lambda'_-}{2\pi\epsilon_0 r} \right) = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{l'_+} - q \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{l'_-}.$$

Imponendo l'uguaglianza tra queste due intensità, segue:

$$l'_+ = l'_- \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

essendo  $c^2 = 1/(\mu_0\epsilon_0)$  dalla (4.15). Per ottenere l'identità tra i moduli di  $\vec{F}'_B$  e  $\vec{F}'_E$ , deve risultare quindi:

$$\begin{aligned} E'_- &< E_- , \\ E'_+ &> E_+ ; \end{aligned}$$

ciò si avrà se:

$$\begin{aligned} |\lambda'_-| &< |\lambda_-| , \\ \lambda'_+ &> \lambda_+ , \end{aligned}$$

ovvero se:

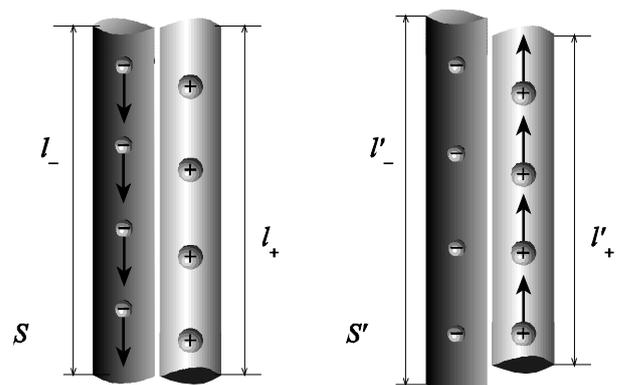
$$\begin{aligned} \frac{|-Q|}{l'_-} &< \frac{|-Q|}{l_-} , \\ \frac{Q}{l'_+} &> \frac{Q}{l_+} , \end{aligned}$$

e quindi se:

$$\begin{aligned} l'_- &> l_- , \\ l'_+ &< l_+ . \end{aligned}$$

Cioè la sbarretta carica negativamente, a riposo in  $S'$ , ha lunghezza maggiore rispetto a  $S$ , dove è in moto; al contrario, la sbarretta carica positivamente in moto in  $S'$  ha lunghezza minore rispetto a  $S$  dove si trova a riposo. Per simmetria possiamo ipotizzare che l'entità dell'allungamento di  $l'_-$  rispetto a  $l_-$  sia uguale all'entità della contrazione di  $l'_+$  rispetto a  $l_+$ . Posto:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$



facendo seguito all'ipotesi appena formulata, deve risultare:

$$l'_- = l_- \gamma, \tag{4.24}$$

$$l'_+ = \frac{l_+}{\gamma}. \tag{4.25}$$

Siccome in  $S$  risulta:

$$l_+ = l_- = l,$$

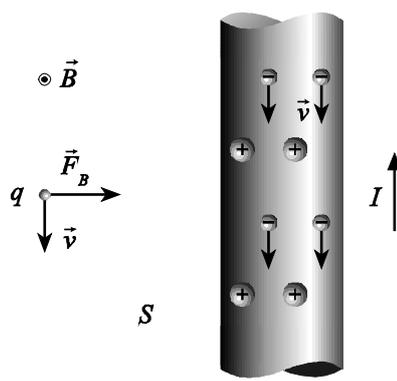
si ha:

$$l'_+ = \frac{l_+}{\gamma} = \frac{l_-}{\gamma} = \frac{l'_-}{\gamma^2} = l'_- \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

in accordo con la precedente relazione.

Quanto verificato mostra che per mantenere l'identità di osservazioni nei due sistemi di riferimento è necessario assumere che le sbarrette in moto abbiano lunghezza inferiore di un fattore  $\gamma$  rispetto alle stesse sbarrette a riposo. Tale risultato, dedotto da una esigenza di natura dinamica, può essere ricavato dai principi della Relatività ristretta.

Così come abbiamo constatato l'origine di un campo elettrico per effetto di un cambiamento di sistema di riferimento, è possibile verificare in altre circostanze l'origine di un campo magnetico, sempre in relazione al cambiamento di sistema di riferimento. Questo ci porta a concludere che, quale conseguenza della Relatività, i campi elettrico e magnetico non esistono quali entità indipendenti e un campo puramente elettrico o magnetico in un certo sistema di riferimento ha componenti sia magnetiche che elettriche in un altro sistema di riferimento. Un'ulteriore conseguenza delle ipotesi fatte può essere ricavata attraverso l'esempio successivo.



**Esempio:** Consideriamo una particella di carica negativa  $q < 0$  a distanza  $r$  da un filo conduttore percorso dalla corrente  $I$ . Supponiamo che la particella sia in moto con velocità  $\vec{v}$  parallelamente al filo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale  $S$  ed assumiamo, per semplicità, che  $\vec{v}$  sia pari alla velocità di deriva degli elettroni nel filo. La corrente  $I$  può esprimersi attraverso la densità di carica degli elettroni, come

$$I = \lambda_- v,$$

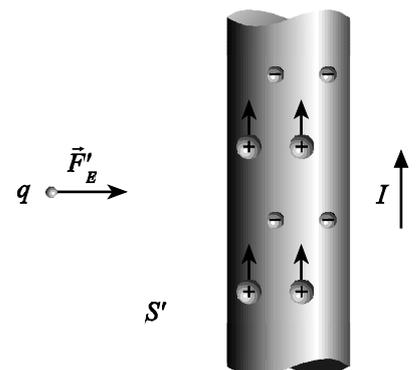
per cui dalla (4.16) il campo magnetico prodotto dal filo avrà intensità:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda_- v}{2\pi r},$$

e, dalla (4.1), il modulo della forza agente sulla carica varrà:

$$F_B = |q \vec{v} \times \vec{B}| = qv \frac{\mu_0 \lambda_- v}{2\pi r} = q \frac{\mu_0 \lambda_- v^2}{2\pi r}, \tag{4.26}$$

ossia la particella risulterà attratta verso il filo. Consideriamo un sistema di riferimento  $S'$  solidale alla particella; siccome qui la carica è in quiete, non è presente alcuna forza magnetica sulla particella. Tuttavia, siccome l'accelerazione è la stessa in entrambi i sistemi di riferimento, essendo uno in moto rettilineo uniforme rispetto all'altro, in  $S'$  sulla carica deve agire una forza che sarà di natura elettrica. Per valutare l'entità di questa forza in  $S'$  possiamo



applicare le relazioni (4.24) e (4.25) allo scopo di stabilire come cambiano le densità di carica in corrispondenza del cambiamento di sistema di riferimento. Cioè:

$$\lambda'_+ = \frac{Q}{l'_+} = \frac{Q}{l_+} \gamma = \lambda_+ \gamma,$$

$$\lambda'_- = -\frac{Q}{l'_-} = -\frac{Q}{l_- \gamma} = \frac{\lambda_-}{\gamma}.$$

Siccome  $\lambda'_+ \neq |\lambda'_-|$ , in  $S'$  la forza elettrica agente sulla carica sarà diversa da zero ed avrà modulo:

$$F'_E = q(E'_+ + E'_-) = q \left( \frac{\lambda'_+}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\lambda'_-}{2\pi\epsilon_0 r} \right) = q \left( \frac{\lambda_+}{2\pi\epsilon_0 r} \gamma + \frac{\lambda_-}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\gamma} \right) = \frac{q}{2\pi r} \frac{1}{\epsilon_0} \left( \lambda_+ \gamma + \frac{\lambda_-}{\gamma} \right) = \frac{q\lambda_+}{2\pi r} \mu_0 c^2 \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 c^2 q \lambda_+}{2\pi r} \gamma \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{\mu_0 c^2 q \lambda_+}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left( 1 - 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) = q \frac{\mu_0 \lambda_+ v^2}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = |F_B| \gamma.$$

Confrontando tale relazione con la (4.26), dall'identità (4.23) segue che per piccole velocità, ossia nel limite  $v \ll c$ , i risultati sono praticamente identici. Tuttavia gli osservatori in  $S$  e in  $S'$  devono constatare gli stessi effetti fisici dalle due forze, ovvero entrambe devono determinare le stesse variazioni della quantità di moto della particella. Pertanto, posto:

$$\Delta p = F_B \Delta t,$$

e

$$\Delta p' = F'_E \Delta t' = F_B \gamma \Delta t',$$

in cui si è assunto che gli intervalli di tempo nei due sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$  sono differenti, affinché risulti

$$\Delta p = \Delta p',$$

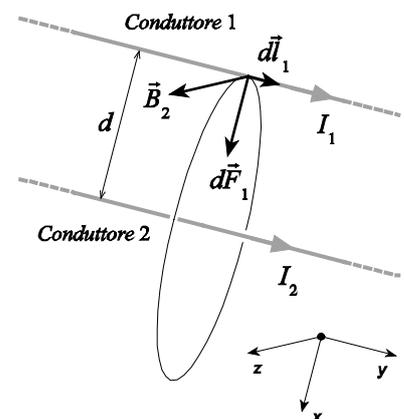
deve aversi:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}.$$

Cioè gli intervalli di tempo che si riferiscono alla particella in moto risultano più lunghi di quelli misurati nel sistema in cui la particella è in quiete. Anche questo risultato può essere dedotto dai principi della Relatività ristretta.

## 4.5 Forza magnetica tra due conduttori paralleli

Siccome un conduttore percorso da corrente genera un campo magnetico ed è soggetto ad una forza quando è immerso in un campo magnetico, due conduttori percorsi da corrente risulteranno sottoposti a forze magnetiche reciproche; tale proprietà fu verificata sperimentalmente da Ampère nel 1820. Consideriamo due conduttori, 1 e 2, rettilinei, indefiniti e paralleli, posti alla distanza  $d$  uno dall'altro e percorsi, rispettivamente, dalle correnti  $I_1$  e  $I_2$  dirette nel medesimo verso (si veda la figura). Per effetto del campo magnetico  $\vec{B}_2$  prodotto dal conduttore 2 percorso da corrente, dato dalla (4.16):



$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{z},$$

l'elemento di corrente  $I_1 d\vec{l}_1$  sarà soggetto alla forza (4.4):

$$d\vec{F}_1 = I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2 = I_1 d\vec{l}_1 \times \left( \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{z} \right).$$

D'altra parte, con riferimento al sistema di coordinate adottato (si veda la figura), il vettore  $d\vec{l}_1$  risulta pari a  $dl_1 \hat{y}$ , così:

$$d\vec{F}_1 = I_1 dl_1 \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \hat{y} \times \hat{z} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl_1 \hat{x}.$$

Quindi, la forza esercitata per unità di lunghezza dal conduttore 2 sul conduttore 1 vale:

$$\frac{d\vec{F}_1}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \hat{x}.$$

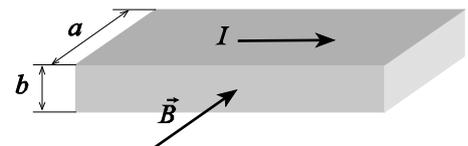
Se si considera il campo magnetico prodotto dal conduttore 1, la forza per unità di lunghezza  $d\vec{F}_2/dl_2$  risulterà uguale in modulo e direzione a  $d\vec{F}_1/dl_1$  ma, in accordo con la terza legge della dinamica, sarà opposta in verso:

$$\frac{d\vec{F}_2}{dl_2} = -\frac{d\vec{F}_1}{dl_1}.$$

Quando le correnti nei due conduttori scorrono in verso opposto le forze si invertono e, a differenza del caso precedente, i due fili tendono a respingersi. Pertanto, conduttori paralleli in cui scorrono correnti nello stesso verso si attraggono mentre conduttori paralleli in cui scorrono correnti in verso opposto si respingono.

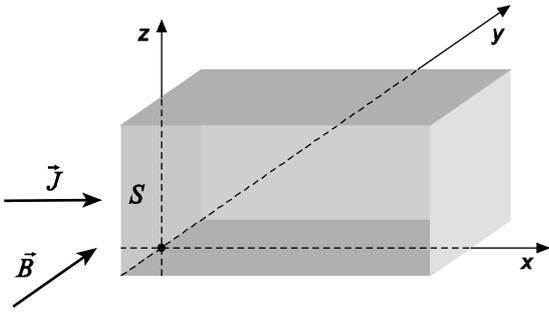
La forza agente tra fili conduttori paralleli percorsi da corrente fu usata nel passato<sup>6</sup> per definire l'unità di misura della corrente nella maniera seguente: se due fili paralleli di lunghezza indefinita, posti alla distanza di 1 m e percorsi dalla stessa corrente, interagiscono con una forza per unità di lunghezza di  $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$  la corrente che li attraversa è, per definizione, di 1 A. Di fatto, tale definizione fissa il valore della permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0$ , che vale pertanto  $4\pi \times 10^{-7} \text{ (T} \cdot \text{m)/A}$ .

**Esempio:** (*Effetto Hall*) Nel 1879 il fisico americano Edwin Herbert Hall scoprì che un conduttore percorso da corrente sviluppa una forza elettromotrice trasversa alla corrente in presenza di un campo magnetico



<sup>6</sup> Nel 2018 la Conférence générale des poids et mesures ha ridefinito l'unità di misura della corrente in termini di costanti fisiche attraverso la carica dell'elettrone, come la corrente che corrisponde al passaggio attraverso la sezione di un conduttore di  $1/(1.602\,176\,634 \times 10^{-19})$  cariche elementari in un secondo. Pertanto:

$$1A \equiv \frac{e}{1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ s}}$$



conduttrice a forma di parallelepipedo di lati  $a$  e  $b$  percorsa da una corrente  $I$  uniformemente distribuita sulla sezione di tale conduttore. La sbarretta è situata in una regione in cui è presente un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme, con le linee di forza disposte perpendicolarmente alla direzione della corrente. La corrente  $I$  si esprime come flusso del vettore densità di corrente  $\vec{J}$  attraverso la sezione  $S$  del conduttore considerato:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s};$$

poiché la corrente è uniformemente distribuita su tale sezione, si ha:

$$I = JS = Jab.$$

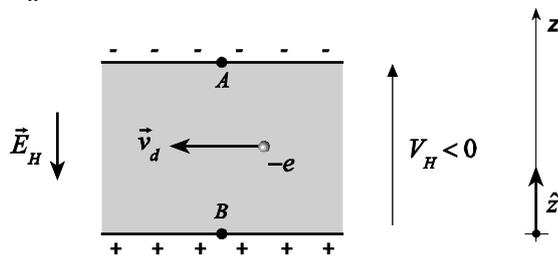
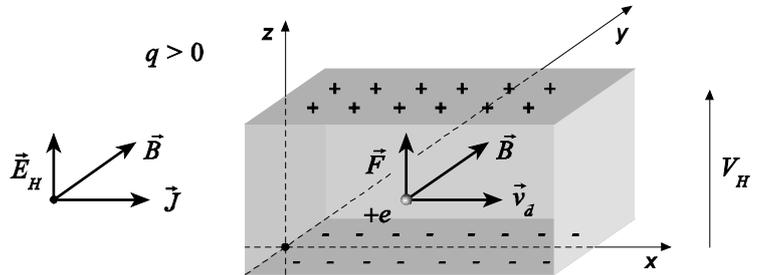
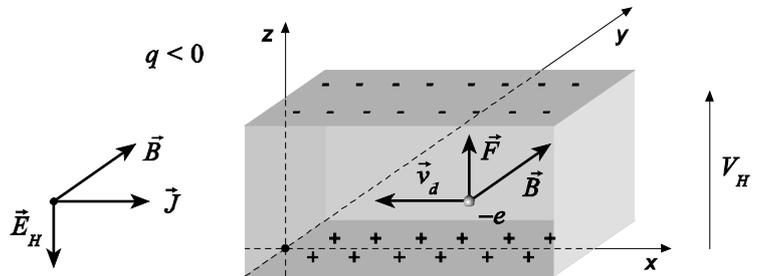
Siccome il vettore  $\vec{J}$  è diretto lungo l'asse  $x$  di figura, possiamo scrivere:

$$\vec{J} = \frac{I}{ab} \hat{x}. \tag{4.27}$$

Per effetto del campo magnetico  $\vec{B}$ , disposto perpendicolarmente alla direzione della corrente, ciascun portatore di carica risulterà soggetto alla forza di Lorentz:

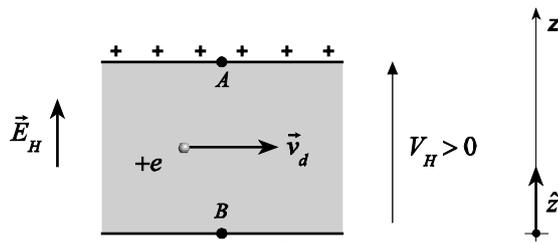
$$\vec{F} = q \vec{v}_d \times \vec{B},$$

dove  $\vec{v}_d$  è la velocità di deriva dei portatori. Questa forza determina un campo elettromotore  $\vec{E}_H$  denominato *campo di Hall* pari a:



$$\vec{E}_H = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v}_d \times \vec{B} = \frac{1}{nq} \vec{J} \times \vec{B},$$

dove la velocità di deriva è stata espressa attraverso la densità di corrente  $\vec{J}$  come  $nq\vec{v}_d$ . Il vettore  $\vec{E}_H$  è diretto lungo l'asse  $z$  di figura ed il suo verso dipende dal segno della carica  $q$ ; in particolare risulta:



$$\begin{cases} q < 0 \Rightarrow \vec{E}_H \cdot \hat{z} < 0, \\ q > 0 \Rightarrow \vec{E}_H \cdot \hat{z} > 0. \end{cases}$$

Pertanto il campo di Hall determina una deflessione delle cariche trasversalmente alla direzione della velocità di deriva  $\vec{v}_d$ . Ne segue che sulle due facce del conduttore perpendicolari a  $\vec{E}_H$  si originano degli accumuli di carica di segno opposto. Con

l'accumularsi di tali cariche, tra tali facce si origina un campo elettrostatico  $\vec{E}$  che, all'equilibrio impedisce ogni ulteriore accumulo. In tale circostanza risulta:

$$\vec{E}_H + \vec{E} = \vec{0},$$

in analogia a quanto accade con un generatore di forza elettromotrice a circuito aperto. La differenza di potenziale tra due punti  $A$  e  $B$  situati sulle due facce perpendicolari a  $\vec{E}_H$  è data dalla relazione:

$$V_H = V_{AB} = \int_A^B \vec{E}_H \cdot d\vec{z} = \vec{E}_H \cdot \overline{BA} = \pm E_H b,$$

dove il segno di  $V_H$  dipende dal verso di  $\vec{E}_H$  e pertanto, dal segno dei portatori di carica:

$$\begin{cases} q < 0 \Rightarrow V_H < 0, \\ q > 0 \Rightarrow V_H > 0. \end{cases}$$

In modulo tale differenza di potenziale vale:

$$V_H = E_H b = \frac{JBb}{nq} = \frac{I Bb}{ab nq} = \frac{IB}{naq}, \quad (4.28)$$

in cui  $J$  è stato espresso tramite la (4.27). Se la corrente  $I$  è prodotta da una batteria di forza elettromotrice  $V$  applicata ai capi della sbarretta lunga  $d$ , risulta:

$$I = \frac{V}{R},$$

in cui  $R$  è la resistenza offerta al passaggio della corrente  $I$  nella direzione considerata e vale, pertanto:

$$R = \rho \frac{d}{ab}$$

così, sostituendo la corrente  $I$  nella (4.28) e tenendo conto di tale valore della resistenza, si ha:

$$V_H = \frac{B}{naq} I = \frac{B}{naq} \frac{V}{R} = \frac{B}{naq} V \frac{ab}{\rho d} = \frac{1}{nq} \frac{BbV}{\rho d}.$$

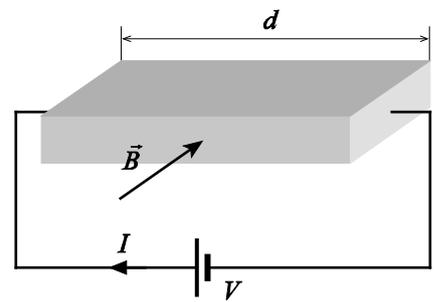
Alla quantità  $1/nq$  che compare in questa espressione viene attribuito il nome di *costante di Hall*  $R_H$ :

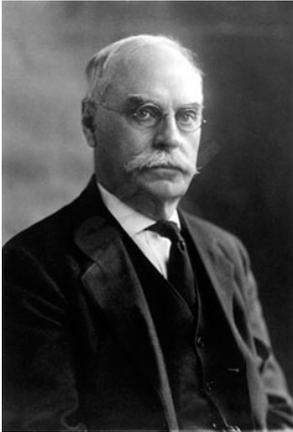
$$R_H \equiv \frac{1}{nq},$$

per cui l'espressione precedente si può scrivere come:

$$V_H = R_H \frac{BbV}{\rho d}.$$

Valori tipici di  $R_H$  sono dell'ordine di alcune unità di  $10^{-11} m^3/C$  e nella maggior parte dei conduttori (come ad esempio per  $Cu$ ,  $Ag$  e  $Au$ ) si trova che la costante di Hall è negativa, a conferma del fatto che i portatori di carica sono elettroni. Inoltre, attraverso la misura di  $R_H$  si può stabilire in un conduttore la densità  $n$  di elettroni liberi, ovvero degli elettroni disponibili alla conduzione; si trova che il numero medio di elettroni liberi è dell'ordine di  $1 \div 2$  per atomo (1.3 per  $Cu$ , 1.4 per  $Ag$ , 1.8 per  $Au$ ). Infine, poiché la relazione precedente esprime una proporzionalità fra la differenza di potenziale  $V_H$  e l'intensità del campo magnetico  $\vec{B}$ , l'effetto Hall permette la realizzazione di dispositivi per la misura del campo magnetico. La costante di proporzionalità:





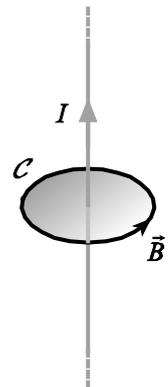
Edwin Herbert Hall

$$k \equiv \frac{V_H}{B} = \frac{R_H b V}{\rho d},$$

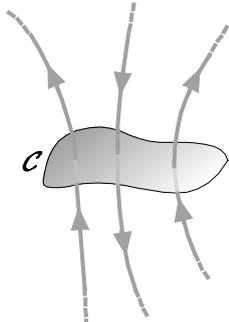
può essere valutata analiticamente o meglio, sperimentalmente, inserendo il dispositivo in un campo magnetico noto e misurando in corrispondenza il valore della tensione  $V_H$ . La corrente prodotta da cariche positive è spiegata da una particolare modalità tramite la quale si esplica il moto di deriva degli elettroni in alcuni materiali. In pratica gli elettroni si muovono occupando delle posizioni vuote dette lacune, creando a loro volta delle lacune nelle posizioni lasciate; tale spostamento può essere riguardato come un moto di cariche positive nel verso opposto a quello degli elettroni. In corrispondenza dell'applicazione di un campo elettrico al materiale, tali spostamenti si esplicano nella direzione del campo per cui possono essere assimilati ad una corrente di lacune, immaginandole quali entità fisiche in moto e dotate di carica uguale in modulo ma opposta in segno a quella dell'elettrone e di massa diversa.

### 4.6 La legge di Ampère

La relazione (4.16) mostra che le linee di forza del campo magnetico prodotto da un filo conduttore rettilineo indefinito percorso da una corrente stazionaria sono costituite da circonferenze concentriche col filo situate nel piano perpendicolare alla direzione del filo stesso. L'intensità del campo magnetico è la stessa lungo tali circonferenze ed è direttamente proporzionale all'intensità della corrente che scorre nel filo. Sia  $\hat{\phi}$  un versore tangente in ogni punto ad una circonferenza  $\mathcal{C}$  di raggio  $r$ , concentrica ad un filo conduttore percorso da una corrente  $I$  e orientato, in ogni punto della circonferenza, rispetto al verso della corrente, secondo la regola della mano destra. Dalla (4.16) segue che il campo magnetico  $\vec{B}$ , in corrispondenza dei punti di questa circonferenza, è dato da:



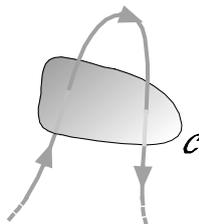
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi};$$



l'integrale di  $\vec{B}$  lungo la circonferenza è:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint_C dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I.$$

Quindi, a differenza della circuitazione del campo elettrostatico, che è sempre nulla, la circuitazione del campo magnetico è diversa da zero, perciò tale campo risulta non conservativo.



Sebbene questo risultato, noto come *legge di Ampère*, sia stato ricavato relativamente ad un percorso circolare, come si dimostra nel seguito, la proprietà che esso evidenzia ha carattere generale; cioè la circuitazione del campo magnetico  $\vec{B}$  lungo un qualsiasi percorso chiuso  $\mathcal{C}$  è pari a  $\mu_0 I$ , dove  $I$  è la corrente (stazionaria) totale che attraversa una qualsiasi superficie delimitata dal percorso  $\mathcal{C}$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

Quindi, nell'eventualità che attraverso la superficie considerata scorra più di una corrente, la relazione va interpretata nel senso che  $I$  rappresenta la somma algebrica  $\sum_n I_n$  di tutte le correnti che attraversano la regione:

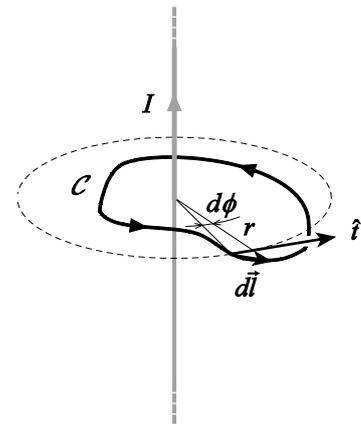
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_n I_n.$$

Se invece  $I = 0$ , segue che la circuitazione di  $\vec{B}$  è nulla. Infatti, poiché  $\sum_n I_n$  esprime la somma algebrica delle correnti, qualora la superficie considerata sia attraversata da due correnti di uguale intensità ma con versi opposti, tale somma risulta nulla. Si osservi, infine, che le correnti della somma  $\sum_n I_n$  sono considerate positive relativamente al verso di percorrenza della curva  $C$ , in accordo con la regola della mano destra. Di seguito è data la dimostrazione della legge di Ampère.

Consideriamo un filo conduttore rettilineo indefinito percorso dalla corrente  $I$ ; sia  $d\vec{l}$  un generico vettore infinitesimo posto a distanza  $r$  dal filo. Dalla (4.16) segue che il prodotto scalare tra il vettore campo magnetico  $\vec{B}$  generato dal filo ed il vettore  $d\vec{l}$  vale:

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{t} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi,$$

dove  $\hat{t}$  è un versore tangente in ogni punto alla circonferenza di raggio  $r$ , concentrica al filo, ed orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della mano destra e dove il prodotto  $\hat{t} \cdot d\vec{l}$ , essendo pari alla proiezione di  $d\vec{l}$  nella direzione di  $\hat{t}$ , come mostrato in figura, è uguale a  $r d\phi$ . La circuitazione di  $\vec{B}$  estesa ad una curva chiusa  $C$  vale, pertanto:



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{t} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi.$$

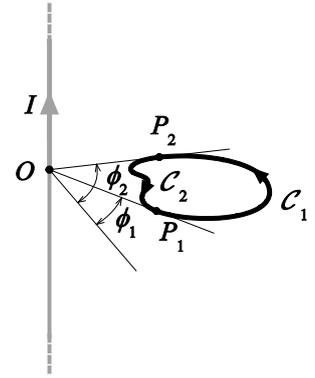
Si presentano due possibilità: o la curva chiusa  $C$  concatena il filo conduttore, ossia gli gira intorno, oppure non lo concatena. Nel primo caso l'integrale  $\oint_C d\phi$  vale  $\pm 2\pi$ , dove il segno dipende dall'orientazione relativa della linea chiusa rispetto al verso della corrente ed è positivo se tale orientazione segue la regola della mano destra o negativo altrimenti; pertanto:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \pm \mu_0 I.$$

Nel secondo caso, qualora la corrente  $I$  non sia concatenata con la curva chiusa  $C$ , possiamo esprimere la circuitazione di  $\vec{B}$  lungo tale curva attraverso la somma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l},$$

dove  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  rappresentano i due tratti di linea in cui la curva chiusa  $\mathcal{C}$  può essere spezzata dai punti  $P_1$  e  $P_2$  di contatto tra la curva  $\mathcal{C}$  e le semirette condotte dal punto di intersezione  $O$  del filo conduttore ai punti  $P_1$  e  $P_2$  della curva  $\mathcal{C}$  (si veda la figura). Sviluppando gli integrali come nel caso della corrente concatenata, si ha:



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \int_{\mathcal{C}_1}^{P_2} d\phi + \int_{\mathcal{C}_2}^{P_1} d\phi \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} [(\phi_2 - \phi_1) + (\phi_1 - \phi_2)] = 0.$$

La legge di Ampère e in particolare questa derivazione, mettono in luce come il valore della circuitazione di  $\vec{B}$  non dipenda dalla forma della linea chiusa  $\mathcal{C}$ , ma solo dal suo grado di concatenazione col filo percorso da corrente. Ciò consente di estendere le conclusioni appena raggiunte nel semplice caso del filo rettilineo indefinito percorso da corrente, a tutti i possibili casi. Consideriamo un insieme di  $n$  fili percorsi dalle correnti  $I_1, I_2, \dots, I_n$ ; tali correnti producono, rispettivamente, i campi magnetici  $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ . Il campo totale  $\vec{B}$  in ciascun punto dello spazio sarà dato dalla somma:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n$$

così, integrando lungo la linea chiusa  $\mathcal{C}$ , si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n) \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} + \dots + \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_n \cdot d\vec{l};$$

ciascuna circuitazione di questa somma vale  $\mu_0 I_k$  o zero, a seconda che  $\mathcal{C}$  concateni, o meno, la corrente  $I_k$  e, in conclusione, possiamo scrivere:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I,$$

sottintendendo che la corrente al secondo membro è la somma delle correnti concatenate, ciascuna presa col segno opportuno secondo la regola mostrata in precedenza.

Siccome la corrente  $I$  può, in generale, esprimersi come il flusso del vettore densità di corrente  $\vec{J}$ , la legge di Ampère può essere anche scritta come:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}, \tag{4.29}$$

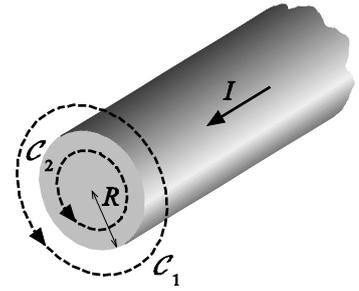
dove il flusso del vettore  $\vec{J}$  è calcolato attraverso una qualsiasi superficie  $S$  che ha per contorno la curva chiusa  $\mathcal{C}$  lungo la quale viene valutata la circuitazione del vettore  $\vec{B}$ . Nella relazione (4.29) la normale alla superficie aperta  $S$  è legata all'orientazione della curva  $\mathcal{C}$  secondo la regola della mano destra.

**Esempio:** (*Campo magnetico prodotto da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente*) Consideriamo un filo conduttore rettilineo di raggio  $R$  e lunghezza indefinita percorso da una corrente  $I$  stazionaria di densità uniforme su tutta la sua sezione. Consideriamo un percorso circolare  $\mathcal{C}_1$  di raggio  $r$  concentrico col filo; per  $r \geq R$ , dalla legge di Ampère, segue:

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{\mathcal{C}_1} dl = B(2\pi r) = \mu_0 I,$$

essendo dalla (4.10) il vettore  $\vec{B}$  parallelo a  $d\vec{l}$  lungo  $\mathcal{C}_1$  e, per simmetria, di modulo costante, quindi:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$



che è la stessa espressione ottenuta attraverso l'applicazione della legge di Biot-Savart. Nel caso in cui  $r < R$ , consideriamo la superficie circolare  $S_2$  che ha come contorno la circonferenza  $\mathcal{C}_2$  di raggio  $r$ , dalla (4.29) segue:

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 J \int_{S_2} ds = \mu_0 J \pi r^2,$$

essendo il vettore  $\vec{J}$  uniforme in corrispondenza dei punti della superficie  $S_2$ ; per tale ragione il modulo di  $\vec{J}$  può essere espresso attraverso la corrente  $I$  come:

$$J = \frac{I}{\pi R^2},$$

quindi, sostituendo nella relazione precedente si trova:

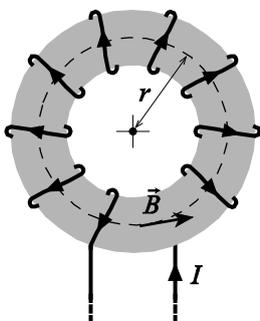
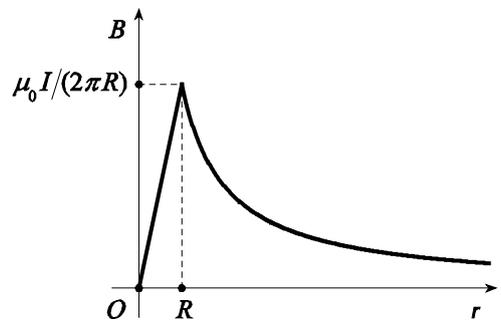
$$\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2,$$

essendo, anche in questo caso,  $\vec{B}$  costante in modulo e parallelo a  $d\vec{l}$  in ogni punto di  $\mathcal{C}_2$ , pertanto:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Così l'intensità del campo magnetico prodotto da questa distribuzione di corrente al variare di  $r$  è data dall'espressione:

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r \geq R; \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r & r < R. \end{cases} \quad (4.30)$$



**Esempio:** (Campo magnetico prodotto da una bobina toroidale) Consideriamo un supporto toroidale attorno al quale sono avvolte  $N$  spire di filo conduttore; calcoliamo il campo magnetico prodotto da tale configurazione, quando il filo è percorso da una corrente  $I$ . Applicando la legge di Ampère ad una circonferenza  $\mathcal{C}$  di raggio  $r$  interna al toroide, segue

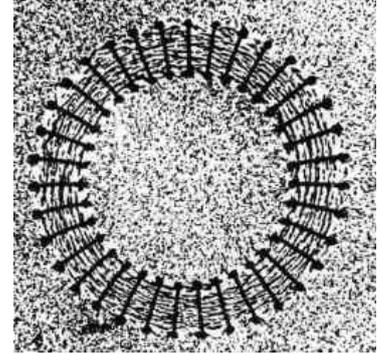
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_{\mathcal{C}} dl = B(2\pi r) = \mu_0 NI,$$

essendo, per simmetria, il vettore campo magnetico tangente a tale curva e di modulo costante in corrispondenza dei punti di  $\mathcal{C}$ . Sviluppando questa espressione si trova:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

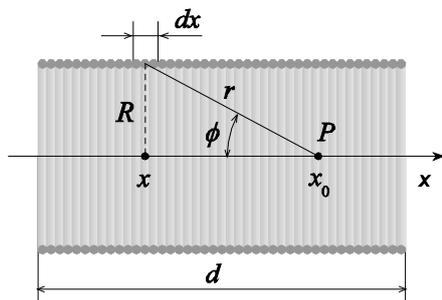
Quindi il campo magnetico non è uniforme su una sezione del toroide; tuttavia, se  $r$  è molto maggiore del raggio della sezione del toroide, il campo può ritenersi sostanzialmente uniforme. Se le spire sono avvolte strettamente attorno al

supporto, il campo esterno al toroide può ritenersi nullo; ciò perché la corrente netta concatenata ad un qualsiasi percorso esterno alla bobina è nulla, inclusa la zona centrale. In pratica, poiché l'avvolgimento è elicoidale, anziché essere costituito dalla sovrapposizione di spire circolari, un piccolo campo magnetico esterno alla bobina risulta essere sempre presente.



Rappresentazione delle linee di forza del campo magnetico prodotto da una bobina toroidale percorsa da corrente.

**Esempio:** (*Campo magnetico prodotto da un solenoide*) Per solenoide si intende un dispositivo costituito da un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica di piccolo passo. Sia  $R$  il raggio,  $d$  la lunghezza e  $N$  il numero di spire percorse da una corrente  $I$ . Nell'ipotesi che le spire siano sufficientemente fitte da poterle considerare come distribuite con continuità, in un tratto  $dx$  saranno contenute  $n dx$  spire, dove  $n$  rappresenta il numero di spire per unità di lunghezza,  $N/d$ . L'intensità del campo magnetico  $\vec{B}$  in un punto  $P$  situato sull'asse del solenoide (si veda la figura), si determina a partire dall'espressione (4.17) del campo prodotto da una singola spira percorsa da corrente:



$$dB = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} n dx . \tag{4.31}$$

Il vettore  $\vec{B}$  è parallelo all'asse del solenoide ed il suo verso è legato alla direzione della corrente dalla regola della mano destra. Con riferimento alla figura, risulta:

$$\begin{aligned} r \sin \phi &= R, \\ x - x_0 &= -\frac{R}{\tan \phi}, \end{aligned}$$

quindi:

$$dx = \frac{R}{\sin^2 \phi} d\phi$$

e, sostituendo nella (4.31), segue:

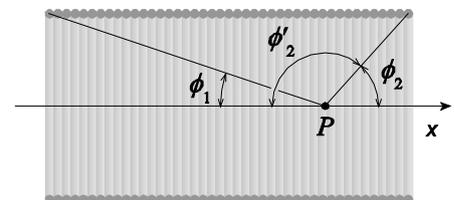
$$dB = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \frac{\sin^3 \phi}{R^3} \frac{R}{\sin^2 \phi} d\phi = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \phi d\phi .$$

L'intensità del campo magnetico nel punto  $P$  si ottiene sommando questa espressione per tutte le spire, ossia integrando la precedente espressione da  $\phi_1$  a  $\phi_2'$  (si veda la figura):

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2'} \sin \phi d\phi = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2');$$

posto infine  $\phi_2 \equiv \pi - \phi_2'$ , si ha:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \phi_1 + \cos \phi_2). \tag{4.32}$$



Riferendo l'ascissa  $x$  al centro del solenoide, risulta:

$$\cos \phi_1 = \frac{\frac{d}{2} + x}{r_1} = \frac{\frac{d}{2} + x}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2} + x\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}(d + 2x)}{\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + (d + 2x)^2}} = \frac{d + 2x}{\sqrt{4R^2 + (d + 2x)^2}},$$

$$\cos \phi_2 = \frac{\frac{d}{2} - x}{r_2} = \frac{\frac{d}{2} - x}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}(d - 2x)}{\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 + (d - 2x)^2}} = \frac{d - 2x}{\sqrt{4R^2 + (d - 2x)^2}},$$

così, sostituendo nella relazione (4.32), si ha:

$$B(x) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{d + 2x}{\sqrt{4R^2 + (d + 2x)^2}} + \frac{d - 2x}{\sqrt{4R^2 + (d - 2x)^2}} \right].$$

Da tale espressione segue che il campo magnetico assume la massima intensità al centro del solenoide, per  $x = 0$ , in cui si ha:

$$B(0) = \mu_0 n I \frac{d}{\sqrt{4R^2 + d^2}}, \tag{4.33}$$

mentre, in corrispondenza delle estremità:

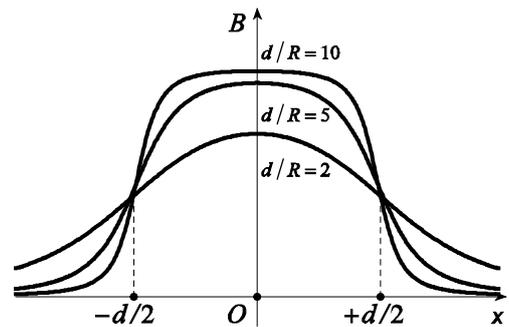
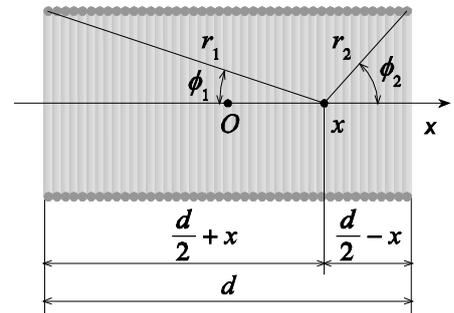
$$B\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}. \tag{4.34}$$

Se la lunghezza del solenoide è molto maggiore del raggio ( $d \gg R$ ), dalla relazione (4.33) segue:

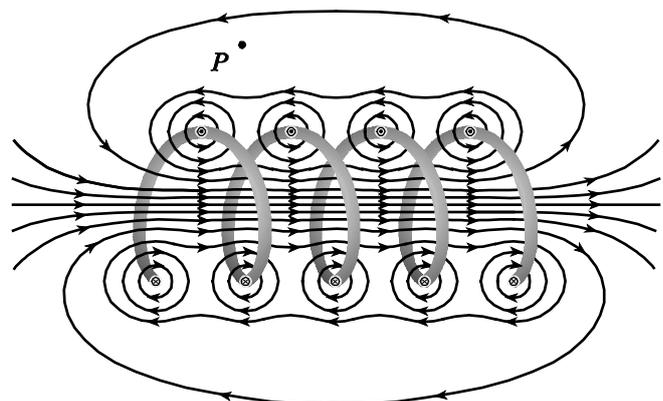
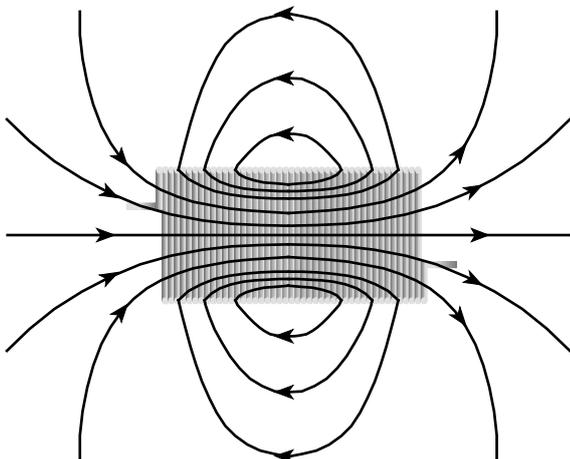
$$B(0) \approx \mu_0 n I \equiv B_\infty,$$

e in corrispondenza di uno degli estremi, dalla (4.34), si ha:

$$B\left(\frac{d}{2}\right) \approx \frac{\mu_0 n I}{2} = \frac{B_\infty}{2}.$$

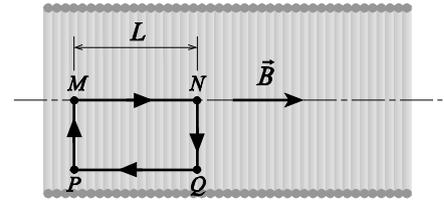


In figura è mostrato l'andamento delle linee di forza di  $\vec{B}$  attorno al solenoide. La zona in cui il campo magnetico ha un'intensità dell'ordine di  $B_\infty$  è piuttosto estesa e si espande col crescere del rapporto  $d/R$ . La variazione  $dB/dx$  è massima in corrispondenza delle estremità del solenoide. Infine, si può notare che il campo magnetico prodotto dal solenoide è simile a quello prodotto da un magnete permanente cilindrico. Con riferimento alla figura che riproduce un solenoide con spire non avvolte strettamente, si osserva che il campo magnetico all'interno è sostanzialmente uniforme, mentre all'esterno non è uniforme ed è poco intenso. Nel punto  $P$ , ad esempio, il campo risulta debole siccome il campo generato dalla parte superiore delle spire del solenoide è diretto verso sinistra e tende ad annullare il campo generato dalla parte inferiore delle spire, che è diretto verso destra. Se  $d/R \gg 1$ , a grande distanza dagli estremi del solenoide, il campo all'esterno può essere ritenuto nullo, mentre all'interno è uniforme. Consideriamo un solenoide infinito e



applichiamo la legge di Ampère al circuito  $MNQP$  di figura; nei tratti  $PM$  e  $NQ$  i vettori  $d\vec{l}$  e  $\vec{B}$  sono ortogonali, per cui il loro prodotto scalare è nullo mentre nei tratti  $MN$  e  $QP$  tali vettori sono paralleli e di verso opposto, pertanto:

$$\oint_{MNQP} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_M^N \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_Q^P \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(MN)L - B(QP)L,$$



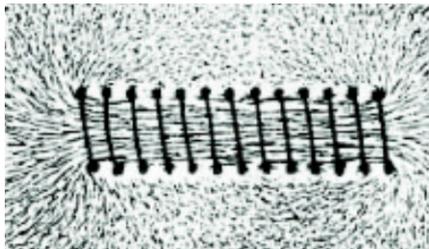
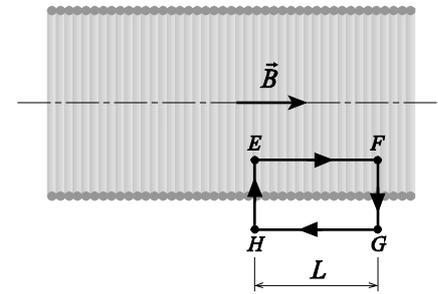
d'altra parte, siccome il percorso  $MNQP$  non concatena alcuna corrente, si ha:

$$\oint_{MNQP} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0,$$

così:

$$B(MN) = B(QP);$$

ciò prova l'uniformità del campo  $\vec{B}$  su di una sezione del solenoide infinito. Se applichiamo la legge di Ampère al percorso  $EFGH$  di figura, troviamo che il prodotto  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  è nullo nel tratto  $GH$  essendo  $\vec{B}$  nullo all'esterno del solenoide infinito; inoltre tale prodotto scalare è nullo nei tratti  $FG$  e  $HE$  dove  $B \neq 0$ , perché  $d\vec{l}$  e  $\vec{B}$  sono ortogonali, così:



Rappresentazione delle linee di forza del campo magnetico prodotto da un solenoide percorso da corrente.

$$\oint_{EFGH} \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 nLI,$$

dove  $nL$  è il numero di spire che tagliano la sezione del percorso considerato, pertanto:

$$B = \mu_0 nI,$$

come già provato per altra via.

## 4.7 Legge di Gauss per il magnetismo

Nel caso dell'elettrostatica, la legge di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa al cui interno vi è una carica è proporzionale alla carica stessa; ciò è equivalente ad affermare che il numero di linee di forza del campo elettrico che attraversano la superficie considerata è proporzionale alla carica. Tale proprietà deriva dal fatto che le linee di forza del campo elettrico hanno origine o termine in corrispondenza delle cariche. Nel caso del campo magnetico le linee di forza sono chiuse e quindi non hanno origine o fine in qualche punto. Pertanto, per ogni superficie chiusa, il numero di linee di forza che escono dalla superficie è uguale al numero di quelle che entrano, così:

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \tag{4.35}$$

dove  $S$  è una qualsiasi superficie chiusa. Applicando il teorema della divergenza all'espressione precedente, si trova:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{4.36}$$



Dispositivo per lo studio del campo magnetico prodotto da un solenoide percorso da corrente.

che rappresenta, puntualmente, il concetto che le linee di forza del campo magnetico non hanno origine o termine in corrispondenza di qualche sorgente.

La relazione (4.36) può essere dedotta analiticamente dalla legge di Biot-Savart (4.11). Applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri della (4.11), si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right); \quad (4.37)$$

sfruttando l'identità vettoriale  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{M} \times \vec{N}) = \vec{N} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) - \vec{M} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{N})$ , segue:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \right) = \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot (\vec{\nabla} \times d\vec{l}) - d\vec{l} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right).$$

Il primo termine di questa somma è nullo siccome le operazioni di derivazione contenute nell'operatore rotore sono intese rispetto alle coordinate del punto in cui si determina il campo magnetico; inoltre, siccome  $\hat{r}/r^2 = -\vec{\nabla}(1/r)$ , risulta:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = -\vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \right] = \vec{0},$$

così, essendo identicamente nulla la funzione integranda nella (4.37) segue la relazione (4.36). Il risultato indicato dalle relazioni (4.35) o (4.36) è conseguenza del fatto che non sono mai state osservate "cariche magnetiche" libere o *monopoli magnetici*, per cui la corrispondente densità  $\rho_m$  è nulla. L'esistenza di monopoli magnetici venne ipotizzata nel 1931 dal fisico inglese Paul Adrien Maurice Dirac nell'ambito di una teoria che giustifica la quantizzazione della carica elettrica, tuttavia i vari esperimenti volti alla ricerca di tali entità, anche facenti uso di differenti approcci, hanno posto solo dei limiti superiori al flusso di monopoli magnetici. Nel 2009 sono state osservate configurazioni monopolari all'interno di materiali cristallini a temperature prossime a 0 K; tuttavia, tali osservazioni non hanno verificato l'esistenza di particelle dotate di una carica magnetica netta ma strutture in cui due monopoli magnetici sono dotati di moto indipendente; tali strutture sono dette *quasi-particelle*. Sebbene il valore concettuale della scoperta di monopoli magnetici sia grande, dal punto di vista pratico è molto più piccolo e comporta, ad esempio, la modifica locale dell'equazione (4.36) come  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m$ .

## 4.8 Formulazione differenziale della legge di Ampère

Consideriamo la relazione (4.29) in cui  $S$  è una generica superficie che ha come contorno la curva chiusa  $\mathcal{C}$ :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s},$$

dove  $\vec{J}$  indica la densità della corrente che genera il campo magnetico  $\vec{B}$ . Applicando il teorema del rotore all'integrale al primo membro, si trova:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s},$$

ovvero:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s} = 0;$$

dovalere questa relazione per ogni dominio di integrazione  $S$ , si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (4.38)$$

Laddove  $\vec{J}$  è nullo, il campo  $\vec{B}$  è irrotazionale; quindi la relazione (4.38) stabilisce i punti dello spazio in cui  $\vec{B}$  risulta o no irrotazionale e, di conseguenza, l'assenza di correnti in quei punti. La relazione (4.38) è naturalmente compatibile con la condizione di stazionarietà, infatti, se  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , anche  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$ , essendo  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$  da assimilare al prodotto scalare tra due vettori perpendicolari.

Dalla relazione (4.21) segue che la forza agente su un dipolo magnetico  $\vec{m}$ , qualora sia immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$ , vale:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla} (-\vec{m} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}).$$

Questa espressione può risciversi nella forma<sup>7</sup>:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{m} + (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{m}) + \vec{m} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B});$$

siccome  $\vec{m}$  è indipendente dalle coordinate spaziali,  $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{m}$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{m}$  risultano entrambi pari al vettore nullo, pertanto:

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{m} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}).$$

In assenza di correnti e per campi statici  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ , per cui la forza agente su un dipolo magnetico può esprimersi come:

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}.$$

Pertanto, in analogia al caso elettrico, nelle circostanze descritte si origina una forza sul dipolo magnetico solo in presenza di un campo magnetico non uniforme.

## 4.9 Il potenziale vettore

Siccome il campo magnetico  $\vec{B}$  non è, in generale, irrotazionale, non è possibile introdurre una funzione scalare, analoga al potenziale elettrostatico, di cui  $\vec{B}$  ne è il gradiente. Tuttavia nel 1864 Maxwell, elaborando i lavori di Faraday sul campo magnetico, propose l'introduzione di un vettore  $\vec{A}$ , detto *potenziale vettore*, tale che:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.39)$$

<sup>7</sup> Si è fatto uso della relazione  $\vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{u}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ .

Così come il potenziale elettrostatico è noto a meno di una funzione indipendente dalle tre coordinate spaziali, il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di una generica funzione scalare  $\phi$ , detta *funzione di gauge*, che ammette derivate parziali almeno fino al secondo ordine; infatti, se consideriamo il vettore:

$$\vec{A}' \equiv \vec{A} + \vec{\nabla} \phi, \quad (4.40)$$

calcolandone il rotore, si ottiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

quindi il campo magnetico derivato da  $\vec{A}'$  coincide<sup>8</sup> con quello derivato da  $\vec{A}$ . Calcolando la divergenza di  $\vec{A}'$  risulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \phi;$$

alla luce dell'arbitrarietà della funzione  $\phi$ , qualora la si scelga in modo da soddisfare l'identità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \phi = 0, \quad (4.41)$$

risulta  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = 0$ . In pratica, se in corrispondenza di un certo potenziale vettore  $\vec{A}$  si sceglie la funzione  $\phi$  in modo da soddisfare l'identità (4.41), il potenziale vettore  $\vec{A}'$  espresso dalla relazione (4.40) è caratterizzato dall'aver divergenza nulla. Da questo punto, a meno che non sia diversamente specificato, assumeremo che il potenziale vettore  $\vec{A}$  sia caratterizzato dall'aver divergenza nulla<sup>9</sup>, pertanto la definizione completa di tale vettore sarà:

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \end{cases}$$

Facendo uso di tali relazioni è possibile scrivere per il potenziale vettore un'espressione analoga all'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico (1.25); infatti, calcolando il rotore di  $\vec{B}$  espresso in termini di  $\vec{A}$ , risulta<sup>10</sup>:

<sup>8</sup> L'espressione indicata dalla (4.40), che trasforma il potenziale vettore da  $\vec{A}$  ad  $\vec{A}'$ , in cui  $\vec{A}'$  differisce da  $\vec{A}$  per il termine  $\vec{\nabla} \phi$ , è detta *trasformazione di gauge*. Siccome il campo magnetico non cambia in seguito a tale trasformazione, si dice che tale campo gode di invarianza per trasformazioni di gauge. Il termine gauge fu introdotto nel 1918 dal fisico tedesco Hermann Weyl quando, nel tentativo di includere in una stessa teoria la gravitazione e l'elettromagnetismo ipotizzò che l'*Eichinvarianz*, o invarianza per cambiamento di scala, *gauge* in inglese, potesse essere una proprietà della teoria della relatività; i successivi sviluppi di tale ipotesi condussero a risultati fisicamente errati. La denominazione è tuttavia restata ed in generale indica trasformazioni che coinvolgono funzioni arbitrarie; si definiscono *teorie di gauge* la classe di teorie fisiche di campo che descrivono sistemi le cui equazioni descrittive godono della proprietà di invarianza per trasformazioni di gauge.

<sup>9</sup> Tale condizione è detta *gauge di Coulomb*.

<sup>10</sup> L'espressione  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ , deriva dall'identità vettoriale  $\vec{M} \times (\vec{N} \times \vec{P}) = (\vec{M} \cdot \vec{P}) \vec{N} - (\vec{M} \cdot \vec{N}) \vec{P}$ , in cui l'operatore  $\vec{\nabla}$  è trattato come un vettore. L'applicazione dell'operatore  $\nabla^2$  ad un vettore corrisponde all'applicazione dello stesso operatore a ciascuna componente del vettore.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J},$$

ma siccome  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , si ha<sup>11</sup>:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (4.42)$$

Sfruttando l'identità  $\vec{\nabla} (1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = -(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ , dalla (4.14) segue:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \left[ -\vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dv' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dv'; \end{aligned}$$

d'altra parte, risulta:

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}') = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}')$$

in cui  $\vec{\nabla} \times \vec{J}(\vec{r}')$  è nullo poiché  $\vec{J}$  è funzione dei punti della distribuzione di corrente mentre il rotore opera sui punti in cui è determinato il campo magnetico. Pertanto, sostituendo nella precedente espressione, si ha:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' = \vec{\nabla} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right],$$

siccome l'integrazione è fatta su  $dv'$  mentre il rotore opera su  $\vec{r}$ ; quindi, confrontando tale relazione con la (4.39) segue:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'. \quad (4.43)$$

Se il volume di integrazione è costituito da un filo percorso da una corrente  $I$  pari a  $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ ,

l'espressione precedente diviene:

---

<sup>11</sup> La relazione (4.42) sintetizza tre relazioni scalari che ad esempio, in coordinate cartesiane, si esprimono come:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z, \end{cases}$$

in cui i vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{J}$  valgono, rispettivamente,  $A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$  e  $J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z}$ .

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J} dv}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \left( \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{s} \right) \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} I \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{d\vec{l}}{r}, \quad (4.44)$$

dove l'integrale è esteso al circuito  $\mathcal{L}$  attraversato dalla corrente. Analogamente è possibile provare che per una corrente che scorre su una superficie  $\mathcal{S}$  con densità lineare  $\vec{J}_S$ , il corrispondente potenziale vettore vale:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\vec{J}_S ds}{r}.$$

Le dimensioni del potenziale vettore si deducono immediatamente dalla definizione (4.39) e sono  $T \cdot m$ .

Si osservi che la relazione (4.43) poteva essere dedotta per analogia delle equazioni soddisfatte dalle componenti del potenziale vettore (4.42) con l'equazione di Poisson  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ , la cui soluzione è  $[1/(4\pi\epsilon_0)] \int_{\mathcal{V}} \rho dv/r$ ; pertanto la

soluzione di  $\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$  è:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{J_x dv}{r},$$

la soluzione di  $\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$  è:

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{J_y dv}{r},$$

e la soluzione di  $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$  è:

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{J_z dv}{r}.$$

Infine, moltiplicando ciascuna delle precedenti espressioni per il vettore corrispondente e sommando membro a membro, si ottiene la relazione (4.43)

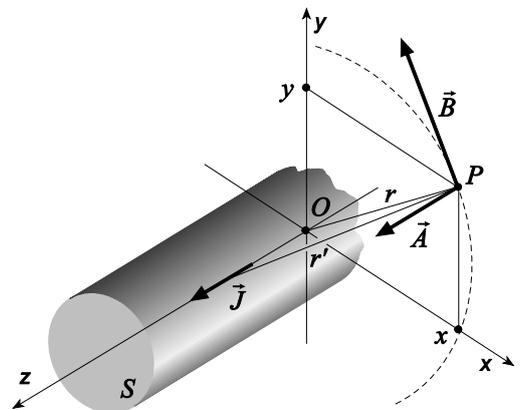
**Esempio:** (Potenziale vettore prodotto da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente) Consideriamo un filo rettilineo di sezione  $S$  percorso da una corrente  $I$ . Il vettore densità di corrente è ovunque nullo, esclusa la regione del filo dove vale:

$$\vec{J} = \frac{I}{S} \hat{z}. \quad (4.45)$$

Dalla (4.43) il potenziale vettore in un punto  $P$  posto alla distanza  $r$  dal filo (si veda la figura) è dato dalla relazione:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J} dv}{r'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi S} \int_{\mathcal{V}} \frac{dv}{r'} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi S} \int_{\mathcal{L}} \frac{S dl}{r'} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{dl}{r'} \hat{z},$$

dove  $r'$  indica la distanza dal punto  $P$  dell'elemento  $dv$ ; il dominio di integrazione è rappresentato da tutta la lunghezza del filo. Assumendo per semplicità che la sezione del filo sia trascurabile, il contributo a tale calcolo, per un filo esteso tra i punti  $-L$  e  $L$  vale:



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{r'} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \hat{z} \ln \left( \frac{L + \sqrt{r^2 + L^2}}{-L + \sqrt{r^2 + L^2}} \right).$$

Tale espressione rappresenta il valore del potenziale vettore nel punto considerato prodotto dal passaggio della corrente  $I$  attraverso un filo rettilineo di lunghezza finita. Se la lunghezza  $L$  viene fatta tendere all'infinito il risultato diverge. Per risolvere il problema si può procedere per analogia col caso elettrico; il campo elettrico prodotto da una distribuzione rettilinea di carica di densità  $\lambda$  in un punto  $P$  posto alla distanza  $r$  dalla distribuzione è dato dalla (1.10) e vale:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r},$$

dove  $\hat{r}$  è un versore perpendicolare alla distribuzione e orientato verso il punto considerato; il relativo potenziale, in tale punto, vale:

$$V = -\int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}' = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right),$$

in cui  $Q$  indica il punto rispetto al quale si calcola il potenziale. Se la distribuzione rettilinea ha una sezione  $S$ , la densità di carica lineare  $\lambda$  può esprimersi attraverso la densità volumetrica  $\rho$  come  $\rho S$ , per cui il potenziale nel punto considerato si scrive come:

$$V = -\frac{\rho S}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right).$$

Tale funzione è soluzione dell'equazione di Poisson  $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$  che è analoga all'equazione  $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$  soddisfatta dalla componente  $A_z$  del potenziale vettore; pertanto, questa componente deve valere:

$$A_z = -\frac{\mu_0 J S}{2\pi} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right).$$

Per verificare che tale risultato è consistente con la definizione (4.39) stabiliamo il valore del campo magnetico a partire dal risultato conseguito. Dalla (4.39), esprimendo il rotore in coordinate cilindriche (si veda l'appendice) si ottiene:

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} = 0, \\ B_\phi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \\ B_z &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] = 0, \end{aligned}$$

per cui il modulo del campo magnetico alla distanza  $r$  dal filo vale:

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\phi^2 + B_z^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

come quanto già stabilito in precedenza. Un approccio alternativo a questa determinazione consiste nel partire dall'espressione del campo magnetico generato dalla distribuzione di corrente e dedurre il potenziale vettore dalla applicazione della (4.39). Esprimendo  $\vec{A}$  in coordinate cilindriche, dalla (4.45) segue per tale vettore le componenti  $A_r$  e  $A_\phi$  sono nulle e siccome il campo magnetico è diretto come  $\hat{\phi}$ , la (4.39) si esprime come:

$$\vec{B} = B \hat{\phi} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \hat{\phi},$$

cioè

$$B = -\frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Indicando con  $R$  il raggio del filo conduttore, per  $r < R$ , dalle (4.30) segue:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r = -\frac{\partial A_z}{\partial r},$$

per cui integrando si trova:

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{\pi R^2} r^2 + c_1,$$

in cui  $c_1$  è una costante di integrazione. Per  $r \geq R$ , dalle (4.30) segue:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

e integrando si ha:

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{c_2}\right),$$

in cui  $c_2$  è una costante di integrazione

**Esempio:** (Potenziale vettore prodotto da una spira percorsa da corrente)  
Consideriamo una spira  $\mathcal{C}$  percorsa dalla corrente  $I$  disposta sul piano  $xy$  del sistema di riferimento di figura, col centro coincidente con l'origine degli assi. La relazione (4.44) nel sistema considerato diventa:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

L'identità<sup>12</sup>

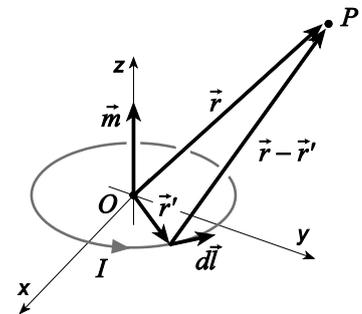
$$\oint_{\mathcal{C}} \psi d\vec{l} = \int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla} \psi,$$

in cui la linea chiusa  $\mathcal{C}$  indica il contorno della superficie  $S$ , per  $\psi$  pari a  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ , consente di esprimere la relazione precedente come:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\vec{S} \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{S} \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right),$$

dove si è approssimato l'integrale come il prodotto della funzione integranda per la superficie  $\vec{S}$ . D'altra parte, utilizzando l'identità  $(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \vec{\nabla}'(1/|\vec{r} - \vec{r}'|)$ , la relazione precedente diventa:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{S} \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{S} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (4.46)$$



<sup>12</sup> Si veda l'Appendice B per una sua dimostrazione

essendo  $\vec{m}$ , pari a  $I\vec{S}$ , il momento magnetico della spira. Infine, a grande distanza dalla spira, per  $r' \ll r$ , risulta:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

A partire da tale espressione è possibile stabilire la relazione generale che esprime il campo magnetico asintotico prodotto dal momento magnetico  $\vec{m}$ . Supponendo che il vettore  $\vec{m}$  sia orientato come mostrato nella figura precedente, il prodotto  $\vec{m} \times \vec{r}$  può essere espresso come:

$$\vec{m} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & m \\ x & y & z \end{vmatrix} = -my \hat{x} + mx \hat{y},$$

pertanto, dalla (4.39) segue:

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left( -\frac{my}{r^3} \hat{x} + \frac{mx}{r^3} \hat{y} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{my}{r^3} & \frac{mx}{r^3} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[ \frac{3xz}{r^5} \hat{x} + \frac{3yz}{r^5} \hat{y} + \left( \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right) \hat{z} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]. \end{aligned}$$

Tale relazione, per  $\vec{r} = z\hat{z}$  coincide con la (4.20), infatti:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ 3 \frac{(m\hat{z}) \cdot (z\hat{z})}{z^5} (z\hat{z}) - \frac{m\hat{z}}{z^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 3 \frac{m\hat{z}}{z^3} - \frac{m\hat{z}}{z^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m\hat{z}}{z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{z^3}.$$

## 4.10 Equazioni di Maxwell per il campo magnetico statico nel vuoto

Assegnata una certa distribuzione di corrente stazionaria, descritta attraverso il vettore densità di corrente  $\vec{J}$ , nel vuoto il campo magnetico statico  $\vec{B}$  soddisfa le relazioni (4.29) e (4.35):

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}, \\ \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= 0; \end{aligned}$$

nella prima equazione  $\mathcal{C}$  è una generica curva chiusa e  $S$  è una superficie che ha la curva  $\mathcal{C}$  come contorno, la cui normale è orientata in relazione al verso di percorrenza di  $\mathcal{C}$  secondo la regola della mano destra; nella seconda equazione  $S'$  è una generica superficie chiusa. In forma locale tali equazioni si scrivono:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Queste relazioni prendono il nome di *equazioni di Maxwell per il campo magnetico statico nel vuoto*. Con l'introduzione del potenziale vettore, il campo magnetico può essere espresso come:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Assumendo che risulti  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , condizione che non influenza la relazione precedente, le componenti del potenziale vettore soddisfano l'equazione di Poisson, ovvero:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J},$$

che, in assenza di corrente diventa analoga all'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \vec{A} = \vec{0}.$$