Strumenti di misura e teoria degli errori

Piano Lauree Scientifiche
Dipartimento di Matematica e Fisica «E. De Giorgi»
Università del Salento

Strumenti di misura

Lo strumento di misura è un sistema fisico costruito sulla base di teorie e tecnologie opportune per ottenere informazioni su altri sistemi fisici con i quali si fa interagire.

Come già detto una misura può farsi tramite confronto diretto con l'unità di misura oppure tramite un apposito sistema, più o meno complesso, opportunamente **TARATO**.

Uno strumento si dice *tarato* quando sia stata determinata la <u>sua risposta in corrispondenza di un certo numero di sollecitazioni note</u> apportate da una grandezza omogenea a quella da misurare.

Principio di funzionamento

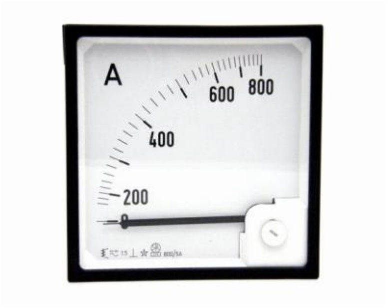
Sia

- ***G*** la grandezze fisica che si vuole misurare
- ***V(G)*** il valore della grandezza che si vuole stimare tramite l'operazione di misura
- ***R(G)*** la risposta dello strumento ad una sollecitazione apportata dalla grandezza da misurare

Tipi di strumenti

Strumento analogico:

la risposta viene letta su una scala graduata sulla quale si muove un indice;



Strumento digitale:

la risposta analogica è digitalizzata (e rappresentata in cifre su un supporto visivo-display).

Caratteristiche generali degli strumenti di misura

Intervallo di funzionamento:
È dato dal valore minimo – *soglia* – e dal valore massimo – *portata* – della grandezza in esame che lo strumento è in grado di fornire

Fuori da questo intervallo la qualità della misura non è garantita ed in alcuni casi è possibile che lo strumento sia danneggiato

<u>attenzione alla portata!</u>

Prontezza:
È legata al tempo necessario (***tempo caratteristico τ***) affinché lo strumento risponda ad una variazione della grandezza.

tempo caratteristico τ $\downarrow$ prontezza $\uparrow$

Rappresenta *la rapidità con cui lo strumento è in grado di fornire il risultato di una misura*.

Sensibilità

<u>È la più piccola variazione della grandezza apprezzabile dallo strumento</u>,

ovvero

<u>È la più piccola variazione della sollecitazione che induce una variazione di risposta dallo strumento</u>

Precisione:
Indica la capacità di uno strumento di fornire lo stesso valore di $R(G)$ quando sia sollecitato dallo *stesso* valore di $V(G)$.

In una misura, anche eseguita in *condizioni di ripetibilità*, sono sempre presenti perturbazioni (attriti, giochi meccanici, ecc.) che possono produrre fluttuazioni nella risposta.

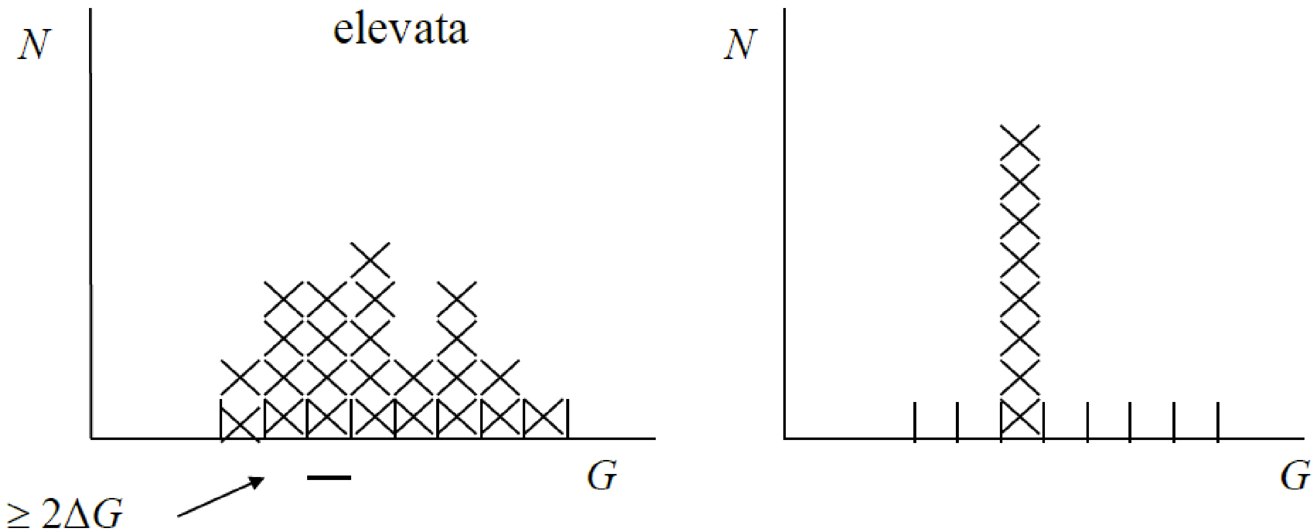
In uno strumento tarato ciò avviene quando l'entità delle fluttuazioni è *maggiore* della minima variazione di risposta ΔR apprezzabile: si ottiene così una distribuzione di valori di $V(G)$.

Quanto minore è la larghezza tanto più ripetibile è il funzionamento, migliore la qualità delle misure e tanto maggiore può essere definita la precisione.

$$s = 1/\Delta G$$

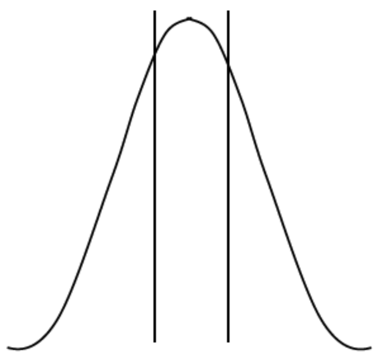
precisione bassa – sensibilità elevata

precisione alta – sensibilità bassa

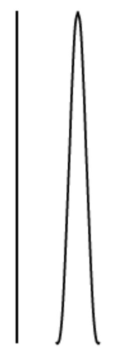


Uno strumento di misura è realizzato in modo che precisione ed incertezza di sensibilità siano confrontabili.

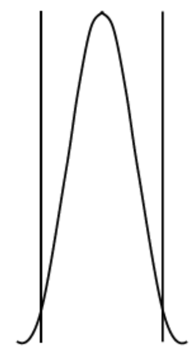
necessità di effettuare un gran numero di misure



precisione inutile



precisione e sensibilità confrontabili



Importanza delle incertezze nelle misure fisiche

La parola “errore” non significa **equivoco** o **sbaglio**

Essa assume il significato di **incertezza** da associare alla misura

Nessuna grandezza fisica può essere misurata con completa certezza

Poichè è inevitabile che in una misura tutte le fonti di incertezza siano eliminate, il **valore vero** di una grandezza, che sarebbe il risultato di un’operazione di misura ideale, priva di errore, perde significato.

Pertanto, perchè una misura abbia senso è necessario determinare oltre alla “**migliore stima**” del valore vero, l’indeterminazione da cui è presumibilmente affetta.

Rappresentazione di una misura

Il risultato di una misura ha due componenti essenziali:

- un ***valore numerico*** (in un dato sistema di unità) che rappresenta **la migliore stima possibile** del valore vero della grandezza misurata,

- una ***incertezza*** associata al valore stimato (espressa con le stesse unità di misura della grandezza fisica a cui è associato).

Il risultato di una misura sarà espresso nella maniera seguente:

Valore misurato = stima ± incertezza

$$G = M(G) \pm \Delta G$$

Quest'affermazione significa che:

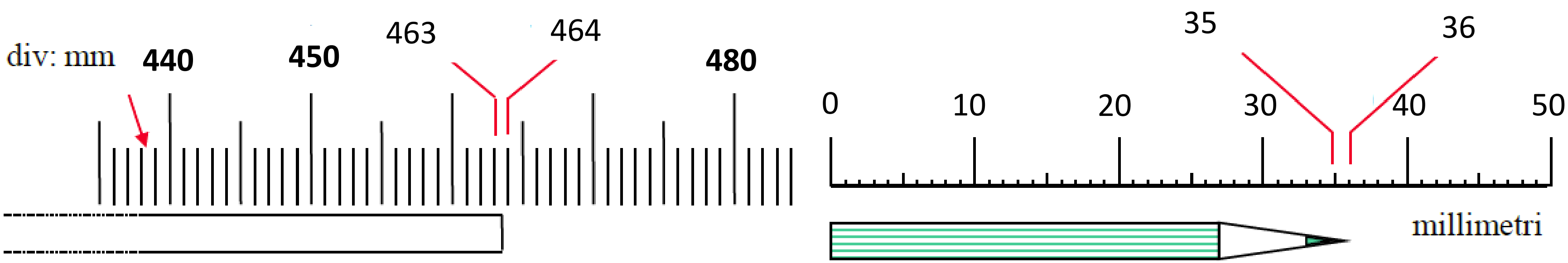
- la migliore stima della quantità misurata è $M(G)$;
- lo sperimentatore è confidente che la grandezza abbia un valore compreso tra

$M(G) - \Delta G$ e $M(G) + \Delta G$

Misure e incertezze

Nessuna grandezza fisica può essere determinata con precisione assoluta ma è sempre affetta da una indeterminazione o errore.

La bontà della misura dipende dal modo in cui la grandezza e’ misurata (*tipo di strumento, procedura,...*)



$463\ mm \leq l \leq 464\ mm$ $\qquad$ $35\ mm \leq l \leq 36\ mm$

$l = (463.5 \pm 0.5)\ mm$ $\qquad$ $l = (35.5 \pm 0.5)\ mm$

<u>Si dice in questo caso che la misura di lunghezza è stata eseguita con una incertezza di “sensibilità” di 0.5 mm.</u>

Gli errori

- Svarioni
- Disturbi
- Errori sistematici
- Errori casuali

Gli svarioni

Sono quegli errori madornali dovuti ad esempio ad una distrazione dello sperimentatore (lettura errata dello strumento, trascrizione sbagliata dei dati, …)

I disturbi

I disturbi sono errori occasionali, temporanei, che scompaiono quando la misura viene ripetuta

Entrambi sono eliminabili da parte di un attento sperimentatore.

Gli errori sistematici

Sono errori che alterano la misura <u>sistematicamente</u> in eccesso o in difetto

↓

<u>non sono rilevati mediante la ripetizione delle misure, ma confrontando risultati di misure eseguite con strumenti o procedure diverse</u>

Gli errori sistematici

Difetti dello strumento (in uno strumento starato non esiste accordo tra il "valore vero" della grandezza e la risposta dello strumento)

Interazione strumento-sperimentatore (nell'errore di parallasse l'errore è dovuto ad una sbagliata angolazione dello sperimentatore rispetto alla scala dello strumento)

Interazione strumento-fenomeno (nella misura della temperatura di un fluido con un termometro ciò che si misura effettivamente è la temperatura del sistema termometro-fluido dopo il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico)

Errate condizioni di lavoro (alcuni strumenti sono tarati per lavorare a determinate temperature e forniscono risposte non veritiere se usati ad altre temperature)

Gli errori casuali

Possono avvenire con uguale probabilita’ sia in difetto che in eccesso rispetto al valore vero: tipicamente si distribuiscono in modo simmetrico intorno alla **media aritmetica**

sono rilevati mediante la ripetizione delle misure e sono spiegati con l’impossibilita’ di riprodurre esattamente le stesse condizioni sperimentali

Osservazione: se si adopera per la misura uno strumento di scarsa sensibilità, i valori delle misure ripetute coincidono

Gli errori casuali

A differenza degli errori sistematici, gli errori casuali sono inevitabili e non eliminabili, ma trattabili in quanto il loro contributo può essere quantificato mediante l’analisi statistica dei risultati.

Accuratezza e precisione

Accuratezza

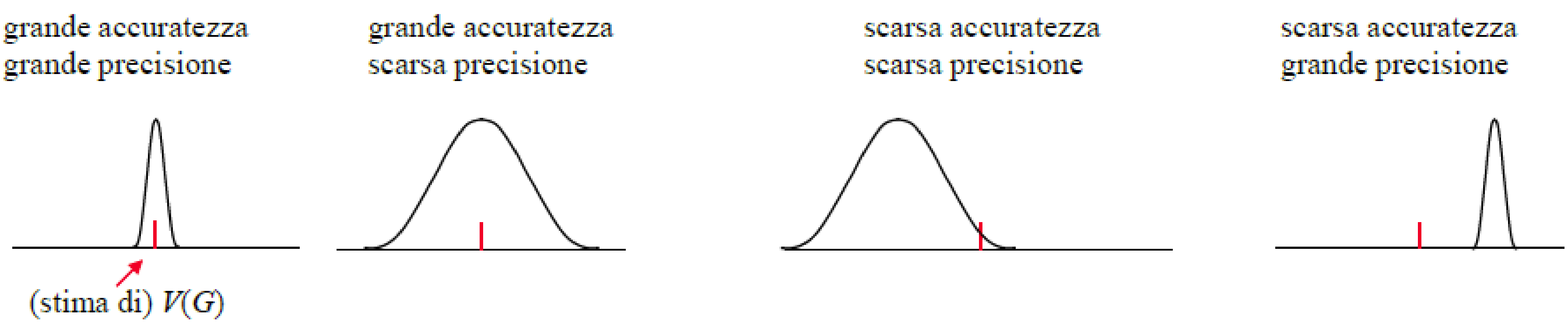
(è in relazione all’entità degli errori sistematici)

Si definisce accurata una misura per la quale sia stato ridotto al minimo il contributo degli errori sistematici

Precisione

(ha a che fare con la presenza degli errori casuali)

Si dice precisa una misura per la quale sia sufficientemente piccola l’ampiezza dei valori misurati attorno alla media



Che cosa sono le cifre significative?

<u>Definizione</u>:
Per numero di cifre significative si intende il numero di tutte le cifre scritte a partire da destra, compresi gli zeri, fino all'ultima diversa da zero a sinistra.

In fisica è importante conoscere il numero di cifre significative del risultato di una misura in quanto è correlato alla bontà della misura e pertanto non può essere scelto arbitrariamente

Regole pratiche per il conteggio del numero di cifre significative:

- Tutte le cifre diverse da zero sono significative
- Tutti gli zeri compresi fra due non-zeri sono cifre significative
- Gli zeri a destra sono cifre significative
- Gli zeri a sinistra non sono cifre significative

Numero	cifre significative
123,4	4
123,42	5
123,420	6
0,04	1
0,042	2
0,0420	3
600 (600.)	3
$600 = 6\ 10^2$	1

Arrotondamenti

Se la prima cifra che deve essere eliminata è minore di 5, la cifra precedente resta inalterata.

Esempio:
arrotondamento a 3 cifre

- *3.472 viene arrotondato con 3.47*

Se la prima cifra che si deve eliminare è maggiore o uguale a 5, la cifra precedente viene aumentata di una unità. *(quasi sempre!!!)*

Esempio:
arrotondamento a 3 cifre

- *5.738 viene arrotondato con 5.74*
- *5.798 viene arrotondato con 5.80*
- *5.7953 viene arrotondato con 5.80*

- *5.685 viene arrotondato con 5.68*
- *5.675 viene arrotondato con 5.68*

Discrepanza o scarto

Se due misure della stessa grandezza sono in disaccordo, allora si dice che vi è una ***discrepanza***.
Numericamente la discrepanza (o scarto) è definita come segue:

discrepanza = differenza tra due valori misurati della stessa grandezza

Una discrepanza può essere o non essere significativa.

Se nella misura di una velocità si ottengono i risultati

$$40 \pm 5\ m/s \qquad \text{e} \qquad 42 \pm 8\ m/s$$

la discrepanza è minore delle loro incertezze e le due misure sono consistenti.

Se invece i risultati fossero stati

$$35 \pm 2\ m/s \qquad \text{e} \qquad 45 \pm 1\ m/s$$

allora le due misure sarebbero chiaramente inconsistenti e la discrepanza di 10 m/s è significativa.

In questo caso sarebbero necessari controlli accurati per capire cosa è stato fatto di sbagliato.

Incertezze nelle misure dirette

Incertezza massima

È l'incertezza che definisce l'intervallo entro il quale si confida debba cadere con sicurezza il valore vero di *G*.

La stima è pessimistica: ogni contributo di incertezza è stimato nelle condizioni peggiori.

Incertezza statistica

È l'incertezza che dà una stima della probabilità che il valore della grandezza misurata sia compreso in un certo intervallo.

Incertezze nelle misure dirette

1° Caso

Le incertezze sono legate alla sensibilità degli strumenti impiegati

<u>Incertezza di sensibilità ≥ fluttuazione intrinseca delle misure.</u>

Incertezze di sensibilità

Incertezze (*Errori*) di sensibilità

Supponiamo di voler eseguire la misura della lunghezza x di un parallelepipedo utilizzando una riga millimetrata e di ripetere la misura N volte.
Noteremo che tutte le misure danno come risultato lo stesso valore in quanto <u>lo strumento non è così sensibile da percepire le fluttuazioni intrinseche alla misura</u>.

In tal caso si può solo dire, ad esempio, che

$2.5\ cm < x < 2.6\ cm$ ovvero $x = (2.55 \pm 0.05)\ cm$

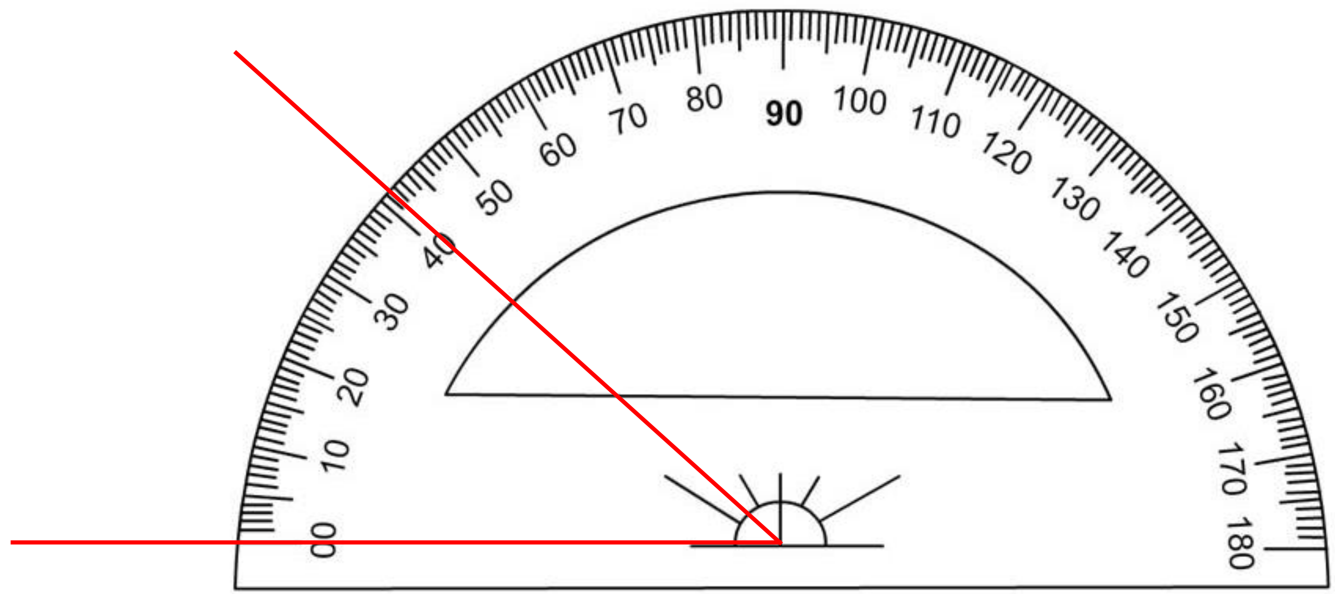
Analogamente se vogliamo effettuare una misura con il termometro clinico allora dalla lettura sulla scala risulta

$$36.6°\, C < x < 36.7°\, C$$

Siamo cioè in grado di apprezzare mezzo decimo di grado e il risultato della misura si scrive è

$$T = (36.65 \pm 0.05)°\, C$$

Ancora supponiamo di voler misurare l'ampiezza di un angolo con il goniometro in figura.



Con questo strumento si può apprezzare mezzo grado

$$41° < \alpha < 42°$$

e il risultato di una tipica misura si scrive

$$\alpha = (41.5 \pm 0.5)°$$

In tutti i casi che abbiamo considerato, l’incertezza associata alla misura è legata alla sensibilità dello strumento.

Se la sensibilità è stata definita come la più piccola variazione della grandezza che lo strumento è in grado di apprezzare, essa risulta legata alla più piccola divisione (tra due tacche consecutive) o ad una frazione apprezzabile di questa riportata sulla scala dello strumento.

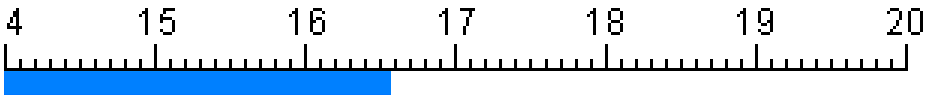
Nei casi precedenti come incertezza ΔG è stata usata la mezza divisione, in linea più generale, quando visivamente non si è in grado di apprezzare la mezza divisione, si usa come incertezza ΔG una divisione.
Negli esempi precedenti allora poiché le più piccole divisioni corrispondono rispettivamente a $1\ mm$, $0.1°\ C$ e $1°$, è molto probabile trovare scritture del tipo:

$$x = (2.8 \pm 0.1)\ cm$$

$$T = (36.6 \pm 0.1)°\ C$$

$$\alpha = (41 \pm 1)°$$

Incertezze assolute e relative



$$x = (16.55 \pm 0.05)\ cm$$

L'**incertezza assoluta** della misura e' $0.05\ cm$ (ovvero $0.5\ mm$)

Ma l'incertezza ΔG da sola può non essere sufficiente a determinare la bontà della misura, che dipende anche dal valore della grandezza misurata.

L'**incertezza relativa** della misura e' data da $$\frac{\Delta G}{M} = \frac{\Delta x}{x}$$

(misura più grossolana)

$$x_1 = (4.55 \pm 0.05)\ cm$$

$$x_2 = (53.20 \pm 0.05)\ cm$$

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{0.05}{4.55} \approx 0.01 (1\%)$$

$$\frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{0.05}{53.20} \approx 0.001 (0.1\%)$$

Incertezze nelle misure indirette e propagazione degli errori massimi

Quando una grandezza fisica G viene determinata indirettamente attraverso la misura dirette di altre grandezze G_i

$$G = f(G_1, G_2, G_3, \ldots)$$

occorre stabilire come le incertezze sulle G_i si riflettono sull'incertezza della grandezza derivata G.

$$\Delta G_i \rightarrow \rightarrow \Delta G?$$

Somma di grandezze omogenee

Siano $G_1 = X$ e $G_2 = Y \rightarrow G = f(X, Y) = X+Y$

X_m *migliore stima di* X ; ΔX *incertezza associata*
Y_m *migliore stima di* Y ; ΔY *incertezza associata*

Ovvero

$X = X_m \pm \Delta X$ $\qquad$ $Y = Y_m \pm \Delta Y$

La migliore stima di G *è*

$$G_m = X_m + Y_m$$

e ΔG ?

$$G_{min} = G_m - (\Delta X + \Delta Y) \qquad G_{max} = G_m + (\Delta X + \Delta Y)$$

$$\Downarrow$$

$$G_m - (\Delta X + \Delta Y) \leq G \leq G_m + (\Delta X + \Delta Y)$$

Pertanto la quantità $(\Delta X + \Delta Y)$ definisce l'intervallo entro il quale deve cadere il valore di $\boldsymbol{G}$ e quindi rappresenta l'incertezza $\boldsymbol{\Delta G}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta G = (\Delta X + \Delta Y)}$$

Propagazione delle incertezze nei prodotti

Siano $G_1 = X$ e $G_2 = Y \rightarrow G = f(X, Y) = X \cdot Y$ *(assumiamo per il momento X e Y >0)*

X_m *migliore stima di* X ; ΔX *incertezza associata*
Y_m *migliore stima di* Y ; ΔY *incertezza associata*

Ovvero

$$X = X_m \pm \Delta X \qquad Y = Y_m \pm \Delta Y$$

La migliore stima di G *è*

$$G_m = X_m \cdot Y_m$$

e ΔG ?

$$\Delta G = (X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X)$$

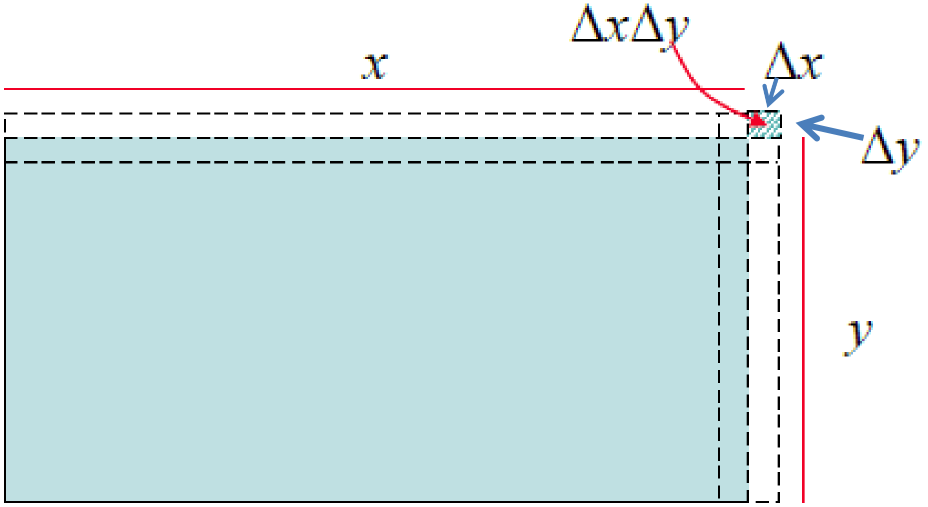
Se X e/o Y sono < 0

$$\Delta G = (\left| X_m \right| \cdot \Delta Y + \left| Y_m \right| \cdot \Delta X)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta G}{|G_m|} = \frac{\Delta X}{|X_m|} + \frac{\Delta Y}{|Y_m|}$$

Graficamente:



Regola generale

Sia $G = f(X, Y, Z, \ldots U, V, W, \ldots) = \dfrac{X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots}{U \cdot V \cdot W \cdot \ldots}$

con $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta U, \Delta V, \Delta W, \ldots.$ *incertezze associate*

La migliore stima di G è data da

$$G_m = \frac{X_m \cdot Y_m \cdot Z_m \cdot \ldots}{U_m \cdot V_m \cdot W_m \cdot \ldots}$$

e

$$\frac{\Delta G}{|G_m|} = \frac{\Delta X}{|X_m|} + \frac{\Delta Y}{|Y_m|} + \frac{\Delta Z}{|Z_m|} + \frac{\Delta U}{|U_m|} + \frac{\Delta V}{|V_m|} + \frac{\Delta W}{|W_m|} + \ldots\ldots$$

Poiche' siamo interessati alla massima variazione di G (valutazione più pessimistica dell'incertezza)

$$\boxed{\Delta G \approx \left|\frac{\partial G}{\partial X}\right|\Delta X + \left|\frac{\partial G}{\partial Y}\right|\Delta Y + \left|\frac{\partial G}{\partial Z}\right|\Delta Z + \ldots}$$

OSSERVAZIONI

- È rigorosamente valida se G dipende linearmente X, Y, Z,....
- È valida approssimativamente se ΔX, ΔY, ΔZ,... sono piccoli rispetto a G.
- ΔG è un errore massimo.

Tabella riassuntiva sulla propagazione delle incertezze massime

	Relazione tra z e (x,y)	Relazione tra gli errori Δz e $(\Delta x, \Delta y)$ (errori massimi)
1	$z = x + y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
2	$z = x - y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
3	$z = x \cdot y$	$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
4	$z = x/y$	$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
5	$z = x^n$	$\frac{\Delta z}{z} = n \frac{\Delta x}{x}$
6	$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x}$
7	$z = e^x$	$\frac{\Delta z}{z} = \Delta x$

Tabella 1

Alcune derivate elementari *u* e *v* indicano funzioni arbitrarie di *x*, *a* ed *n* sono delle costanti		
$\frac{dx}{dx}=1$	$\frac{da}{dx}=0$	$\frac{d}{dx}(au)=a\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$
$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$	$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}[u(v)]=\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$

Nell’addizione (e nella sottrazione) il numero delle cifre significative del risultato è determinato da quella dell’addendo più incerto: *si fermano le cifre significative della somma in corrispondenza della più arretrata (a sinistra) tra le posizioni delle ultime cifre significative degli addendi*.
Non e’ importante il numero di cifre significative ma la loro posizione.

Esempio

$$
\begin{array}{rl}
3.3 & + \\
23.424 & + \\
\underline{12.21} & \underline{=} \\
38.934 &
\end{array}
$$

38.9

Nella divisione e nella moltiplicazione il risultato ha un numero di cifre significative pari a quelle del numero che ne possiede meno di tutti.

$$\begin{array}{l} \overbrace{3.40}^{\text{3 cifre significative}} \qquad \times \\ \underline{12.2321 \ =} \\ 41.58914 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{41.6}^{\text{3 cifre significative}}$$