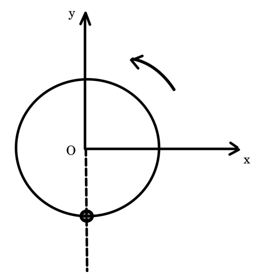
XIII Scuola Estiva di Fisica
Soluzioni allenamento per le GAS - 8 settembre 2023

1. **Piattaforma ruotante**
   Scegliamo un sistema di coordinate Oxy solidale al sistema di riferimento inerziale rispetto al quale la piattaforma ruota con velocità ω come in figura:



   All'istante iniziale $t = 0$ s la palla si trova in $(0, -R)$ e la sua velocità iniziale è $(\omega R, v)$. Le equazioni del moto sono:
$$\begin{cases} x = \omega R t \\ y = -R + vt \end{cases}$$
   La palla raggiunge il bordo quando $x^2 + y^2 = R^2$ e cioè all'istante:
$$t = \frac{2vR}{\omega^2 R^2 + v^2} \approx 0.50 \text{ s}$$

2. **Un bullone che cade**
   Sia l'asse y orientato verso l'altro e solidale all'edificio, con l'origine nel punto in cui il bullone si stacca, all'istante $t = 0$ s. Il moto del bullone, prima di toccare il pavimento è descritto da (le unità di misura sono sottointese nelle equazioni, le lunghezze essendo espresse in metri, e i tempi in secondi):
$$y(t) = v_0 - \frac{1}{2} g t^2 = 2.44t - 4.9t^2$$
   Il moto del pavimento invece è dato da
$$y'(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = -2.74 + 2.44t + 0.61t^2$$
   Sapendo che l'istante t per l'impatto è tale che $y = y'$, si ottiene:
$$t = \sqrt{\frac{2.74}{0.61 + 4.9}} \approx 0.7052 \text{ s}$$
   La posizione del bullone, rispetto al sistema di coordinate scelto è data da :
$$y(0,7 \text{ s}) \approx -0.7161 \text{ m}$$
   ma dobbiamo tener conto che prima il bullone sale (infatti al distacco ha una velocità verso l'alto di 2.44 m/s) e poi scende fino a quota -0.693 m. Il tempo di salita del bullone è dato da:
$$v = v_0 - gt \rightarrow t = \frac{2.44}{9.8} \approx 0.24898 \text{ s}$$
   Quindi il bullone sale di $y(0.25 \text{ s}) \approx 0.303755$ m.
   La distanza effettivamente percorsa è data da:
$$s = (0.303755 + 0.303755 + 0.7161) \text{ m} \approx 1.32 \text{ m}$$

3. **Due pattinatrici e una pertica**
Separiamo il problema in due fasi: analizziamo prima la fase dell'urto durante la quale la risultante delle forze esterne è nulla. Il c.d.m. rimane quindi fermo anche dopo l'urto, dopo il quale le due pattinatrici si muoveranno di moto rotatorio attorno al c.d.m. su una traiettoria circolare di raggio $l_0/2 = 1,5$ m. Si conserva anche il momento della quantità di moto (momento angolare) e quindi:

$$2mrv = I_0\,\omega_0, \text{ dove } r = \frac{l_0}{2}, \text{ e } I_0 = 2m(l_0/2)^2$$

Si ricava quindi l'espressione per la velocità angolare subito dopo l'urto: $\omega_0 = 2v/l_0$.
Nella seconda fase, e cioè al diminuire della distanza tra le due pattinatrici, si conserva il momento angolare (infatti agiscono solo forze interne), pertanto:

$$I\omega = I_0\,\omega_0, \text{ dove } I = 2m(l/2)^2$$

dunque

$$\omega = \omega_0\left(\frac{I_0}{I}\right) = \omega_0\left(\frac{\ell_0}{\ell}\right)^2$$

Da cui la variazione di energia cinetica:

$$\Delta K = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = mv^2\left[\left(\frac{l_0}{l}\right)^2 - 1\right] = 761.76 \text{ J} \approx 762 \text{ J}.$$

che risulta positiva perchè dovuta al lavoro delle forze interne. Le due pattinatrici infatti, hanno dovuto compiere lavoro contro la forza centrifuga.

4. **Tubo canterino**
Considerando la colonna d'aria, alla sua estremità aperta si formerà un ventre dell'onda stazionaria che si viene a creare, mentre all'estremità chiusa si formerà un nodo. Affinchè l'aria nel tubo entri in risonanza con il diapason che vibra a frequenza f, e trattandosi della prima armonica deve essere:

$$\ell = \frac{v_s}{4f}$$

dove ℓ rappresenta l'altezza della colonna d'aria. In maniera analoga scriviamo per la frequenza $f' = 400$ Hz:

$$\ell' = \frac{v_s}{4f'}$$

Pertanto il volume di acqua da aggiungere è dato da:

$$\Delta V = \frac{v_s}{4}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f'}\right)S = \frac{343,4 \text{ m/s}}{4}\left(\frac{1}{300 \text{ Hz}} - \frac{1}{400 \text{ Hz}}\right) \times 8,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \approx 57.2 \text{ cm}^3$$

5. **Sfera con cavità**
Indichiamo con F il modulo della forza richiesta. Se alla sfera scavata aggiungiamo, in modo da riempiere la cavità, una sfera pure di piombo, di raggio $R/2$ e massa $M/8$, la forza gravitazionale sulla sferetta m è semplicemente:
$$F' = \frac{GmM}{d^2}$$
che è data dalla somma di due contributi: la forza F che cerchiamo e la forza F" dovuta alla sfera $M/8$, che dista $d - R/2$ da m. Si può quindi scrivere:
$$\frac{GmM}{d^2} = F + \frac{GmM}{8(d-R/2)^2} \rightarrow F = \frac{GmM}{d^2}\left[1 - \frac{1}{8(1-R/2d)^2}\right]$$
Sostituendo i valori numerici otteniamo:
$$F \approx 1.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

6. **Asta incernierata**
In condizioni di equilibrio la risultante dei momenti agenti sull'asta deve essere nulla. Scegliendo O come polo, si devono calcolare i due momenti, di segno opposto, dovuti alla forza peso e alla spinta di Archimede, i cui moduli sono rispettivamente:
$$M_P = m\frac{\ell}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}\rho S\ell^2 g\sin\theta$$
e per la forza di Archimede, che è applicata nel centro della parte sommersa. distante $(\ell + d)/2$ da O
$$M_A = \rho_o S(\ell - d)g\frac{\ell + d}{2}\sin\theta$$
dove abbiamo indicato con ρ e ρ_0 le densità dell'asta e dell'acqua.
Eguagliando i momenti si ottiene:
$$d = \ell\sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} = 0.212\ \mathrm{m}$$

7. **Una via di uscita**
All'interno della sfera il potenziale generato da Q è costante e assume il valore che ha sulla superficie:
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$$
Dato che l'energia si conserva, la carica q, una volta uscita dal foro, per sfuggire all'attrazione elettrostatica dovrà avere una energia cinetica superiore al modulo dell'energia potenziale $U = qV$. Dovra quindi essere:
$$v > \sqrt{\frac{|Q \cdot q|}{2\pi\epsilon_0 mR}} \approx 30\ \mathrm{m/s}$$

8. **Sbarra che scivola**
Quando la sbarra comincia ad accelerare per effetto del proprio peso, il flusso del campo magnetico varia e si genera una corrente indotta nel circuito costituito dalla sbarra e dai due binari connessi dalla resistenza R. Per la legge di Lenz, la corrente circola in senso orario, per chi guarda dall'alto, e la sua intensità varia nel tempo:

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{B}{R}\cos\theta\,\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{B}{R}\cos\theta\,\ell\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{B}{R}\cos\theta\,\ell v(t)$$

dove $v(t)$ è la velocità istantanea della sbarra lungo il piano inclinato.
Le forze che agiscono sulla sbarra sono la forza-peso, che ha modulo $F_P = mg$ e direzione verticale, e la forza magnetica, che ha modulo $F = ilB$ e direzione orizzontale ed agisce sulla sbarra per effetto della corrente che circola in essa in presenza di campo magnetico. Dato che la corrente circola in senso orario, la forza magnetica ha verso tale da opporsi alla caduta della sbarra.
Le componenti delle forze parallele al piano inclinato sono $F_{P\parallel} = mg\sin\theta$ e $F_{m\parallel} = i\ell B\cos\theta$. Allora, dalla seconda legge di Newton applicata al moto della sbarra lungo il piano inclinato, otteniamo:

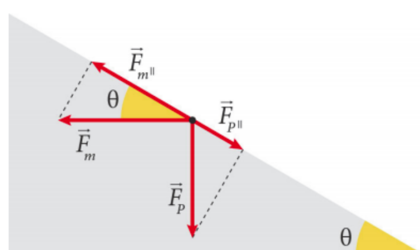
$$mg\sin\theta - i\ell B\cos\theta = m\frac{dv}{dt}$$

e sfruttando quanto scritto prima:

$$mg\sin\theta - \frac{B^2}{R}\cos^2\theta\,\ell^2 v(t) = m\frac{dv}{dt}$$

Quando la sbarretta raggiunge la velocità limite v_ℓ, accelerazione si annulla e quindi:

$$v_\ell = \frac{mgR}{B^2\ell^2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \approx 0.65 \text{ m/s}$$



Fonti esercizi proposti:

- Problemi di meccanica, Paolo Azzurri, *Edizioni della Normale*
- Problemi di Fisica, G.A. Saladin e P. Pavan,*casa editrice Ambrosiana - Milano*
- Problemi di Fisica Generale, P. Mazzoldi, A. Saggion, *edizioni libreria Cortina - Padova*
- Fisica no problem, M.T. Cancedda, G.L. Righetti, N.Tinti, *il capitello*
- Il nuovo Amaldi per i licei scientifici, Ugo Amaldi, *Zanichelli*