10 RELATIVITÀ

Dall'esigenza di mantenere la consistenza tra le osservazioni in due sistemi di riferimento, uno in moto uniforme rispetto all'altro, nell'ipotesi di invarianza della carica per cambiamento di sistema di riferimento[1], abbiamo dedotto nel par. 4.4 che le lunghezze, nella direzione del moto, di sbarrette in moto rettilineo uniforme con velocità v, fossero inferiori di un fattore γ pari a $\sqrt{1-v^2/c^2}$ rispetto alle stesse lunghezze a riposo; analogamente abbiamo ricavato che intervalli di tempo misurati da osservatori in moto rettilineo uniforme risultano superiori di uno stesso fattore γ rispetto agli stessi intervalli rilevati da osservatori in quiete. Questo risultato è in evidente contrasto con le relazioni di trasformazione di Galilei:

$$x' = x - vt\,, \tag{10.1}$$
$$y' = y\,, \tag{10.2}$$
$$z' = z\,, \tag{10.3}$$
$$t' = t\,, \tag{10.4}$$

secondo cui lunghezze e intervalli di tempo non cambiano in corrispondenza di cambiamenti di sistema di riferimento. Se si adoperano queste formule di trasformazione nella seconda legge di Newton si trova che tale legge si trasforma in una identica legge nel sistema in moto rettilineo uniforme cioè la seconda legge di Newton non modifica la sua espressione nel cambiamento di sistema di riferimento e, di conseguenza, non è possibile constatare il moto rettilineo uniforme attraverso un esperimento di meccanica. Questa proprietà della seconda legge di Newton è detta di *covarianza* rispetto alla trasformazione di Galileo. Da tale considerazione segue il principio di relatività galileiano secondo il quale "i moti dei corpi in un dato spazio sono gli stessi fra loro, sia che lo spazio sia in quiete che si muova uniformemente in linea retta". Le equazioni di Maxwell tuttavia non obbediscono al principio di relatività testé enunciato e ciò determina un'asimmetria tra i fenomeni meccanici e quelli elettromagnetici.

Esempio: Verifichiamo che le equazioni di Maxwell non sono invariati per una trasformazione di Galilei. Consideriamo allo scopo le equazioni:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$

che assumono la stessa forma nel vuoto e nei mezzi materiali, non contenendo le sorgenti ρ e $\vec{J}$ e pertanto sono più semplici da manipolare. A tali equazioni corrispondono le equazioni scalari:

---

[1] L'invarianza della carica quando si passa da un sistema di riferimento ad un altro in moto rettilineo uniforme rispetto al primo è un risultato sperimentale. Consideriamo un materiale conduttore originariamente scarico e i cui portatori di carica siano costituiti da cariche negative, gli elettroni, e positive, ad esempio degli ioni del materiale. Siccome gli elettroni posseggono una massa sostanzialmente diversa da quella degli ioni, a seguito del riscaldamento la loro velocità cambierà in modo diverso da quella degli ioni. Se la carica dipendesse dalle velocità relative, le cariche degli elettroni e quelle degli ioni, a seguito del riscaldamento, non risulterebbero più bilanciate e il corpo acquisirebbe una carica netta diversa da zero. Siccome nessun fenomeno di questo tipo è stato mai osservato si conclude che la carica elettrica di una particella è una quantità che non dipende dalla velocità della particella rispetto all'osservatore.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}, \tag{10.5}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}, \tag{10.6}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}, \tag{10.7}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0. \tag{10.8}$$

Dalle espressioni della trasformazione di Galileo ricaviamo le seguenti regole di derivazione:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial z'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t'}.$$

Applicando tali regole alle equazioni (10.5) si ha:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\frac{1}{v}\frac{\partial E_z}{\partial t'}=-\frac{\partial B_y}{\partial t'}; \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial E_z}{\partial x'}=-\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_y+\frac{1}{v}E_z\right);$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'}+\frac{1}{v}\frac{\partial E_y}{\partial t'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\frac{\partial B_z}{\partial t'}; \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\frac{\partial}{\partial t'}\left(B_z+\frac{1}{v}E_y\right);$$

queste equazioni sono esprimibili nella forma:

$$\vec{\nabla}'\times\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'},$$

cioè come:

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial z'}=-\frac{\partial B_x'}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial E_x'}{\partial z'}-\frac{\partial E_z'}{\partial x'}=-\frac{\partial B_y'}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial E_x'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial x'}=-\frac{\partial B_z'}{\partial t'},$$

se risulta:

$$E_x'=E_x; \qquad B_x'=B_x;$$

$$E_y'=E_y; \qquad B_y'=B_y+\frac{1}{v}E_z;$$

$$E_z'=E_z; \qquad B_z'=B_z+\frac{1}{v}E_y.$$

D'altra parte, siccome da tali equazioni segue:

$$B_y = B'_y - \frac{1}{v} E_z,$$
$$B_z = B'_z - \frac{1}{v} E_y,$$

la (10.8) diventa:

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} - \frac{1}{v}\frac{\partial B'_x}{\partial t'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} - \frac{1}{v}\frac{\partial E'_z}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} - \frac{1}{v}\frac{\partial E'_y}{\partial z'} = 0,$$
$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial B'_x}{\partial t'} + \frac{\partial E'_z}{\partial y'} + \frac{\partial E'_y}{\partial z'}\right).$$

Siccome il secondo membro di tale espressione in generale è diverso da zero, ne segue che:

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' \neq 0,$$

cioè tale equazione non può essere ricondotta alla forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

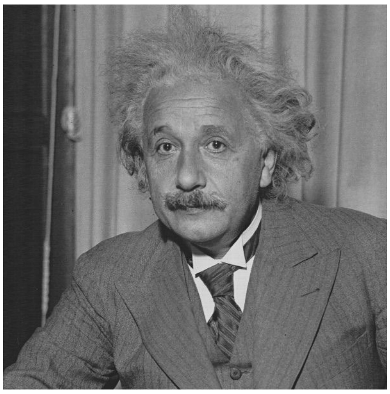
10.1 Trasformazioni di Lorentz

Il fatto che le leggi dell'elettromagnetismo non soddisfino il principio di relatività galileiano suggerisce che, mentre per la meccanica tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro sono equivalenti, per l'elettromagnetismo esiste un sistema di riferimento privilegiato, detto *etere*, in cui le equazioni di Maxwell assumono la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}.$$

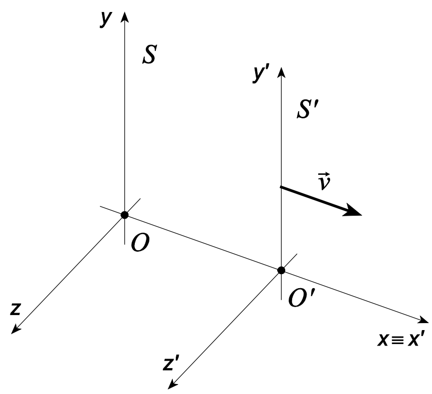
Inoltre deve essere possibile misurare la velocità di un qualsiasi corpo rispetto a tale sistema di riferimento privilegiato. Tuttavia i tentativi di stabilire la velocità della Terra rispetto all'etere fornirono dei risultati negativi, a dispetto dei raffinati approcci sperimentali seguiti. Inoltre, tutte le proposte per spiegare il risultato negativo di tali misure si rivelarono largamente inadeguate.

Nel 1905 Albert Einstein, partendo da tali risultati negativi postulò la non esistenza dell'etere e generalizzò il principio di relatività galileiano, affermando che tutte le leggi della fisica, cioè sia quelle della meccanica che quelle dell'elettromagnetismo, devono risultare covarianti in corrispondenza del passaggio da un sistema di riferimento ad un altro in moto relativo uniforme rispetto al primo (*principio di relatività di Einstein*). Siccome le leggi dell'elettromagnetismo non sono covarianti in corrispondenza delle trasformazioni di Galileo, se si accetta il postulato di Einstein occorre o modificare le leggi dell'elettromagnetismo oppure modificare le trasformazioni di Galileo. I tentativi di modificare le leggi dell'elettromagnetismo in modo tale che per trasformazioni di



Albert Einstein

Galileo il principio di relatività fosse soddisfatto fallirono poiché le nuove espressioni delle equazioni di Maxwell portarono a previsioni in disaccordo con gli esperimenti. Questo indicò che le leggi dell'elettromagnetismo dovevano ritenersi corrette e pertanto non si poteva far altro che modificare le trasformazioni di Galileo.



Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' con gli assi x e x' coincidenti e gli altri assi a due a due paralleli, con S' in moto rettilineo uniforme rispetto a S con velocità $\vec{v}$ diretta lungo l'asse x ($\vec{v} = v\hat{x}$) e tali che le origini O e O' coincidano all'istante iniziale in cui coincidono i tempi misurati nei due sistemi di riferimento. Con riferimento a tale circostanza, nel 1904 Lorentz aveva osservato che le equazioni di Maxwell risultano covarianti in corrispondenza della trasformazione di coordinate, nota come *trasformazione di Lorentz*:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{10.9}$$

$$y' = y, \tag{10.10}$$

$$z' = z, \tag{10.11}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10.12}$$

Esempio: Per verificare la covarianza delle equazioni di Maxwell in corrispondenza dell'applicazione della trasformazione di Lorentz, stabiliamo inizialmente le regole di calcolo delle derivate. Allo scopo, posto:

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \tag{10.13}$$

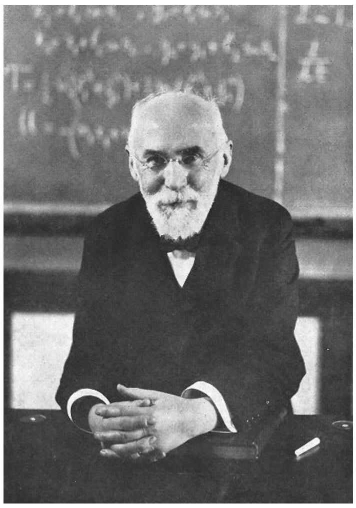
e

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

riscriviamo le formule della trasformazione di Lorentz come:

$$x' = \gamma(x - vt),$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right);$$

allora risulta:



Hendrik Antoon Lorentz

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}=\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t'},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial y'},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial x'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial z'},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial y'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y'}+\frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=\gamma\frac{\partial}{\partial t'}-\gamma v\frac{\partial}{\partial x'}.$$

Applicando tali regole alle equazioni (10.6) e (10.7) si ottiene:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x'}+\gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t'}=-\gamma\frac{\partial B_y}{\partial t'}+\gamma v\frac{\partial B_y}{\partial x'};$$
$$\gamma\frac{\partial E_y}{\partial x'}-\gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t'}-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\gamma\frac{\partial B_z}{\partial t'}+\gamma v\frac{\partial B_z}{\partial x'};$$

da cui segue:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma\left(E_z+vB_y\right)\right]=-\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_y+\frac{\beta}{c}E_z\right)\right];$$
$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\gamma\left(E_y-vB_z\right)\right]-\frac{\partial E_x}{\partial y'}=-\frac{\partial}{\partial t'}\left[\gamma\left(B_z-\frac{\beta}{c}E_y\right)\right].$$

Queste equazioni si riconducono a quelle relative al sistema in quiete, se:

$$E'_x=E_x;$$
$$E'_y=\gamma\left(E_y-vB_z\right);\qquad B'_y=\gamma\left(B_y+\frac{\beta}{c}E_z\right);$$
$$E'_z=\gamma\left(E_z+vB_y\right);\qquad B'_z=\gamma\left(B_z-\frac{\beta}{c}E_y\right).$$

Ricavando E_y e E_z da tali equazioni e sostituendo nella (10.5) e adoperando inoltre le regole di calcolo delle derivate, si trova:

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\gamma E'_z-\gamma vB'_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(\gamma E'_y+\gamma vB'_z\right)=-\gamma\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\gamma v\frac{\partial B_x}{\partial x'},$$

da cui segue:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}=v\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'}\right).\tag{10.14}$$

Procedendo in maniera analogo per l'equazione (10.8) si ottiene:

$$\gamma\frac{\partial B_x}{\partial x'}-\gamma\frac{\beta}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\gamma B'_y-\gamma\frac{\beta}{c}E'_z\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\gamma B'_z+\frac{\beta}{c}E'_y\right)=0,$$

da cui segue:

$$\frac{c}{\beta}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'}\right)=\frac{\partial E'_z}{\partial y'}-\frac{\partial E'_y}{\partial z'}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}.$$

Sostituendo in questa equazione la (10.14), si ottiene:

$$\left(\frac{c}{\beta}-v\right)\left(\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'}\right)=0\,,$$

da cui segue:

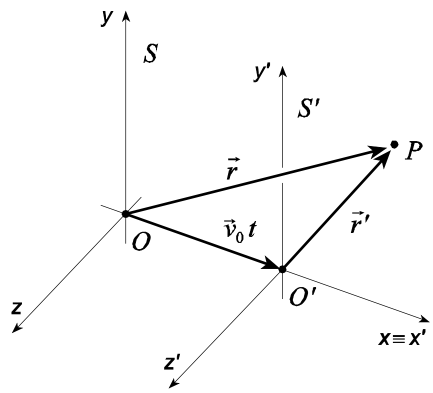
$$\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B'_y}{\partial y'}+\frac{\partial B'_z}{\partial z'}=0\,,$$

che si riconduce a quella relativa al sistema in quiete se:

$$B'_x = B_x\,,$$

soddisfacendo contemporaneamente anche l'equazione $\partial E'_z/\partial y' - \partial E'_y/\partial z' = -\partial B'_x/\partial t'$.

La constatazione che le equazioni di Maxwell modificano la propria espressione a seguito di una trasformazione di Galileo suggerì ad Einstein di rigettare queste trasformazioni ed accettare in loro luogo quelle di Lorentz, per le quali le equazioni di Maxwell sono covarianti. Einstein mise in luce che, sebbene le trasformazioni di Galileo apparissero ovvie e naturali, esse sottintendevano un'ipotesi a priori. Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S' con gli assi x e x' coincidenti e gli altri assi a due a due paralleli, in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Se O e O' sono le rispettive origini e $\vec{v}_0$ è la velocità di O' rispetto a O, per un generico punto P risulta:



$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}\,,$$

ovvero, se $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ è il raggio vettore di P in S e $\vec{r}' \equiv \overrightarrow{O'P}$ è il raggio vettore di P in S' e $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}_0 t$ è il raggio vettore di O' in S, si ha:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t\,.$$

Tale passaggio risulterebbe ovvio se i tre vettori $\vec{r}$, $\vec{r}'$ e $\vec{v}_0 t$ fossero tutti misurati in S, tuttavia siccome $\vec{r}'$ è misurato in S', il passaggio precedente è giustificato solo se gli intervalli temporali e le distanze spaziali sono gli stessi in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Questa ipotesi appare naturale essendo confermata dall'esperienza quotidiana, ma tale ambito di osservazione comporta velocità piccole rispetto a quella della luce, per cui è possibile unicamente affermare che tale ipotesi è vera limitatamente a quelle velocità.

Oltre al principio di relatività generalizzato ai fenomeni elettromagnetici, Einstein propose di escludere l'ipotesi precedente sostituendola con un'altra, confermata dagli esperimenti, secondo cui la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Tale ipotesi è incompatibile con l'identità degli intervalli temporali e delle distanze spaziali nei due sistemi. Infatti, se consideriamo una sorgente posta in un punto A che al tempo $t=0$ emette un impulso luminoso parallelamente alla direzione del moto con velocità c, se A è il punto medio tra B e C solidali con S, l'impulso giunge simultaneamente ($t_B = t_C$) in tali punti. Se invece A, B e C sono solidali con S', per un osservatore in tale sistema l'uguaglianza $c' = c$ è incompatibile con il fatto che le distanze AC e AB siano uguali e $t'_B = t'_C$.

Le trasformazioni di Lorentz soddisfano, come verificato, la prima delle ipotesi sulle quali si basa la teoria della relatività di Einstein, cioè il principio di relatività generalizzato ai fenomeni elettromagnetici; pertanto, resta da verificare che attraverso tali trasformazioni la velocità della luce risulti invariante quando si passa da un sistema di riferimento in quiete ad uno in moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

Qualora la velocità $\vec{v}$ di S' rispetto a S non sia diretta lungo gli assi x e x' coincidenti, sebbene gli altri assi si mantengano mutuamente paralleli, scomponendo il vettore posizione

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

nelle direzioni parallela e perpendicolare a quella della velocità $\vec{v}$, risulta:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} .$$

In particolare, posto

$$\hat{v} \equiv \frac{\vec{v}}{v}$$

il versore associato a $\vec{v}$, la componente di $\vec{r}$ parallela alla direzione di $\vec{v}$ può esprimersi come:

$$\vec{r}_{\parallel} = (\vec{r} \cdot \hat{v})\,\hat{v} = \frac{\vec{r} \cdot \hat{v}}{v^2}\vec{v} .$$

Dalle trasformazioni di Lorentz (10.10) e (10.11) segue che la componente di $\vec{r}$ perpendicolare alla direzione del moto resta invariata:

$$\vec{r}_{\perp}' = \vec{r}_{\perp}$$

mentre quella parallela alla direzione del moto si trasforma secondo la (10.9)

10.2 Formule di trasformazione della velocità

Indicando con $\vec{v}_0$ la velocità di traslazione del sistema S rispetto a S', differenziando le espressioni della trasformazione di Lorentz, si ottiene:

$$dx' = \gamma\left(dx - v_0 dt\right), \tag{10.15}$$

$$dy' = dy , \tag{10.16}$$

$$dz' = dz , \tag{10.17}$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{\beta_0}{c}dx\right), \tag{10.18}$$

dove β_0 vale v_0/c. Dividendo membro a membro le (10.15), (10.16) e (10.17) per la (10.18), si ottiene:

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\left(dx - v_0 dt\right)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta_0}{c}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v_0}{1 - \frac{\beta_0}{c}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{\beta_0}{c}v_x} , \tag{10.19}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{\beta_0}{c}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta_0}{c}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta_0}{c}v_x\right)}, \tag{10.20}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{\beta_0}{c}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta_0}{c}v_x\right)} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{\beta_0}{c}v_x\right)}, \tag{10.21}$$

essendo dx/dt, dy/dt e dz/dt pari, rispettivamente, a v_x, v_y e v_z. Queste relazioni rappresentano le formule di trasformazione relativistiche della velocità. Si noti che nell'approssimazione $v_0 \ll c$, siccome $\beta_0 \ll 1$, tali relazioni diventano uguali a le corrispondenti trasformazioni classiche della velocità $v'_x \approx v_x - v_0$, $v'_y = v_y$ e $v'_z \approx v_z$.

Esempio: Per verificare che la trasformazione di Lorentz lascia invariata la velocità della luce consideriamo un impulso luminoso in moto lungo l'asse x. Nel sistema di riferimento S, in quiete, la sua velocità vale:

$$\vec{v} = c\,\hat{x};$$

la velocità nel sistema di riferimento S' in moto traslatorio uniforme lungo l'asse x è pertanto:

$$c' = \frac{c - v_0}{1 - \frac{\beta_0}{c}c} = \frac{c - v_0}{1 - \frac{v_0}{c}} = \frac{c - v_0}{\frac{1}{c}(c - v_0)} = c.$$

Quindi, in accordo con l'ipotesi formulata da Einstein, la velocità della luce risulta indipendente dal sistema di riferimento considerato.

Esempio: Per stabilire le formule di trasformazione inversa, consideriamo la relazione (10.19) ed esprimiamo v_x attraverso v'_x; moltiplicando ambo i membri della (10.19) per il termine $1 - v_x\beta_0/c$ si ottiene:

$$v'_x - \frac{\beta_0}{c}v'_x v_x = v_x - v_0,$$

ovvero:

$$v_x\left(1 + \frac{\beta_0}{c}v'\right) = v'_x + v_0,$$

da cui segue:

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{\left(1 + \frac{\beta_0}{c}v'_x\right)}. \tag{10.22}$$

Analogamente si trovano le altre espressioni della trasformazione inversa:

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{\beta_0}{c}v'_x\right)},$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1+\frac{\beta_0}{c}v'_x\right)},$$

cioè tali relazioni si deducono dalle relazioni dirette sostituendo, formalmente $-v_0$ in luogo di v_0.

10.3 Conseguenze cinematiche della trasformazione di Lorentz

Consideriamo due eventi *A* e *B* che hanno luogo simultaneamente all'istante iniziale nel sistema *S* in quiete ($t_A = t_B = 0$) e supponiamo, per comodità, che l'evento *A* accada nell'origine del sistema di riferimento *S* ($x_A = y_A = z_A = 0$) e che l'evento *B* accada in un punto di coordinate $\left(x_B \quad y_B \quad z_B\right)$. Stabiliamo attraverso le trasformazioni di Lorentz gli istanti t'_A e t'_B in corrispondenza dei quali tali eventi sono osservati nel sistema S' in moto rettilineo uniforme rispetto a *S*. Applicando la (10.12) si ha:

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{\beta}{c}x_A\right) = 0,$$
$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{\beta}{c}x_B\right) = -\gamma\frac{\beta}{c}x_B.$$

Quindi $t'_A \neq t'_B$ ovvero, a meno che non si verifichino nello stesso punto (cioè non risulti $x_A = x_B$), eventi che per un osservatore solidale ad *S* risultano simultanei, non lo sono per un osservatore solidale a S'.

Consideriamo due eventi *A* e *B* non simultanei in *S*, per esempio assumiamo che *B* segue *A* (cioè $t_B > t_A$), che, per semplicità, supponiamo si manifestino entrambi sull'asse *x*. Ci proponiamo di verificare se è possibile identificare un sistema di riferimento s' tale che l'ordine di progressione di questi eventi risulti invertito (cioè $t'_B < t'_A$). Dalla (10.12) si ha, in generale:

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{\beta}{c}x_A\right),$$
$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{\beta}{c}x_B\right);$$

Imponiamo quindi che risulti $t'_B < t'_A$:

$$t_B - \frac{\beta}{c}x_B < t_A - \frac{\beta}{c}x_A,$$

cioè:

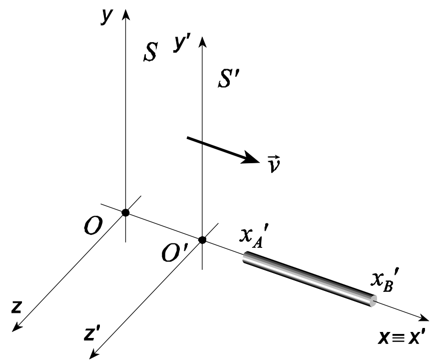
$$t_B - t_A < \beta\frac{x_B - x_A}{c} = \beta T_{AB},$$

dove T_{AB} rappresenta il tempo che impiega un impulso luminoso per percorrere la distanza $x_B - x_A$. Siccome $|\beta| < 1$, dalla relazione precedente si ha:

$$t_B - t_A < T_{AB},$$

ovvero si avrebbe $t'_B < t'_A$ solo se il tempo che intercorre tra gli eventi *A* e *B* in *S* è inferiore al tempo di propagazione della luce tra i punti x_A e x_B. D'altra parte, richiedere che $t'_B < t'_A$ comporta una violazione del principio di causa ed effetto, così, per impedire tale violazione necessariamente nessun agente fisico può propagarsi con velocità maggiore di quella della luce.

Supponiamo che due osservatori, rispettivamente solidali con *S* e S' vogliano stabilire la lunghezza di una sbarra rigida disposta parallelamente all'asse *x*, comune tra *S* e S', e in quiete rispetto al sistema di riferimento in moto S'. A tale scopo, l'osservatore in *S*, rispetto al quale la sbarra si muove con velocità $\vec{v}$, dovrà, in un certo istante, segnare simultaneamente le posizioni x_A e x_B degli estremi della sbarra, e, successivamente misurarne la distanza. Siano *A* e *B* i due eventi rappresentati dal tracciamento degli estremi della sbarra da parte dell'osservatore in *S* e supponiamo che entrambi avvengano all'istante iniziale per *S* (cioè $t_A = t_B = 0$). La lunghezza *l* della sbarra misurata in *S* sarà:



$$l = x_B - x_A.$$

Invece, per l'osservatore solidale con S' la lunghezza l' della sbarra sarà:

$$l' = x'_B - x'_A,$$

dove, dalla (10.9), per $t_A = t_B = 0$ segue:

$$x'_A = \gamma\left(x_A - vt_A\right) = \gamma x_A,$$
$$x'_B = \gamma\left(x_B - vt_B\right) = \gamma x_B.$$

Pertanto:

$$l' = x'_B - x'_A = \gamma\left(x_B - x_A\right) = \gamma l,$$

cioè la misura della lunghezza della sbarra fatta dall'osservatore in moto risulta minore della stessa misura eseguita dall'osservatore in quiete, di un fattore pari a *γ*. Con un analogo calcolo è possibile provare che, per una sbarra disposta perpendicolarmente alla direzione del moto non esiste alcuna differenza tra i risultati delle due misure.

Consideriamo due eventi successivi *A* e *B* che avvengono nello stesso punto relativamente ad un osservatore solidale con S', ad esempio supponiamo che uno avvenga al tempo iniziale t' e l'altro dopo un tempo $\Delta t'$ e che siano entrambi situati nell'origine del sistema di riferimento S':

$$x'_A = 0, \qquad t'_A = t';$$
$$x'_B = 0, \qquad t'_B = t' + \Delta t'.$$

Invertendo la relazione (10.12) è possibile stabilire i tempi t_A e t_B in corrispondenza dei quali hanno luogo gli eventi *A* e *B* dal punto di vista di un osservatore solidale col sistema in quiete:

$$t_A = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'_A\right) = \gamma t',$$
$$t_B = \gamma\left(t' + \Delta t' + \frac{\beta}{c}x'_B\right) = \gamma\left(t' + \Delta t'\right).$$

Per cui, posto:

$$\Delta t \equiv t_B - t_A,$$

l'intervallo di tempo misurato da *S* tra gli eventi t_A e t_B, risulta:

$$\Delta t = t_B - t_A = \gamma\left(t' + \Delta t\right) - \gamma t' = \gamma \Delta t',$$

cioè:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma},$$

ovvero un intervallo di tempo tra due eventi stabilito da un osservatore in moto ha durata maggiore dell'intervallo tra gli stessi eventi misurato da un osservatore in quiete.

10.4 Invariante relativistico

Consideriamo due eventi *A* e *B* che nel sistema di riferimento inerziale *S* si verificano nei punti di coordinate pari, rispettivamente, a (x_A, y_A, z_A) e (x_B, y_B, z_B) e che, in tale sistema si manifestano, rispettivamente, ai tempi t_A e t_B. Il quadrato del modulo del vettore $\Delta\vec{r}$ che collega i punti in cui hanno luogo tali eventi (orientato indifferentemente dal punto in cui si verifica l'evento *A* e quello dell'evento *B* o viceversa) si esprime come

$$|\Delta\vec{r}|^2 \equiv (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2;$$

inoltre è possibile definire una *distanza temporale* tra questi eventi attraverso la relazione

$$c^2(\Delta t)^2 \equiv c^2(t_A - t_B)^2$$

che rende dimensionalmente compatibili tale espressione con quella precedente. Quanto esposto nel precedente paragrafo mette in luce come queste due quantità, $|\Delta\vec{r}|^2$ e $c^2(\Delta t)^2$, hanno valore relativo, dipendendo dal sistema di riferimento in cui sono misurate.

Si verifica facilmente che la quantità:

$$\left(\Delta s\right)^2 \equiv c^2\left(\Delta t\right)^2 - \left|\Delta\vec{r}\right|^2 = c^2\left(t_A - t_B\right)^2 - \left(x_A - x_B\right)^2 - \left(y_A - y_B\right)^2 - \left(z_A - z_B\right)^2, \tag{10.23}$$

in cui Δs è detta *distanza spazio-temporale* tra gli eventi A e B, presenta lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento e pertanto è una grandezza invariante per trasformazione di Lorentz ed è detta *invariante relativistico*.

Infatti per un osservatore di un sistema di riferimento S' in moto rispetto ad S con velocità $\vec{v}$, dalle trasformazioni di Lorentz per l'evento A segue:

$$\begin{aligned} x_A' &= \gamma\left(x_A - vt_A\right), \\ y_A' &= y_A, \\ z_A' &= z_A, \\ t_A' &= \gamma\left(t_A - \frac{\beta}{c}x_A\right), \end{aligned} \tag{10.24}$$

e per l'evento B:

$$\begin{aligned} x_B' &= \gamma\left(x_B - vt_B\right), \\ y_B' &= y_B, \\ z_B' &= z_B, \\ t_B' &= \gamma\left(t_B - \frac{\beta}{c}x_B\right). \end{aligned} \tag{10.25}$$

Pertanto, posto:

$$\begin{aligned} \Delta x &\equiv x_A - x_B, \\ \Delta y &\equiv y_A - y_B, \\ \Delta z &\equiv z_A - z_B, \\ \Delta t &\equiv t_A - t_B, \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \Delta x' &\equiv x_A' - x_B', \\ \Delta y' &\equiv y_A' - y_B', \\ \Delta z' &\equiv z_A' - z_B', \\ \Delta t' &\equiv t_A' - t_B', \end{aligned}$$

dalle relazioni (10.24) e (10.25) segue

$$\begin{aligned} \left(\Delta s'\right)^2 &\equiv c^2\left(\Delta t'\right)^2 - \left|\Delta\vec{r}'\right|^2 = c^2\left(\Delta t'\right)^2 - \left(\Delta x'\right)^2 - \left(\Delta y'\right)^2 - \left(\Delta z'\right)^2 = \\ &= \gamma^2 c^2\left[\frac{\beta^2}{c^2}\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta t\right)^2 - 2\frac{\beta}{c}\Delta x\Delta t\right] - \gamma^2\left[\left(\Delta x\right)^2 + v^2\left(\Delta t\right)^2 - 2v\Delta x\Delta t\right] - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 = \\ &= \gamma^2\left[\beta^2\left(\Delta x\right)^2 + c^2\left(\Delta t\right)^2 - 2v\Delta x\Delta t\right] - \gamma^2\left[\left(\Delta x\right)^2 + v^2\left(\Delta t\right)^2 - 2v\Delta x\Delta t\right] - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 = \\ &= c^2\left(\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 = c^2\left(\Delta t\right)^2 - \left|\Delta\vec{r}\right|^2 = \left(\Delta s\right)^2 \end{aligned}$$

Si osservi che a dispetto di $|\Delta\vec{r}|^2$, in ragione della sua definizione, il quadrato della distanza spazio-temporale $(\Delta s)^2$ può assumere oltre che valori positivi o nulli, anche valori negativi. In particolare $(\Delta s)^2 = 0$ corrisponde alla circostanza in cui $\left(|\Delta\vec{r}|/\Delta t\right)^2 \equiv c^2$, ovvero un impulso luminoso che origina dalla posizione dell'evento A raggiunge quella dell'evento B nell'istante in cui questo si manifesta; $(\Delta s)^2 > 0$ corrisponde al caso in cui $|\Delta\vec{r}|^2 > c^2(\Delta t)^2$, ovvero quando la distanza tra le posizioni dei due eventi è superiore allo spazio $c\Delta t$ percorso da un impulso luminoso durante l'intervallo Δt che separa i due eventi; infine se $(\Delta s)^2 < 0$, allora $|\Delta\vec{r}|^2 < c^2(\Delta t)^2$, un impulso luminoso che origina dalla posizione dell'evento A raggiunge quella dell'evento B prima che tale evento abbia luogo.

10.5 Leggi di trasformazione del campo elettromagnetico

Dalla richiesta della invarianza delle espressioni delle equazioni di Maxwell in corrispondenza di una trasformazione di Lorentz, si ricavano le seguenti leggi di trasformazione del campo elettrico:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x; & E_x &= E'_x;\\ E'_y &= \gamma\left(E_y - vB_z\right); & E_y &= \gamma\left(E'_y + vB'_z\right);\\ E'_z &= \gamma\left(E_z + vB_y\right); & E_z &= \gamma\left(E'_z - vB'_y\right); \end{aligned}$$

in cui le espressioni inverse, a destra, si ottengono formalmente cambiando v in $-v$ e scambiando le quantità accentate con quelle non accentate. Analogamente, per il campo magnetico risulta:

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x; & B_x &= B'_x;\\ B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right); & B_y &= \gamma\left(B'_y - \frac{\beta}{c}E'_z\right);\\ B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right); & B_z &= \gamma\left(B'_z + \frac{\beta}{c}E'_y\right). \end{aligned}$$

Facendo uso dei simboli || e $\perp$ per denotare i vettori diretti, rispettivamente, parallelamente e ortogonalmente alla direzione in cui il sistema in moto S' si sposta relativamente al sistema in quiete S con velocità $\vec{v}$, allora, siccome l'asse x è orientato come tale direzione, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= E'_x\hat{x} = E_x\hat{x} = \vec{E}'_{\parallel};\\ \vec{E}'_{\perp} &= E'_y\hat{y} + E'_z\hat{z} = \gamma\left(E_y - vB_z\right)\hat{y} + \gamma\left(E_z + vB_y\right)\hat{z} =\\ &= \gamma\left[E_y\hat{y} + E_z\hat{z} + \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_{\perp}\right] = \gamma\left[\vec{E}_{\perp} + \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_{\perp}\right]; \end{aligned}$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = B'_x \hat{x} = B_x \hat{x} = \vec{B}'_{\parallel};$$

$$\vec{B}'_{\perp} = B'_y \hat{y} + B'_z \hat{z} = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \hat{y} + \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \hat{z} =$$

$$= \gamma \left[B_y \hat{y} + B_z \hat{z} + \frac{1}{c^2} \left(\vec{v} \times \vec{E} \right)_{\perp} \right] = \gamma \left[\vec{B}_{\perp} + \frac{1}{c^2} \left(\vec{v} \times \vec{E} \right)_{\perp} \right].$$

Da tali relazioni segue che i vettori $\vec{E}_{\parallel}$ e $\vec{B}_{\parallel}$, orientati parallelamente alla direzione della velocità relativa dei due sistemi di riferimento, restano invariati nella trasformazione, mentre i vettori perpendicolari $\vec{E}_{\perp}$ e $\vec{B}_{\perp}$ si trasformano in una mescolanza di campi elettrici e magnetici.

Esempio: Consideriamo un campo elettrico $\vec{E}$ nel sistema *S*, in quiete, pari a:

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} ;$$

nel sistema S' si ha il campo elettrico $\vec{E}'$ pari a:

$$\vec{E}' = E'_x \hat{x} + E'_y \hat{y} + E'_z \hat{z} = E_x \hat{x} + \gamma \left(E_y - vB_z \right) \hat{y} + \gamma \left(E_z + vB_y \right) \hat{z} = E_x \hat{x} + \gamma E_y \hat{y} + \gamma E_z \hat{z} ,$$

essendo il campo nel sistema *S* puramente elettrico. Tuttavia, dalle relazioni di trasformazione dei campi segue che in corrispondenza del campo $\vec{E}$ in *S* è presente un campo magnetico in S' pari a:

$$\vec{B}' = B'_x \hat{x} + B'_y \hat{y} + B'_z \hat{z} = B_x \hat{x} + \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \hat{y} + \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \hat{z} = \gamma \frac{\beta}{c} E_z \hat{y} - \gamma \frac{\beta}{c} E_y \hat{z} .$$

Pertanto il puro campo elettrico $\vec{E}$ osservato in *S* viene visto in S' come una sovrapposizione di campi elettrico e magnetico.

10.6 Dinamica relativistica

Consideriamo una particella puntiforme di massa *m* e carica *q* in moto con velocità $\vec{v}$ in un sistema di riferimento inerziale, soggetta sia ad un campo elettrico $\vec{E}$ che ad un campo magnetico $\vec{B}$. La forza agente sulla carica è data dall'espressione:

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right);$$

d'altra parte, siccome $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, dove $\vec{p}$ è la quantità di moto della particella, l'espressione precedente può scriversi:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Nella meccanica classica la quantità di moto si esprime come:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

così, sostituendo nella relazione precedente, si ottiene:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right).$$

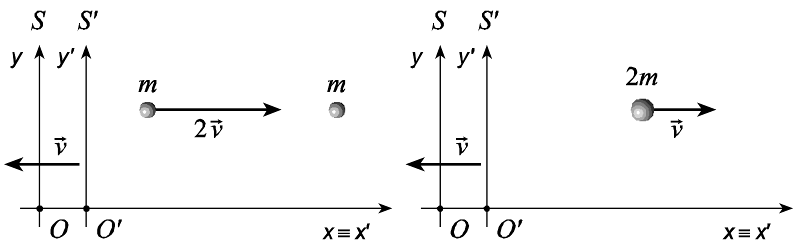
Affinché tale identità soddisfi il principio di relatività di Einstein essa deve risultare covariante rispetto ad un cambiamento di sistema di riferimento inerziale, ossia in corrispondenza dell'applicazione della trasformazione di Lorentz. Tuttavia nei paragrafi precedenti abbiamo constatato come le formule di trasformazioni delle grandezze (la velocità e i campi) non contengono la massa m. Pertanto se si assume, come accade nell'ambito della meccanica classica, che la massa sia un invariante per cambiamento di sistema di riferimento, la precedente relazione non può risultare covariante per una trasformazione di Lorentz. Ne segue che occorre formulare una nuova definizione della quantità di moto tale che la conseguente seconda legge della dinamica sia invariante per trasformazione di Lorentz, ma che nel limite delle piccole velocità ($v \ll c$) si riconduca all'espressione classica.

A tale scopo consideriamo l'urto completamente anelastico tra due particelle identiche isolate, di massa m, osservato nel corrispondente sistema di riferimento del centro di massa S'. In questo sistema, prima dell'urto le velocità delle particelle sono uguali ed opposte in modulo e di conseguenza la velocità del centro di massa è nulla. Dopo l'urto, siccome si conserva la velocità del centro di massa, la particella di massa $2m$ si trova a riposo nel sistema di riferimento considerato. Prima dell'urto la quantità di moto del sistema è:

$$p_i' = mv - mv = 0$$

mentre, dopo l'urto, siccome la velocità del centro di massa è nulla, si ha:

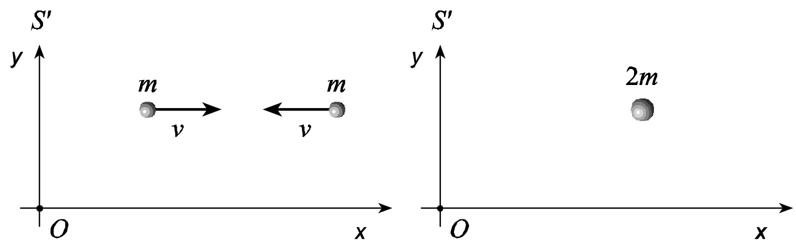
$$p_f' = 0$$



prima dell' urto *dopo l' urto*

Consideriamo ora un osservatore S in moto relativamente al sistema considerato come mostrato in figura e supponiamo, per semplicità, che la sua velocità sia uguale e concorde con quella di una delle due particelle. Adoperando le regole classiche di composizione delle velocità, l'osservatore S rileva, per la particella in moto nel verso opposto a quello del sistema, una velocità pari a $2v$ mentre l'altra appare a riposo; per tale osservatore, la quantità di moto prima dell'urto vale quindi:

$$p_i = m(2v) = 2mv.$$

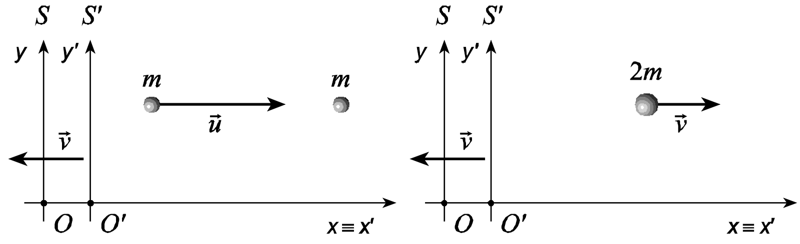


prima dell' urto *dopo l' urto*

Dopo l'urto S osserva la particella di massa $2m$ in moto velocità v, così:

$$p_f = (2m)v = 2mv.$$

Se anziché adoperare le regole classiche di composizione della velocità applichiamo la formula



prima dell' urto *dopo l' urto*

relativistica (10.22), la velocità u della particella diretta nel verso opposto a quello del sistema vale:

$$u = \frac{v+v}{\left(1+\frac{v}{c}v\right)} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2v}{1+\beta^2}; \tag{10.26}$$

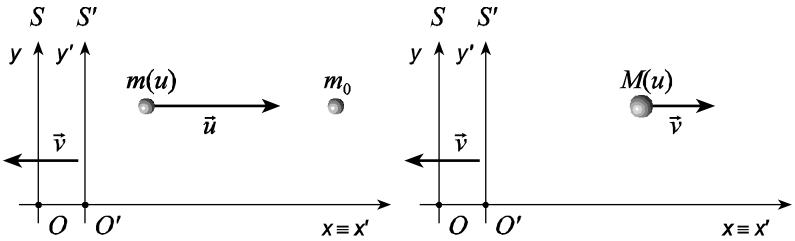
pertanto la quantità di moto prima dell'urto è:

$$p_i = mu = \frac{2mv}{1+\beta^2}.$$

D'altra parte, dopo l'urto S osserva ancora la particella di massa $2m$ in moto con velocità v, per cui:

$$p_f = (2m)v = 2mv.$$

Cioè seguendo tale approccio il principio di conservazione della quantità di moto cessa di essere una proprietà del sistema ma diventa dipendente dal punto di vista dell'osservatore. Così facendo, tuttavia, verrebbe meno un principio fondamentale della meccanica; per ovviare a tale eventualità occorre ridefinire il concetto di massa. Supponiamo pertanto che la massa delle particelle sia dipendente dalla sua velocità, se $m(u)$ è la massa della particella diretta nel verso opposto a quello del sistema S, m_0, la massa dell'altra particella, a riposo in S, e $M(v)$ la massa del sistema composto dopo l'urto vista in S, allora la conservazione della massa totale prima e dopo l'urto richiede che valga la relazione:



prima dell' urto *dopo l' urto*

$$m(u) + m_0 = M(v). \tag{10.27}$$

Inoltre, utilizzando questa nuova definizione della massa, il principio di conservazione della quantità di moto si esprime come:

$$m(u)u = M(v)v. \tag{10.28}$$

Ricavando $m(u)$ da tale relazione come $(v/u)M(v)$ e sostituendo nella (10.27), si ha:

$$\frac{v}{u}M(v) + m_0 = M(v),$$

$$M(v)\left(1-\frac{v}{u}\right) = m_0,$$

da cui, sostituendo a u l'espressione fornita dalla (10.26), si ottiene:

$$M(v) = \frac{m_0}{1-\frac{v}{u}} = \frac{m_0}{1-\frac{v}{\frac{2v}{1+\beta^2}}} = \frac{m_0}{1-\frac{1}{2}\left(1+\beta^2\right)} = \frac{2m_0}{1-\beta^2}.$$

Infine, sostituendo questa espressione nella (10.28) e ricavando $m(u)$, si ha:

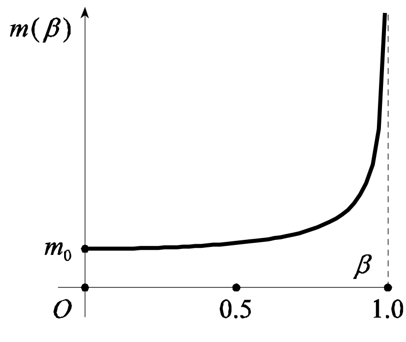
$$m(u) = \frac{2m_0}{1-\beta^2} - m_0 = \frac{2m_0 - m_0 + m_0\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0 + m_0\beta^2}{1-\beta^2} = m_0\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}}} =$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{\frac{1+\beta^4-2\beta^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{1+\beta^4-2\beta^2+2\beta^2-2\beta^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\frac{1+\beta^4+4\beta^2-4\beta^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}}} =$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{\frac{\left(1+\beta^2\right)^2-4\beta^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{2\beta}{1+\beta^2}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{2v}{c}\frac{1}{1+\beta^2}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}},$$

dove u rappresenta la velocità della particella misurata dall'osservatore S. Pertanto possiamo scrivere che in generale, se m_0 rappresenta la massa di una particella a riposo, quando questa è in moto con velocità v rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, la sua massa vale:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{10.29}$$



Sebbene le precedenti espressioni siano state dedotte studiando il caso di una collisione anelastica, i risultati conseguiti hanno validità generale, cioè valgono in tutte le circostanza in cui un corpo dotato di massa si muove relativamente ad un osservatore. La formule sono state ricavate a partire da due assunzioni: la costanza della velocità della luce nel vuoto per tutti gli osservatori e il principio di relatività, che in questa circostanza afferma che se la quantità di moto è una grandezza conservata per un osservatore, allora è conservata per tutti gli osservatori in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. Per velocità v piccole rispetto a c, come accade nella pratica comune, la differenza tra m e m_0 è troppo piccola perché possa risultare evidente, tuttavia, per velocità apprezzabili rispetto a quella della luce nel vuoto le differenze tra m e m_0 diventano sempre più significative, quanto più v si approssima[2] a c. In figura è mostrata la variazione di m con β dato dalla (10.13). Siccome la massa di un corpo rappresenta la relativa inerzia, ovvero la misura dell'accelerazione che subisce il corpo quando è sottoposto all'azione di

[2] Ciò si ha, ad esempio, nel caso delle particelle emesse da nuclei radioattivi o nel caso delle particelle che costituiscono i raggi cosmici o, ancora, nel caso delle particelle accelerate nelle moderne macchine acceleratici.

una certa forza, la (10.29) comporta che per accelerare un corpo alla velocità delle luce occorre una forza infinitamente grande. Cioè una massa che si muovesse alla velocità c sarebbe caratterizzata da un'inerzia infinita. La (10.29) quindi esprime di fatto che la velocità della luce rappresenta la velocità limite per il moto dei corpi dotati di massa.

Utilizzando la (10.29), la quantità di moto $\vec{p}$ di un corpo in moto con velocità $\vec{v}$ si scrive come:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0\vec{v}}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}};$$

tale espressione, per $v \ll c$ tende all'espressione classica $m_0\vec{v}$.

A partire da questa relazione è possibile generalizzare la seconda legge della dinamica. In meccanica classica massa di un corpo è assunta invariante, per cui la forza $d\vec{p}/dt$, cioè $d(m\vec{v})/dt$, vale $m\,d\vec{v}/dt$, ovvero $m\vec{a}$. Se la massa inerziale della particella varia nel tempo, allora:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}, \tag{10.30}$$

pertanto nell'ambito della relatività la derivata della quantità di moto, ovvero la forza, non è uguale al prodotto della massa per l'accelerazione. Dalla (10.29) segue:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{d\beta}\frac{d\beta}{dt} = \frac{\beta}{c}\frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt},$$

così, sostituendo nella (10.30) segue:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\vec{a} + \frac{\beta^2 m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}a\frac{\vec{v}}{v}. \tag{10.31}$$

Tale relazione, che al solito, per $v \ll c$ tende all'espressione classica $m\vec{a}$, ha quale immediata conseguenza che la forza $\vec{F}$ non risulta, in generale, parallela all'accelerazione $\vec{a}$ in quanto il secondo addendo è diretto secondo la velocità $\vec{v}$.

Esempio: Un caso particolare in cui l'accelerazione è parallela alla forza si ha quanto la forza $\vec{F}$ è parallela alla velocità $\vec{v}$, come accade in un moto uniformemente accelerato. In tale circostanza la (10.31) si scrive nella forma:

$$F = \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}a + \frac{\beta^2 m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}a = \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}a\left[\frac{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} + \beta^2\right] = \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}a\left[\sqrt{\frac{\left(1-\beta^2\right)^3}{1-\beta^2}} + \beta^2\right] =$$

$$= \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}a\left[\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2} + \beta^2\right] = \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}a.$$

per specificare che tale risultato ha valore nella sola circostanza in cui $\vec{F}$ e $\vec{a}$ sono paralleli, generalmente tale espressione viene indicata come:

$$F_{\parallel} = \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}} a_{\parallel} \, ,$$

e il termine $m_0 \Big/ \left(1-\beta^2\right)^{3/2}$ prende il nome di *massa longitudinale*. Un'altra situazione in cui l'accelerazione è parallela alla forza si ha quando il vettore $\vec{F}$ è perpendicolare a $\vec{v}$ e quindi risulta $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$. In questo caso il secondo addendo della (10.31) è nullo e tale relazione si scrive nella forma:

$$F_{\perp} = \frac{m_0}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} a_{\perp} \, ,$$

dove il termine $m_0 \Big/ \left(1-\beta^2\right)^{1/2}$ prende il nome di *massa trasversa*.

10.7 Equivalenza massa-energia

Il lavoro elementare dL eseguito da una forza $\vec{F}$ per determinare uno spostamento $d\vec{r}$ di un punto materiale è dato dalla relazione:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} \, ,$$

dal teorema dell'energia cinetica è noto che tale lavoro determina una variazione $dE_k = dL$ dell'energia cinetica del punto, pertanto:

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{r} \, ,$$

dividendo ambo i membri di tale relazione per dt, siccome la velocità $\vec{v}$ del punto vale $d\vec{r} \big/ dt$, si ha:

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \, ,$$

cioè il prodotto scalare $\vec{F} \cdot \vec{v}$ rappresenta il tasso di variazione dell'energia cinetica del corpo considerato. Dalla relazione (10.30) segue:

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \right) \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \frac{dm}{dt} v^2 \, ,$$

per cui la variazione infinitesima dell'energia cinetica dE_k del punto materiale vale:

$$dE_k = m \, d\vec{v} \cdot \vec{v} + dm \, v^2 \, . \qquad (10.32)$$

Consideriamo ora la relazione (10.29), elevando al quadrato ambo i membri e moltiplicando ambo i membri per il fattore $1 - v^2 \big/ c^2$, segue:

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = {m_0}^2 \, ,$$

ovvero;

$$m^2c^2 - m^2\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = m_0{}^2c^2 .$$

Se ora differenziamo ambo i membri di questa identità, siccome il prodotto $m_0{}^2c^2$ è costante, si ottiene:

$$2m\,dm\,c^2 - 2m\,dm\,v^2 - m^2\,2\left(d\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = 0$$

e, dividendo ambo i membri per $2m$ segue:

$$m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} + dm\,v^2 = c^2\,dm .$$

Confrontando questa identità con la (10.32) si ha:

$$dE_k = c^2\,dm .$$

Se la forza $\vec{F}$ agisce sulla particella originariamente a riposo nel sistema di riferimento considerato, l'energia cinetica in corrispondenza di un generico istante vale:

$$E_k = \int_{m_0}^{m} c^2\,d\mu = \left(m - m_0\right)c^2 = mc^2 - m_0c^2 .$$

La relazione

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 , \qquad (10.33)$$

rappresenta il teorema dell'energia cinetica nel caso relativistico ed è possibile verificare facilmente come tale espressione tenda alla relazione classica nel limite $v \ll c$.

Esempio: Per verificare il limite classico della relazione (10.33), scriviamo tale espressione facendo uso della (10.29):

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} - 1\right],$$

sviluppando in serie la funzione $\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$ nell'intorno di $\beta^2 = 0$, si ha:

$$\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots ,$$

per cui, sostituendo nella relazione precedente si ha:

$$E_k = m_0c^2\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} - 1\right] = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots - 1\right) = \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \ldots ,$$

e, trascurando i termini dello sviluppo successivi al primo, si ha:

$$E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 ,$$

che rappresenta l'espressione classica dell'energia cinetica.

L'espressione dell'energia cinetica relativistica (10.33) suggerisce un legame tra la massa e l'energia di un corpo e indica che massa ed energia rappresentano due differenti misure di una stessa grandezza. Tale caratteristica prende il nome di *principio di equivalenza massa-energia*. Questa proprietà, confermata dall'esperienza, porta a concludere che in corrispondenza di una variazione dell'energia di un sistema, anche la sua massa cambia secondo la relazione:

$$\Delta E = c^2 \, \Delta m .$$

La presenza del fattore c^2 determina significative variazioni di massa solo in corrispondenza di grandi variazioni dell'energia, per cui tale effetto risulta apprezzabile, ad esempio, solo nell'ambito dei processi che coinvolgono le particelle elementari, mentre risulta del tutto trascurabile, ad esempio, nelle reazioni chimiche. Il termine $m_0 c^2$ della (10.33) prende il nome di *energia di riposo*, mentre la quantità:

$$E \equiv mc^2 = E_k - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} ,$$

prende il nome di *energia totale* della particella e comprende l'energia cinetica e l'energia di riposo.

Esempio: Ad ogni massa in quiete corrisponde un elevato contenuto energetico, ad esempio l'energia contenuta in un corpo di massa pari ad un grammo vale:

$$E = m_0 c^2 = (1\,g) \times \left(2.99 \times 10^8 \, m/s\right) \approx 8.99 \times 10^8 \, J \approx 24.97 \, GW \cdot h ,$$

cioè in un grammo di materia è contenuta un'energia pari a quella prodotta in 5 giorni circa da una centrale elettrica da $200\,MW$.

Esempio: Nel processo di fusione di due nuclei atomici la massa del nucleo così composto risulta minore della massa dei singoli nuclei componenti. La differenza, denominata *difetto di massa* è pari al rapporto E_B / c^2, dove E_B è l'energia che si libera nel processo sotto forma di radiazione elettromagnetica o calore (*energia di legame*). L'energia liberata in questo processo di fusione nucleare è responsabile dell'intenso flusso luminoso delle stelle fisse.

Esempio: La relazione di equivalenza massa-energia giustifica la produzione e la trasformazione delle particelle elementari. Ad esempio, nell'interazione di fotoni con nuclei atomici può aversi la trasformazione di un fotone in una coppia elettrone-positrone, dove il positrone, *antiparticella* dell'elettrone ha la stessa massa m_e di questo ma carica opposta. Questo processo avviene solo se l'energia del fotone è maggiore o uguale del doppio dell'energia di riposo dell'elettrone $2m_e c^2$; l'eventuale eccesso di energia del fotone rispetto a tale quantità si trasforma in energia cinetica della coppia.