

Meccanica del punto

Antonio Quintavalle

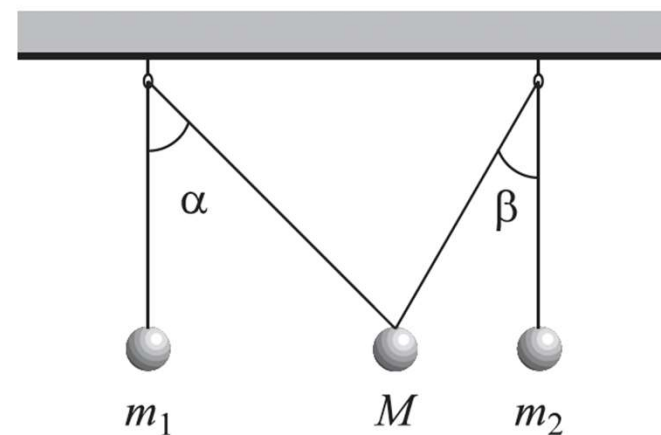
XIII Scuola Estiva di Fisica

Statica

Problema 8

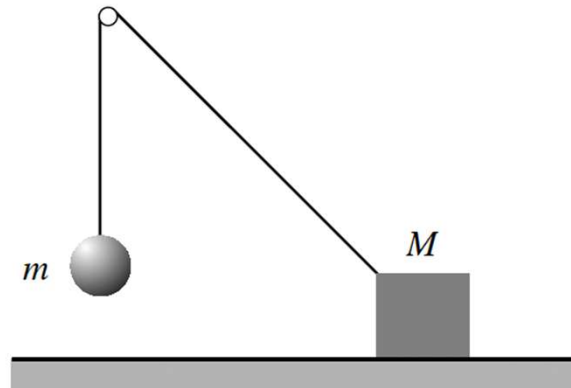
Tre palline sono sospese ad un filo di massa trascurabile che può scorrere senza attrito su due piccole carrucole, come mostrato in figura. La pallina centrale ha massa $M = 30 \text{ g}$ e gli angoli valgono $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/6$.

- Determinare quanto devono valere le masse m_1 ed m_2 per avere una situazione di equilibrio.



Un blocco di massa M , appoggiato su un piano orizzontale scabro, è unito mediante un filo (inestensibile e di massa trascurabile) a un secondo corpo di massa $m = M/2$. Il filo viene fatto passare su una carrucola posta a una certa altezza sopra il piano in modo che il secondo corpo resti sospeso mentre il tratto di filo che va dal blocco alla carrucola forma un angolo di 45° con la verticale.

Dalla sola osservazione che il sistema è in equilibrio, si possono ricavare informazioni circa il coefficiente di attrito statico tra il blocco e il piano e sul rapporto delle due masse.



1. Mostrare che l'equilibrio del sistema è possibile se il coefficiente d'attrito statico tra blocco e piano è maggiore di un certo valore μ_0 e determinare tale valore.

L'equilibrio è possibile anche con un rapporto di masse maggiore di quello dato, ma fino ad un certo limite, oltre il quale i due corpi non possono rimanere fermi in quella posizione, qualunque sia il valore del coefficiente d'attrito statico.

2. Quanto può valere al massimo il rapporto m/M tra le due masse perché il sistema resti in equilibrio nella posizione data?

Successivamente si mette in oscillazione il corpo sospeso, con un'ampiezza θ (angolo massimo rispetto alla verticale) mentre il blocco rimane fermo sul piano. Ripetendo la prova con ampiezze di oscillazione progressivamente crescenti, si osserva che per $\theta = 30^\circ$ nell'istante in cui il corpo che oscilla passa nel punto più basso, il blocco inizia a muoversi sul piano.

3. Mostrare che è possibile adesso determinare il valore del coefficiente d'attrito statico (sempre nel caso $m = M/2$).



quesito
1

Una persona si trova su un treno che parte con accelerazione uniforme su un binario rettilineo orizzontale e osserva una pallina appesa ad un filo. La persona nota che, durante l'accelerazione, il filo è spostato in modo da formare un angolo α con la direzione che aveva quando il treno era fermo.

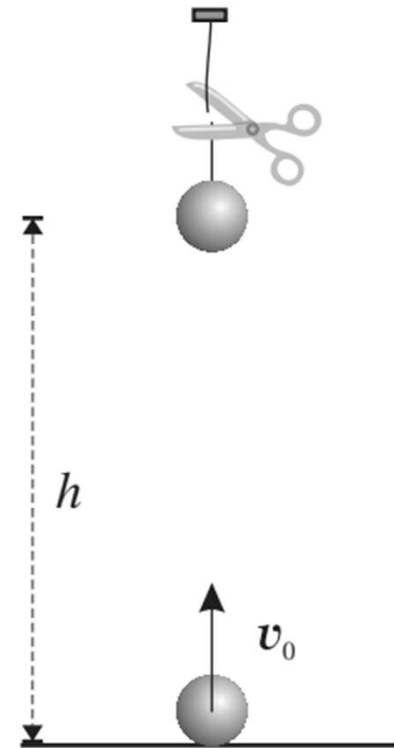
- Determinare il valore dell'accelerazione del treno.

Cinematica

QUESITO n. 10

Un oggetto è lasciato cadere da un'altezza h e, simultaneamente, un altro viene lanciato da terra, in alto, lungo la stessa verticale del primo, con velocità v_0 . Le dimensioni degli oggetti (ingrandite in figura) sono trascurabili rispetto alla distanza h .

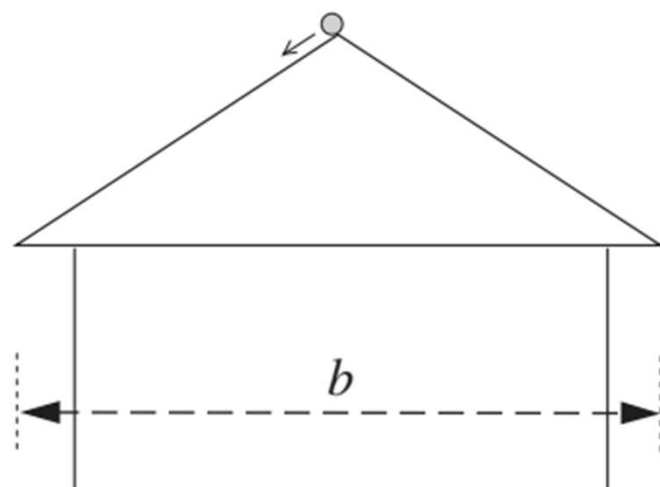
- Qual è la condizione perché i due oggetti possano scontrarsi in volo, cioè prima che il secondo tocchi nuovamente terra?



Il tetto di una casa è realizzato con un materiale che non si bagna; si supponga che una goccia di pioggia, che si trova sulla sommità del tetto, possa scorrervi senza attrito (vedi figura a lato).

- Quale deve essere l'inclinazione del tetto affinché la goccia di pioggia scorra nel minimo tempo?

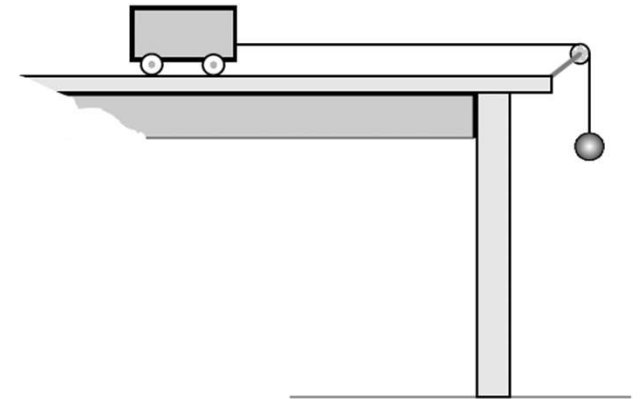
Nota. Per la soluzione di questo quesito non è necessario l'uso delle derivate.



Forze

Problema 8

Un carrello di massa $M = 200 \text{ g}$ può muoversi senza attrito su un piano orizzontale ed è trainato, come in figura, per mezzo di un filo e una carrucola (entrambi sono di massa trascurabile e il filo è inestensibile) da un pesetto di massa $m = 50 \text{ g}$.

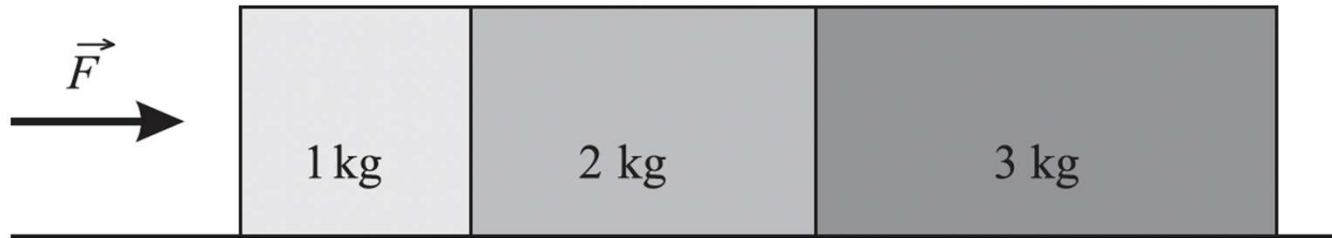


- Se la massa trainante raddoppia, qual'è il rapporto fra le accelerazioni dei due carrelli?

Q

2

Tre scatole sono spinte lungo una superficie liscia orizzontale con una forza \vec{F} parallela al piano, come mostrato in figura.



- Qual è l'intensità della forza che la scatola centrale esercita sulla scatola di sinistra?

Forza elastica

Sul piano (x, y) sono dati due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ collegati con una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla.

1. Scrivere l'espressione della forza applicata al punto B in funzione dei vettori posizione \vec{r}_A e \vec{r}_B dei due punti rispetto all'origine delle coordinate, in forma vettoriale o in termini di componenti dei vettori.

Quattro punti, P_1, P_2, P_3 e P_4 , sono fissati ciascuno sulla verticale di uno dei quattro vertici consecutivi di un quadrato di lato $\sqrt{2}b$, a quote rispettivamente h_1, h_2, h_3, h_4 . Un punto materiale P è collegato ai precedenti quattro con quattro molle identiche aventi massa e lunghezza a riposo trascurabili.

2. Fissato un riferimento cartesiano ortogonale avente per origine il centro del quadrato e con gli assi x e y allineati con le diagonali del quadrato, scrivere i vettori posizione $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ ed \vec{r} dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 e P.
3. Determinare la quota h_0 alla quale il punto materiale P è in equilibrio sotto l'azione delle forze elastiche.

Q9

Una molla fissata a soffitto sostiene una massa $m_1 = 215$ g. Una seconda massa $m_2 = 118$ g è sospesa alla prima mediante un sottile filo, di massa trascurabile. Il sistema è in equilibrio statico.

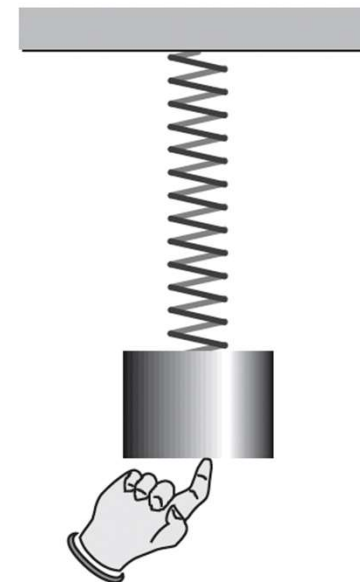
- Determinare l'accelerazione della massa m_1 nell'istante in cui il filo viene bruciato.

Q

10

Un corpo di massa $m = 400$ g è in equilibrio, appeso ad una molla di costante elastica $k = 10$ N m⁻¹, che lo sostiene. Il corpo viene sollevato, molto lentamente, di un tratto $\Delta x = 30$ cm.

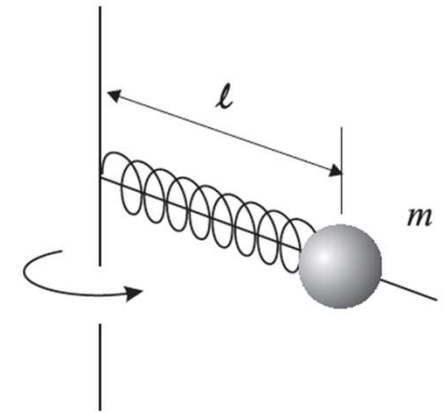
- Calcolare il lavoro compiuto dalla forza che solleva il corpo.



Q5

Una molla ideale, di costante elastica k , ha lunghezza ℓ_0 ; ad essa è attaccata una massa m ; il sistema si muove su un piano orizzontale e ruota, con velocità angolare uniforme ω , attorno ad un asse verticale (vedi figura).

- Trovare la lunghezza ℓ della molla quando è in rotazione.

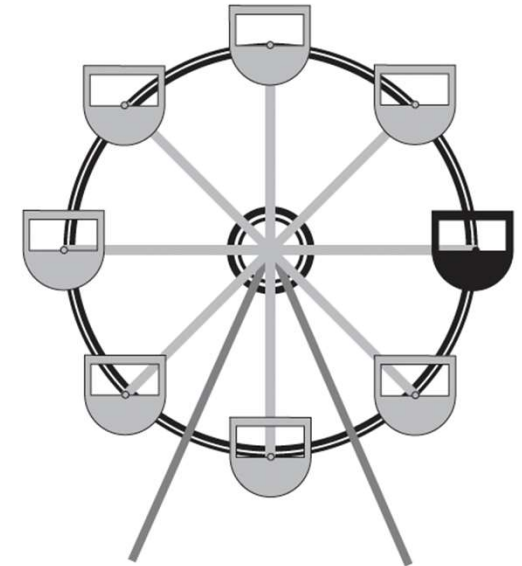


Moto circolare

Q6

Una cabina di una ruota panoramica (*evidenziata in nero in figura*), in un parco divertimenti, ha una massa di 400 kg e descrive una circonferenza verticale di raggio 5.3 m. Durante il collaudo della ruota, questa viene fatta ruotare uniformemente ad una velocità di 5.5 m s^{-1} , molto maggiore di quella di esercizio.

- Trovare il modulo della forza che la struttura della ruota esercita sulla cabina quando il punto in cui è agganciata è all'altezza del centro di rotazione, trattando la cabina stessa come un punto materiale.





quesito
2

Un motociclista percorre una curva di 120 m di raggio alla velocità di 90 km/h.

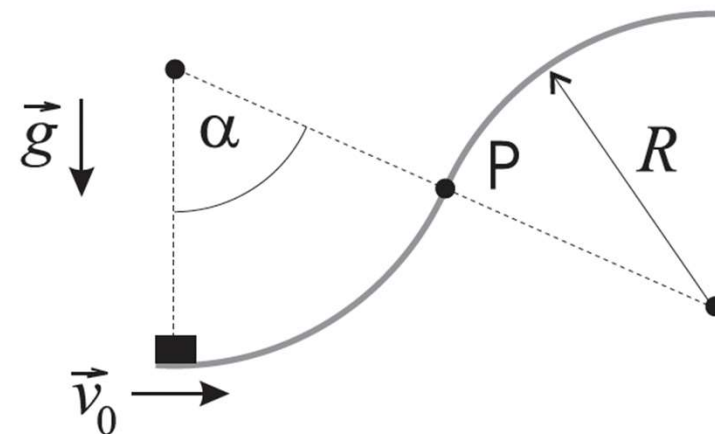
- Che informazione se ne può ricavare circa il coefficiente di attrito statico tra la gomma della ruota e l'asfalto della strada?

Energia meccanica

Un carrello di massa m viene appoggiato su una rotaia che presenta attrito trascurabile e lanciato con velocità v_0 dal punto più basso, come mostrato in figura. La rotaia è formata da due archi di cerchio uguali, di raggio R su un piano verticale, raccordati nel punto P. Sia α l'angolo che la normale comune ai due archi di circonferenza nel punto di raccordo forma con la verticale (v. figura).

Si vuole che il carrello arrivi nel punto più alto senza distaccarsi mai dalla rotaia.

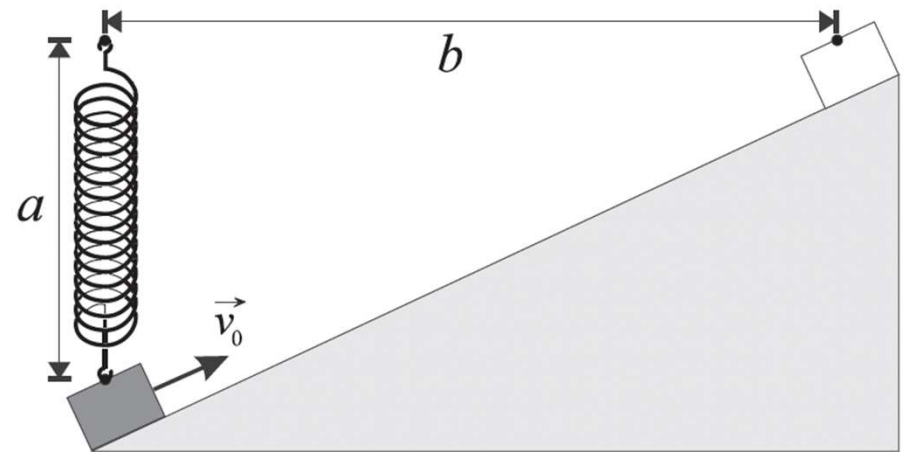
1. Supponendo che il carrello possa arrivare nel punto più alto senza staccarsi dalla rotaia, qual è – in funzione dei dati forniti – la minima velocità iniziale v_0 che deve avere?
2. Si dimostri che, se il carrello si stacca dalla rotaia, questo avviene appena superato il punto P.
3. Che condizione deve soddisfare la velocità iniziale v_0 perché il carrello non si stacchi?
4. Per quali valori dell'angolo α non è possibile che il carrello arrivi nel punto più alto mantenendo il contatto con la rotaia?



Problema 3

Un oggetto di massa m viene lanciato verso l'alto su un piano inclinato privo di attrito, con velocità iniziale v_0 . Nel suo moto l'oggetto è fissato ad un estremo di una molla di massa trascurabile che inizialmente è alla lunghezza di riposo.

- Osservato che il corpo si ferma esattamente al bordo superiore del piano inclinato, all'altezza del punto di sospensione della molla come mostrato in figura, quanto vale la costante elastica della molla?



Q 7

Una forza \vec{F} avente modulo di 400 N spinge una massa m di 5 kg su per un piano inclinato di 30° . Il piano è liscio e lungo $L = 2$ m e la massa, di dimensioni trascurabili rispetto al piano inclinato, inizialmente è ferma. Quando la massa raggiunge la sommità del piano, la forza \vec{F} cessa di agire e rimane solo la gravità.

- Con che velocità tocca terra la massa?



Q 7

Una cassa di massa m viene trainata su un piazzale in piano, partendo da ferma, con accelerazione costante a . La forza di trazione è applicata mediante una fune orizzontale. Il coefficiente d'attrito tra la cassa e il piano stradale è μ .

- Si vuol sapere la potenza che occorre applicare alla fune dopo un tempo t dall'inizio dello spostamento.

Valori numerici: $m = 70$ kg; $a = 0.5$ m s⁻²; $\mu = 0.35$; $t = 6$ s.



7

Una goccia di pioggia di massa m sta scendendo verticalmente a velocità costante a causa dell'azione di una forza di frenamento $F = kv^2$, dove k è una costante.

- Calcolare l'energia cinetica della goccia di pioggia, in funzione della massa m , della costante k e dell'accelerazione di gravità g .

Gravitazione

Q | Un corpo celeste sferico ha densità uniforme ρ e ruota attorno ad un suo asse in modo uniforme. Un sassolino è posto in un punto dell'equatore.

- Si esprima, in funzione di ρ , il periodo minimo di rotazione che il corpo può avere affinché il sassolino possa rimanere appoggiato.

Un satellite di raggio a e massa m descrive un'orbita circolare di raggio r attorno a un pianeta di massa M ; si trattino pianeta e satellite come sferici e omogenei.

Il centro di massa del sistema si può considerare coincidente con il centro del pianeta. I periodi di rotazione e rivoluzione del satellite sono identici, cosicché il satellite rivolge al pianeta sempre la stessa faccia (come la Luna fa con la Terra). In tutto il problema si trascuri la gravità della stella attorno a cui orbita il pianeta.

1. Si calcoli, in funzione di M ed r , la velocità angolare del moto di rivoluzione del satellite attorno al pianeta.

Si consideri un piccolo corpo di massa μ appoggiato sulla superficie del satellite, nel punto più vicino al pianeta.

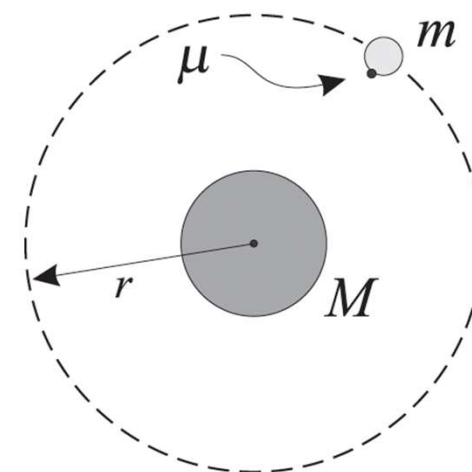
2. Si calcoli il modulo N della forza normale esercitata dalla superficie del satellite sul corpo. Si esprima il risultato in funzione di μ , M , m , r e a .
3. Qual è la condizione che deve essere verificata affinché il corpuscolo non si stacchi dalla superficie del satellite?

Se il satellite fosse troppo vicino al pianeta, il piccolo corpo non riuscirebbe a rimanere appoggiato sulla superficie del satellite.

4. Nell'ipotesi $a/r \ll 1$ si calcoli il minimo raggio orbitale r_0 per cui il corpuscolo non si stacca dalla superficie del satellite. Si esprima il risultato in funzione di M , m e a .

Suggerimento: si ricordi che, per $|x| \ll 1$ si può usare l'approssimazione $(1 \pm x)^\alpha \approx (1 \pm \alpha x)$ per qualunque α (anche negativo). Di conseguenza i binomi $(r \pm a)^\alpha$ con $a \ll r$ si possono approssimare ponendo $r \pm a = r(1 \pm a/r)$

5. Qual è il minimo raggio a a cui potrebbe orbitare intorno alla Terra un piccolo satellite sferico di densità pari a $(2.49 \pm 0.01) \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ senza che un corpo appoggiato sulla sua superficie, nel punto più vicino al pianeta, si stacchi?



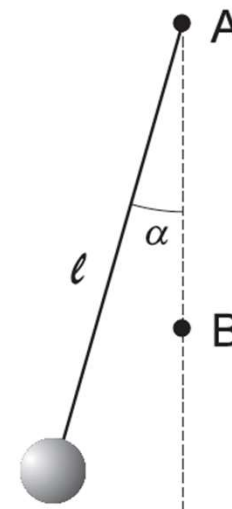
Pendolo

Problema 5

Un corpo di massa $M = 0.83 \text{ kg}$ è sospeso, con un filo di lunghezza $\ell = 75 \text{ cm}$, ad un chiodo (indicato in figura con A); un secondo chiodo (B) è posto più in basso, sulla verticale del primo, a $2/3$ della lunghezza del filo. Il corpo viene spostato in modo che il filo teso formi con la verticale un angolo piccolo (α), e poi lasciato da fermo.

- In quanto tempo il corpo torna nella posizione iniziale?

NOTE: il corpo può essere trattato come puntiforme, il filo inestensibile e di massa trascurabile rispetto al corpo; ogni forma di attrito sia trascurabile.



QUESITO n. 1

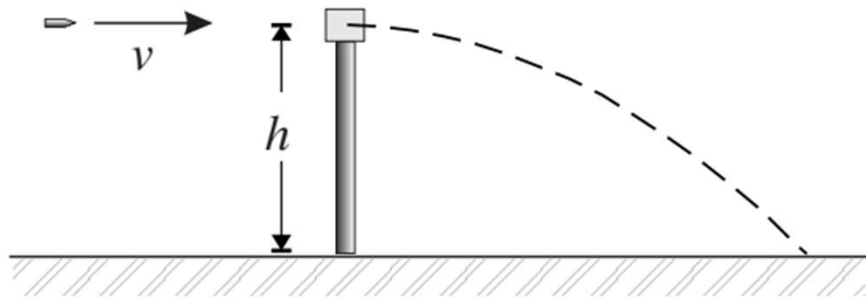
Un oggetto pesante viene legato ad un filo (di massa trascurabile) fissato, all'altro estremo, ad un supporto. Il filo, che si può ritenere inestensibile di lunghezza $\ell = 2$ m, viene teso orizzontalmente e successivamente l'oggetto viene lasciato cadere.

- Se la tensione massima che il filo può sopportare è di 210 N quale può essere, al massimo, la massa dell'oggetto senza che il filo si strappi?

(Assumere $g = 10 \text{ m s}^{-2}$)

Urti

QUESITO n. 6

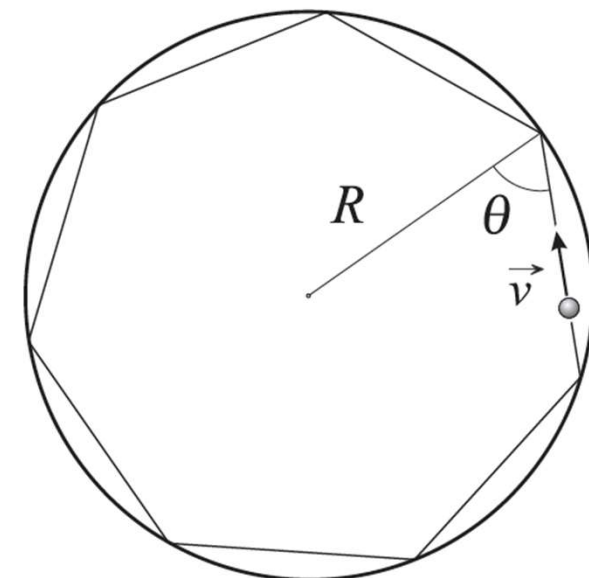


Un proiettile di massa m e velocità v si conficca in un blocco di massa M posto sopra un supporto di altezza h .

- A quale distanza dal piede del supporto cade il blocco con il proiettile conficcato dentro?

Un oggetto di massa m e dimensioni trascurabili, in moto a velocità \vec{v} , incide sul bordo di una guida circolare priva di attrito con angolo θ rispetto alla normale, rimbalzando elasticamente. La guida, di raggio R , è fissata su un piano orizzontale, anch'esso senza attrito, e la traiettoria risultante è un poligono di n lati inscritto nella guida circolare.

La figura mostra un esempio di questa situazione per una traiettoria poligonale di 7 lati ($n = 7$).



1. Determinare innanzitutto la variazione di quantità di moto di un corpo di massa m che urta una parete piana e priva di attrito, con velocità \vec{v} che forma un angolo θ con la normale alla parete e il valor medio dell'intensità della forza che la parete esercita sul corpo se questa agisce in un intervallo di tempo δt .
2. Nel caso esposto sopra di una traiettoria poligonale di n lati entro la guida circolare, quanto vale l'intensità media della forza che la parete circolare esercita sul corpo, assumendo ora che δt sia l'intervallo di tempo tra due urti successivi?
3. Passando al limite per n infinitamente grande che significato ha l'espressione trovata al punto precedente?

