Lecce- XI scuola estiva di fisica - 2018
Mirella Rafanelli

I sistemi estesi

La dinamica oltre il punto..

Lecce- XI scuola estiva di fisica - 2018
Mirella Rafanelli

Nota bene: quanto segue serve come strumento di lavoro per la scuola estiva ed è una estrema semplificazione di una parte di meccanica dei sistemi estesi. L'obiettivo non è di sostituirsi in alcun modo a un buon testo di fisica generale, ma solo di mettere in condizione anche chi non ha mai incontrato l'argomento di svolgere alcuni problemi e attività di laboratorio proposte durante questa scuola

I sistemi estesi

La dinamica oltre il punto..

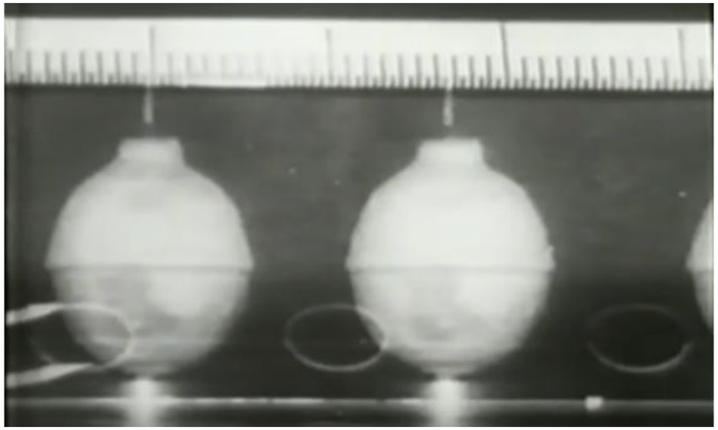
Le tre leggi della dinamica

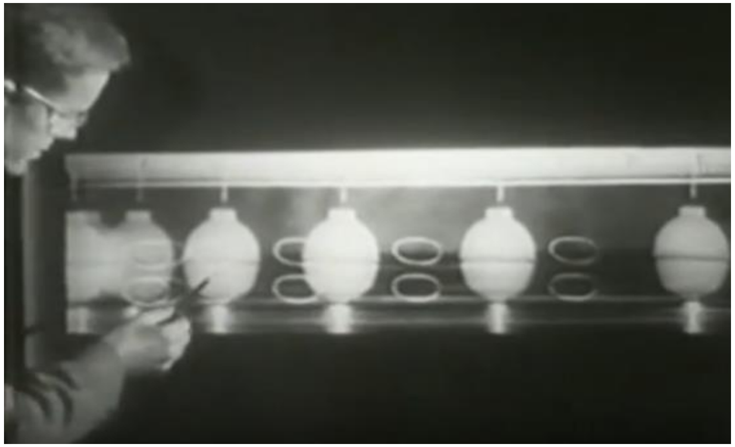
Le prime 2 si riferiscono ad un solo corpo , se non ci preoccupiamo dell'origine delle forze:

La I legge (principio di inerzia) : Un corpo su cui agiscono forze che si bilanciano, cioè con somma vettoriale nulla, conserva il suo stato di moto.

La II legge (la “legge fondamentale della dinamica”) :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$





Ma le forze non sono mai sole!

La III legge:

Se su un corpo A agisce una forza $\vec{F}$ per effetto della presenza di un altro corpo B, allora su B agisce una forza $-\vec{F}$ per effetto della presenza di A

Dall'Amaldi

Da questo principio derivano conseguenze particolarmene utili quando si vuole studiare il moto o l'equilibrio di corpi estesi o sistemi di corpi , che siano continui o discontinui , rigidi o flessibili.

Foto di Kim Taylor

Una delle conseguenze del III principio è che il centro di massa di un sistema materiale con massa totale M costante, si comporta come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e alla quale si applica la risultante delle forze esterne.

Da Wikipedia

In fisica, in particolare in meccanica classica, il **centro di massa** o * **baricentro** di un sistema è il punto geometrico corrispondente al valor medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio. Nel caso particolare di un corpo rigido, il baricentro ha una posizione fissa rispetto al sistema.

*va bene quando un corpo è immerso in un campo di gravità uniforme (come avviene, con buona approssimazione, sulla superficie terrestre)

Esempi facili:
1)2 masse che "esplodono" (disegno dall'Amaldi)

Forze uguali e contrarie che agiscono nello stesso tempo significano uguale e contraria variazione della quantità di moto (teorema dell'impulso) . Perciò se i 2 vagoni erano fermi all'inizio, in qualunque istante sarà

$$m_1 v_1 = - m_2 v_2$$

Cioè i due vagoni avranno velocità inversamente proporzionale alla massa e di verso opposto

E in qualunque istante le distanze percorse saranno anch'esse inversamente proporzionali alle masse

$$m_1 x_1 = - m_2 x_2$$

Se individuiamo come

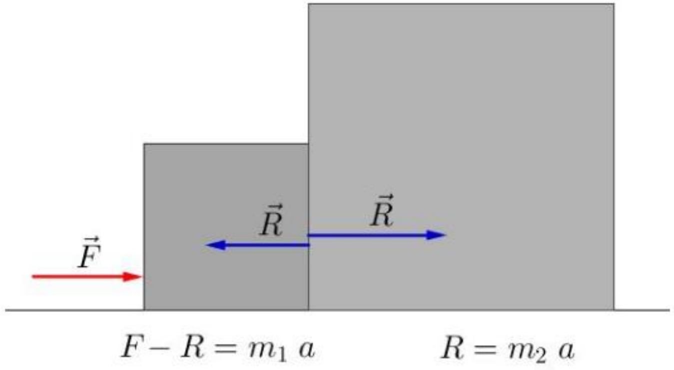
centro di massa tra 2 masse il punto che divide la distanza tra le masse in parti che sono inversamente proporzionali alle masse stesse questo punto rimane videntemente fermo

Allo stesso modo se consideriamo **l'urto tra 2 masse uguali** di cui una va a urtare (senza attrito) con velocità v una massa ferma in tutti i vari casi di

- urto elastico (la massa urtante si ferma e l'altra prosegue con velocità v)
- urto completamente anelastico (proseguono attaccate con velocità v/2)
- qualunque caso intermedio

la velocità del c.di m. sarà v/2 sia prima che dopo l'urto.

Anche nel caso di 2 masse spinte insieme da un'unica forza F esterna risultante



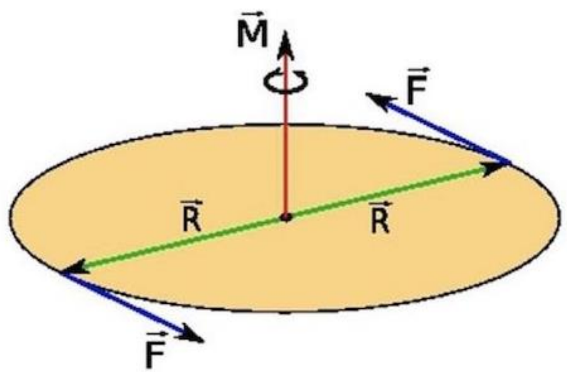
Se si sommano membro a membro le due equazioni si ricava

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Cioè l'accelerazione del cento di massa è determinata solo dalla forza esterna e dalla massa totale.

Questa legge è generale, se si considera un sistema di corpi nel suo insieme, ma dobbiamo avere ben chiare quali sono le forze che complessivamente agiscono sul sistema e il fatto che l'informazione che ricaviamo riguarda solo il moto del baricentro.
Inoltre è impossibile estendere le conclusioni a cui siamo appena giunti (cioè quella di considerare solo forze esterne e moto del baricentro) alle variazioni di energia cinetica di un sistema

Ad esempio nel caso in cui a un disco fermo sono applicate 2 forze come in figura , anche se le forze sono uguali e contrarie, potremo sì dire che il baricentro del sistema rimane fermo, come anche la sua quantità di moto (somma vettoriale delle quantità di moto di tutte le piccole masse da cui si puo' pensare composta la ruota) ma non potremo certi dire che l'energia cinetica (grandezza scalare!) rimane nulla



Rotazioni

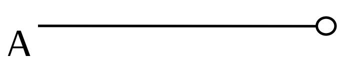
Riassumendo : Studiare il moto dei corpi come se fossero puntiformi è una semplificazione utilissima in molti casi, ma non è praticabile in altri casi, per es. quando un corpo esteso ruota.

Si può però stabilire un utile

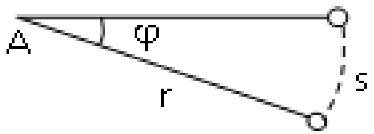
Parallelismo tra grandezze del moto lineare e del moto rotatorio

Infatti, molto di quello che sappiamo sul moto lineare può essere utilmente esteso al moto rotatorio.

Partiamo da un sistema rigido molto semplice: una massa m “puntiforme” attaccata ad un’asta rigida di lunghezza l e massa trascurabile, libera di ruotare in un piano   intorno all’estremità A opposta alla massa.



Se l'asta ruota, descrivendo un angolo φ, la massa si sposta descrivendo un arco di lunghezza s



Se φ è espresso in radianti, avremo la relazione

$s = r\varphi$

Ricordando che $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ e che r è costante, possiamo esprimere la velocità lineare nella forma $v = \dfrac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega$ (ω è la velocità angolare)

Analogamente, per l'accelerazione possiamo scrivere $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = r\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$

Se indichiamo con α l'accelerazione angolare

$\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ potremo scrivere $a = r\alpha$

Riassumendo, abbiamo :

$$s = r\ \varphi$$
$$v = r\ \omega$$
$$a = r\ \alpha$$

Tranne che per un fattore costante r, le grandezze spostamento, velocità e accelerazione sono uguali e sono legate da formule del tutto sovrapponibili, in quanto la loro formulazione matematica è identica, sia se ci si riferisce ai valori medi che a quelli istantanei.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Questo ci permette di ***trasferire senza variazioni le leggi del moto uniforme e uniformemente accelerato dal moto lineare a quello rotatorio***

Moto uniforme

lineare | *circolare*

$$s(t) = s_0 + vt$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

Moto uniformemente accelerato

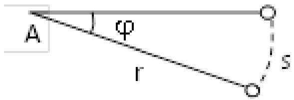
$$v(t) = v_0 + at$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Estendiamo il parallelismo dalla cinematica alla dinamica
Studiamo il lavoro fatto dalla forza di gravità sul sistema precedente se l'asta, inizialmente orizzontale, viene lasciata libera di ruotare su un piano verticale.



Se consideriamo un angolo φ ragionevolmente piccolo, lo spostamento s può essere considerato parallelo alla forza di gravità e il lavoro sarà dato semplicemente da

L = F s

Al termine del piccolo spostamento, visto che l'energia cinetica di partenza era nulla, il valore dell'energia cinetica finale sarà pari al lavoro compiuto dalla forza di gravità.
Possiamo usare indifferentemente le grandezze relative al moto lineare

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

Possiamo usare indifferentemente le grandezze relative al moto lineare o quelle del moto rotatorio

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

$$Fr\varphi = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Forza di gravità e raggio, nel breve tratto considerato, si possono considerare perpendicolari, perciò sostituiamo nella formula l'espressione del **Momento della forza**

$$M = Fr$$

E introduciamo una nuova grandezza, il **momento di Inerzia,** che per il nostro semplice sistema rispetto all'asse di rotazione passante per A è

$$I = mr^2$$

La relazione tra lavoro ed energia cinetica può essere scritta (ripetiamo, in questo caso in cui l'energia cinetica iniziale è nulla, altrimenti il lavoro è uguale alla *variazione* dell'energia cinetica)

$$M\varphi = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Se il moto continua, F ed s non saranno più perpendicolari, ma possiamo risparmiarci di suddividere la traiettoria in piccole parti, calcolare per ogni parte il momento della forza e il contributo al lavoro per determinare la variazione di energia cinetica. Infatti, in assenza di attrito l'unica forza che fa lavoro è la forza di gravità, che è conservativa. Perciò per ogni tratto percorso l'energia cinetica acquistata sarà uguale e opposta alla variazione di energia potenziale, che potrà essere semplicemente calcolata dal dislivello.

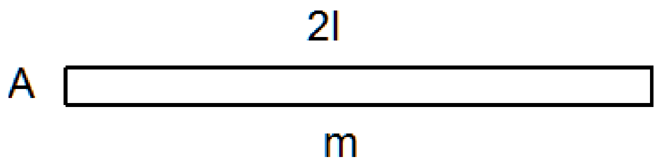
Sottolineiamo le nuove **analogie**:

Moto lineare	Moto circolare
massa m	momento di inerzia I
forza F	momento della forza M
lavoro Fs (se F parallela ad s)	lavoro $M\varphi$ (M ripetto all'asse di rotazione)
energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2$	energia cinetica $\frac{1}{2}I\omega^2$

Dai corpi puntiformi ai corpi estesi

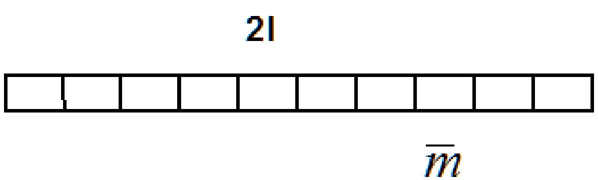
Il moto del sistema appena visto poteva essere studiato senza introdurre nuove leggi e nuove formule, ma queste possono rivelarsi estremamente utili nel moto di corpi estesi

Consideriamo una situazione simile alla precedente, ma con la massa m distribuita uniformemente lungo una sbarra di lunghezza 2l.



Se la sbarra è vincolata in A e ruota in un piano verticale, possiamo verificare che il momento della forza di gravità è uguale al caso precedente, cioè equivale a quello che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata al centro dell'asta.

Consideriamo l'asta come la somma di n piccole masse $\bar{m}$ attaccate insieme



e sommiamo i momenti della forza di gravità per le n masse m , ciascuna alla propria distanza $\bar{r}$.

$$M = \sum \bar{m} g \bar{r} = \bar{m} g \sum \bar{r}$$

La somma delle distanze è pari a n volte la distanza media l ,

$\sum \bar{r} = nl$ e poiché $n\bar{m}$ equivale alla massa totale dell'asta avremo, come potevamo prevedere,

$M = mgl$ come se tutta la massa fosse concentrata a metà asta.

A questo punto si sarebbe tentati di calcolare anche l'energia cinetica acquistata dal sistema come se la velocità che "conta" fosse quella del centro di massa. Avremmo come conseguenza che il moto della sbarretta uniforme lunga 2l sarebbe uguale a quello precedente, con la massa concentrata all'estremità di un'asta di massa trascurabile di lunghezza l,ma lavorando sul sistema di n piccole masse $\bar{m}$ attaccate insieme, si vede che il calcolo non è altrettanto semplice.

Infatti l'energia cinetica totale , visto che sia $\bar{m}$ che ω sono costanti, è data da

$$E_{cin} = \sum \frac{1}{2} \overline{m}\overline{v}^{2} = \frac{1}{2} \overline{m} \sum \omega^{2} \overline{r}^{2} = \frac{1}{2} \overline{m} \omega^{2} \sum \overline{r}^{2}$$

ma la media del valore di $\overline{r}^{2}$ non è semplicemente il quadrato della media aritmetica. Se raccogliamo diversamente i termini nell'espressione precedente

$$E_{cin} = \sum \frac{1}{2} \overline{m}\overline{v}^{2} = \omega^{2} \frac{1}{2} \sum \overline{m}\overline{r}^{2}$$

$$E_{cin} = \sum \frac{1}{2} m\overline{v}^2 = \omega^2 \frac{1}{2} \sum m\overline{r}^2$$

ritroviamo i momenti di inerzia delle singole masse.
Indichiamo con I la somma dei singoli momenti di inerzia

$$I = \sum m\overline{r}^2$$

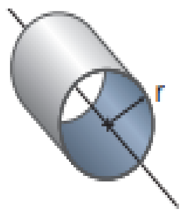
e potremo riscrivere l'equazione

Lavoro = variazione dell' energia cinetica
nella forma già vista

$$M\varphi = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Il calcolo della sommatoria, per questo come per altri corpi di forma regolare, costituisce una semplice applicazione di calcolo infinitesimale. Se ancora non si conosce il calcolo infinitesimale, si possono trovare i valori dei momenti di inerzia in tabelle sui libri di meccanica o in siti web. Vedi ad es.:

MOMENTI DI INERZIA DI ALCUNI CORPI RIGIDI

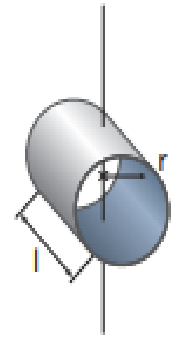


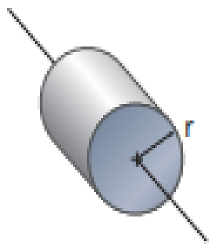
Guscio cilindrico, rispetto all'asse

$$I = mr^2$$

Guscio cilindrico, rispetto a un diametro passante per il centro

$$I = \frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$$



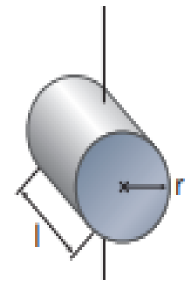


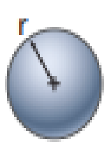
Cilindro pieno, rispetto all'asse

$$I = \frac{1}{2} mr^2$$

Cilindro pieno, rispetto a un diametro passante per il centro

$$I = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} ml^2$$



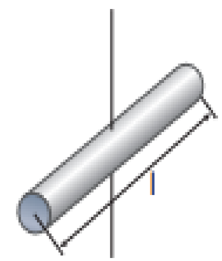


Sfera piena, rispetto a un diametro

$$I = \frac{2}{5} mr^2$$

Asta sottile, rispetto a una retta perpendicolare passante per il suo centro

$$I = \frac{1}{12} ml^2$$



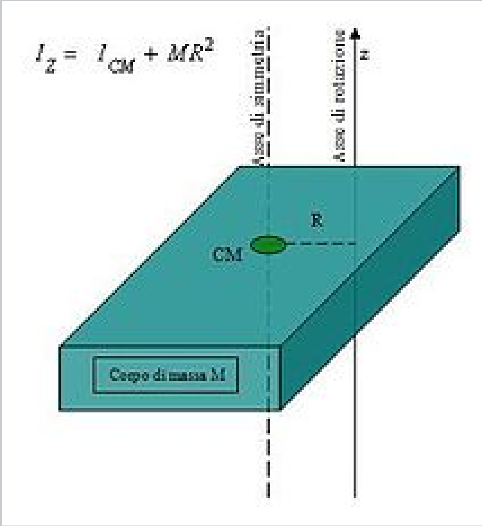
DallAmaldi

Il **teorema di Huygens-Steiner**, o **teorema degli assi paralleli**, permette di calcolare il momento di inerzia di un solido rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa evitando in molti casi (dove è presente una struttura simmetrica) il laborioso calcolo diretto.

Enunciato [modifica | modifica wikitesto]

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse *a*, parallelo ad un altro *c* passante per il centro di massa, si ottiene sommando al momento di inerzia iniziale rispetto a *c* il prodotto tra la massa del corpo stesso e il quadrato della distanza tra gli assi *c* ed *a*.

$$I_z = I_{cm} + Md^2.$$



Teorema e figura

Da Wikipedia