APPUNTI DI ALGEBRA E GEOMETRIA

Giovanni Calvaruso

N.B.: Queste note sono realizzate ad esclusivo uso interno per il corso di Algebra e Geometria del corso di Laurea in Ingegneria Industriale dell'Universitá del Salento, a.a. 2010/11. Come tali, non hanno alcuna pretesa di completezza, e sono da intendersi come un puro supporto al corso stesso, che non può in alcun modo sostituirsi all'apprendimento fornito dalle lezioni.

PROGRAMMA DEL CORSO:

PARTE INTRODUTTIVA:

1) Matrici, determinanti e sistemi lineari

GEOMETRIA ANALITICA:

2) Vettori geometrici
3) Geometria analitica del piano
4) Coniche
5) Geometria analitica dello spazio

ALGEBRA LINEARE:

6) Spazi vettoriali
7) Applicazioni lineari
8) Autovalori ed autovettori
9) Spazi euclidei

TESTI ED APPROFONDIMENTI:

A. SANINI, Lezioni di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.

A. SANINI, Esercizi di Geometria, Levrotto e Bella, Torino.

G. DE CECCO e R. VITOLO, Note di Geometria e Algebra (disp. in Biblioteca).

G. CALVARUSO e R. VITOLO, Esercizi di Geometria ed Algebra Lineare (disp. in Biblioteca).

R. MARINOSCI, Complementi di Geometria e Algebra (Coniche e quadriche) (disp. online).

Richiami sulle strutture algebriche

Definizione. Sia A un insieme. Una *operazione* (o *legge di composizione interna*) in A è un'applicazione

$$\circ\colon A \times A \to A, \qquad (a,b) \mapsto a \circ b,$$

che ad ogni coppia ordinata (a,b) di elementi di A fa corrispondere un elemento $c = \circ(a,b) = a \circ b$, che verifica la *proprietà associativa:*

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c, \qquad \forall a,b,c \in A.$$

Esempio. Addizione e moltiplicazione sono leggi di composizione in $\mathbb{Z}$.

Definizione. Un *gruppo* $(G, \circ)$ è un insieme G, con una operazione $\circ$, tali che

1. Per ogni $a, b, c \in G$ si ha

   $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ <u>proprietà associativa.</u>

2. Esiste un elemento $u \in G$ tale che $\forall a \in G$ si ha

   $a \circ u = u \circ a = a$ <u>esistenza dell'elemento neutro.</u>

3. Per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che

   $a \circ a' = a' \circ a = u$ <u>esistenza dell'inverso.</u>

   Si dimostra che u ed a' sono unici.

   Se oltre agli assiomi (1), (2), (3), vale l'assioma

4. $\forall a, b \in G$

   $a \circ b = b \circ a$ <u>proprietà commutativa,</u>

allora il gruppo si dice *commutativo* o *abeliano*.

Esempio. $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano,

$(Z, \cdot)$ NON è un gruppo (quali assiomi di gruppo non soddisfa?).

Definizione. Un *campo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ è un insieme $\mathbb{K}$ (non vuoto), con due leggi di composizione interna, $+$ e $\cdot$, tali che

1. $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo abeliano (il cui elemento neutro indichiamo con 0).

2. $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano (dove $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$).

3. $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ vale la proprietà distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$:

   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,, \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a\,.$$

Esempi ed esercizi.

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, con le usuali operazioni di somma e prodotto, sono esempi di campi.

- $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ è un campo.
  ATTENZIONE: nel fare riferimento ai campi, SI ESCLUDE implicitamente o esplicitamente il campo $\{0, 1\}$ (detto di caratteristica 2), perché in esso "2" $= 1 + 1 = 0$.

MATRICI

Definizioni

Sia $\mathbb{K}$ un campo ($\neq \{0,1\}$). Si chiama *matrice di tipo $m \times n$ sul campo* $\mathbb{K}$ una tabella di $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{K}$, disposti in modo da formare m righe ed n colonne:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'elemento generico di A, cioè l'elemento che si trova sull'i-esima riga e j-esima colonna, si indica con a_{ij}. In breve si scrive

$$A = (a_{ij}), \qquad i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Se $m \neq n$ la matrice A si dice *rettangolare*.
se $m = n$ A si chiama *quadrata*.
Se $m = 1$ la matrice A si dice *matrice riga*.
se $n = 1$ la matrice A si chiama *matrice colonna*.

Indichiamo con $\mathbb{K}^{m,n}$ l'insieme di tutte le matrici di m righe ed n colonne a coefficienti in $\mathbb{K}$. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, allora

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j\,.$$

Si chiama *trasposta* di $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ la matrice $A^T \in \mathbb{K}^{n,m}$ ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne:

$$A = (a_{ij}) \quad \Rightarrow \quad A^T = (a_{ji})\,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & \pi \end{pmatrix}\,, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & \pi \end{pmatrix}\,.$$

Casi particolari di matrici quadrate sono:

A *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$ (ossia, $A = A^T$).

A *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$ ($A = -A^T$).

A *diagonale* se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$.

A *unità* o *identica* se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$; $a_{ii} = 1$.

Operazioni su matrici

Somma di due matrici. Due matrici A e B sono *sommabili* se entrambe appartengono a $\mathbb{K}^{m,n}$. La matrice *somma* $C = A + B$ è per definizione $C = (c_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ con

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, .$$

La matrice O avente tutti gli elementi 0 è la matrice *nulla*, e soddisfa

$$A + O = A \qquad \forall A \, ,$$

e l'*opposta* di A è la matrice $A' = -A$, dove $a'_{ij} = -a_{ij}$ $\forall i, j$.

Prodotto di uno scalare per una matrice. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, la matrice λA, *moltiplicazione di A per lo scalare λ*, è la matrice

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \quad \forall i, j$$

Esercizio: Dimostrare che $(A + B)^T = A^T + B^T$.

PROPRIETÀ:

1) $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativa),

2) $A+B = B+A$ (commutativa),

3) $A+O = A = O+A$ (elemento neutro),

4) $A+(-A) = O = (-A)+A$ (inverso rispetto alla somma),

5) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ (distributiva),

6) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ (distributiva),

7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (associativa),

8) $1A = A$ (elemento neutro)

Osservazione. $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un gruppo commutativo.

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$

calcolare $2A - 3B$.

Prodotto righe per colonne. La matrice A è *moltiplicabile (righe per colonne*) per la matrice B se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{K}^{n,p}$. La matrice *prodotto* di A e B è la matrice $C = AB \in \mathbb{K}^{m,p}$, con $C = (c_{ij})$ dove

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

è il prodotto della riga i-esima di A per la colonna j-esima di B.

Importante!: In generale, non ha senso anche la moltiplicazione BA. Tuttavia, *anche se entrambe hanno senso e sono dello stesso tipo*, può comunque accadere che

$$AB \neq BA\,.$$

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\ e$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA\,.$$

Si osservi che (come nell'esempio) *si può avere $AB = O$ senza che A o B siano matrici nulle*.

Proprietà:

1) $A(BC) = (AB)C$,

2) $A(B + C) = AB + AC$,

3) $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$,

4) $AO = O'$,

5) $AI_n = A = I_m A \qquad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$,

Esempi ed esercizi.

- Se $A = (1, 0, 3)$, verificare che
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A{\cdot}A^T = (10) \, , \; A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} .$$

- Provare che $(AB)^T = B^T A^T$.

- Se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, provare che AA^T e $A^T A$ sono simmetriche.

- Si osservi che se A e B sono simmetriche, in generale AB non è simmetrica:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Se A è una matrice quadrata, allora

$$A^2 = AA, \dots, A^h = A^{h-1}A\,.$$

Se $AB = BA$, allora $(AB)^k = A^k B^k$. Questo non è vero, in generale, se $AB \neq BA$.

Una matrice REALE QUADRATA $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è detta *ortogonale* se

$$A^T A = I = AA^T\,.$$

Esercizi.

- Trovare tutte le potenze della matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

- Provare che la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$
è ortogonale.

- Siano $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Vedere se
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2\,.$$

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta *invertibile* se esiste una matrice $A' \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che

$$AA' = I = A'A\,.$$

Si scrive in tal caso $A' = A^{-1}$.
Si noti che se A è ortogonale, allora $A^{-1} = A^T$.
Vedremo in seguito un criterio che ci permette di decidere quando una matrice è invertibile.

Esercizio: Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire se sono invertibili e in tal caso trovare l'inversa.

Nota. Le matrici sono molto utili in Matematica: permettono di semplificare complicate espressioni considerando tutta la tabella come un unico ente. Le matrici intervengono nella schematizzazione di molti fenomeni, dipendenti da un numero finito di parametri.
Come vedremo più avanti, se vogliamo risolvere un sistema di equazioni lineari, una matrice ci dà tutte le informazioni necessarie per risolverlo.

Determinante di una matrice

Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$, chiamiamo *determinante* di A l'elemento di $\mathbb{K}$

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}\,,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$.

In termini più semplici, *il determinante* di una matrice **quadrata** è un numero, che si associa alla matrice stessa, e ne evidenzia alcune importanti proprietà. Si può descrivere come calcolare tale numero *in maniera ricorsiva*, ossia, per matrici quadrate via via più grandi:

Se $n = 1$, allora $\det A = a_{11}$.

Se $n = 2$, allora

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,,$$

se $n = 3$, allora

$$\begin{aligned} \det A \;\; = \;\; & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) \\ & -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ & +a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Illustriamo la *Regola di Laplace* per il calcolo del determinante:

Fissato un elemento a_{ij} di A, si chiama *minore complementare* di a_{ij} la sottomatrice di A di ordine $n-1$, ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna. Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} o *cofattore* di a_{ij}, il numero

$A_{ij} = (-1)^{i+j}$ det(minore complementare di a_{ij}).

Teorema: Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + \cdots + a_{rn}A_{rn}\,,$$

dove r è una fissata riga (scelta arbitrariamente), oppure

$$\det A = a_{1c}A_{1c} + \cdots + a_{nc}A_{nc}\,,$$

dove c è una fissata colonna (scelta arbitrariamente).

Questa regola può essere assunta anche come definizione ricorsiva di determinante:

$$\det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_i a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Quindi det è un'applicazione da $\mathbb{K}^{n,n}$ in $\mathbb{K}$.

Dal teorema di Laplace segue immediatamente che

1. $\det A = \det A^T$;

2. se la matrice B si ottiene da A moltiplicando una linea (o colonna) di A per un numero $k \in \mathbb{K}$ e lasciando invariate le altre linee (o colonne), allora $\det B = k \det A$.

Esempi ed esercizi.

- Se $I \in \mathbb{K}^{n,n}$, vale $\det I = 1$, $\det(-I) = (-1)^n$.

- Provare che $\forall k \in \mathbb{K}$ si ha $\det(kA) = k^n \det A$.

- Si calcoli $detA$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (detA = -5).$$

- Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si calcoli $detA$, dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ -1 & -k & k+2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proprietà:

1. se le matrici A e B differiscono soltanto per lo scambio di due linee parallele, allora $\det B = -\det A$;

2. se A ha due linee uguali, allora $\det A = 0$;

3. se A ha due linee proporzionali, $\det A = 0$;

4. se B si ottiene da A aggiungendo ad una certa linea di A un'altra linea di A moltiplicata per un fattore di proporzionalità, allora $\det B = \det A$;

5. la somma degli elementi di una linea per i complementi algebrici di un'altra linea è zero.

Teorema di Binet: Se A e B sono due matrici quadrate di ordine n, si ha

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)\,.$$

Quindi, in generale, $AB \neq BA$, tuttavia $\det(AB) = \det(BA)$.

Matrici invertibili

Proposizione: Se A è invertibile, allora

1. $\det A \neq 0$;

2. $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile, e si prova che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj(A)\,,$$

dove $Adj(A) = (A^T_{ij})$, detta *aggiunta classica di* A, è la matrice che ha al posto (i,j) il cofattore A_{ji} di a_{ji} (si noti lo scambio di indici).

Esempi ed esercizi.
1) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

2) Trovare l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

(Si ha $\det A = -8 \neq 0$,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1/2 \\ -12 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,,$$

e $A^{-1} = -\frac{1}{8} Adj(A)$)

Combinazioni lineari

Date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $X = (x_j) \in \mathbb{K}^{n,1}$ e $Y = (y_i) \in \mathbb{K}^{m,1}$,

$$Y = AX \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{cases}$$

cioè,

$$Y = AX \Leftrightarrow Y = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n,$$

dove $C_1, \ldots, C_n$ sono le colonne di A. Si dice in tal caso che Y è *combinazione lineare* delle colonne di A, con coefficienti $x_1, \ldots, x_n$.

Analogamente, date $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $X' = (x'_j) \in \mathbb{K}^{1,m}$ e
$Y' = (y'_i) \in \mathbb{K}^{1,n}$,

$$Y' = X'A \Leftrightarrow Y' = x_1 R_1 + \cdots + x_n R_m,$$

dove $R_1, \ldots, R_n$ sono le righe di A. Si dice in tal caso che Y' è *combinazione lineare* delle righe di A, con coefficienti $x'_1, \ldots, x'_n$.

Rango di una matrice

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,m}$. Da A possiamo estrarre sottomatrici quadrate di ordine r, $1 \leq r \leq \min(n, m)$, formate da elementi che stanno su r righe ed r colonne di A. Di queste sottomatrici quadrate, dette *minori*, si può fare il determinante e vedere se non è nullo.

Definizione: Il *rango* $rg(A)$ di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ è dato dal **massimo** ordine dei suoi minori con determinante non nullo.

Teorema: $rg(A) = p \Leftrightarrow p$ è il massimo numero di righe o colonne di A linearmente indipendenti, cioè, nessuna delle quali si può ottenere come combinazione lineare delle restanti(righe o colonne).

$rg(A) = p > 0$ vuol dire che

1. esiste almeno un minore di ordine p con determinante diverso da 0; e

2. tutti gli eventuali minori di ordine $p+1$ hanno determinante nullo.

Naturalmente, $rg(A) = 0 \Leftrightarrow$ la matrice è nulla.

Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (quadrata), allora

$$rg(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ invertibile.}$$

Esempi ed esercizi.

1) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, poiché $\det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \neq 0$, e tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo.

2) Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare di λ,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ 2 & 1 & \lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si vede che $rg(A) = 2\ \forall\lambda$; $rg(B) = 3$ per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$, mentre $rg(B) = 2$ per $\lambda = -2$ e $rg(B) = 1$ per $\lambda = 1$.

3) Calcolare il rango della seguente matrice B al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det B = 0$, si ha che $rg(B) \leq 3$. Inoltre,

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \Rightarrow\ rg(B) = 3\ \forall\lambda$$

Sistemi lineari

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

I numeri $a_{ij} \in \mathbb{K}$ sono detti *coefficienti* e $b_i \in \mathbb{K}$ *termini noti*. Se $b_i = 0$ $\forall i$ il sistema si dice *omogeneo*.

In forma matriciale:

$$AX = B,$$

dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti, X è la colonna delle incognite e B quella dei termini noti, cioè

$$X^T = (x_1, \ldots, x_n)\,, \qquad B^T = (b_1, \ldots, b_n)\,.$$

I problemi fondamentali che si presentano sono:

1. <u>esistenza</u> delle soluzioni o compatibilità del sistema (aspetto **qualitativo**);

2. determinazione del <u>numero</u> delle soluzioni (aspetto **quantitativo**);

3. <u>calcolo esplicito</u> di tutte le eventuali soluzioni (aspetto **computazionale**).

Una **soluzione** del sistema è una n-pla $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ che soddisfi simultaneamente tutte le sue equazioni.

Problema 1 (qualitativo). Esso è risolto completamente dal *Teorema di Rouché-Capelli*:

$$\text{il sistema è compatibile} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}),$$

dove $\tilde{A} = (A, B)$ è la *matrice completa* del sistema.

Esempio. Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è incompatibile. Infatti $1 = rg(A) \neq rg(\tilde{A}) = 2$.

Problema 2 (quantitativo). Se $rg(A) = rg(\tilde{A}) = p$. Si hanno i seguenti casi:

$$\begin{array}{ll} p = n & \text{una sola soluzione,} \\ p < n & \infty^{n-p} \text{ soluzioni,} \end{array}$$

Con '∞^{n-p} soluzioni' si intende che le infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri in $\mathbb{K}$.

Osservazione. Ne segue che se $p = m < n$ (*sistema normale*) il sistema è sempre compatibile.

N. B. *La risoluzione di un sistema compatibile di rango p si riconduce sempre a quella di un sistema di p equazioni in p incognite (con matrice dei coefficienti non singolare): basta considerare come parametri le $n-p$ incognite, i cui coefficienti non concorrano a formare il minore di rango p.*

Problema 3 (computazionale). Si tratta dunque di risolvere un sistema con $n = m$ e $\det A \neq 0$ (**sistema di Cramer**):

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Il Teorema di Cramer ci dà l'espressione esplicita delle soluzioni:

$$x_k = \frac{det(A^{(k)})}{det(A)},$$

dove $A^{(k)}$ è la matrice ottenuta da A sostituendo alla k-esima colonna di A la colonna dei termini noti.

Nota: sistemi omogenei. I sistemi *omogenei*, ossia sistemi del tipo

$$(*) \quad AX = O,$$

ammettono *sempre* la soluzione nulla $X = O$. Siamo perciò interessati alle soluzioni non nulle, dette anche *autosoluzioni* o *soluzioni proprie*.

Se X' è una soluzione di $(*)$, allora $\lambda X'$ è una soluzione $\forall\lambda$; se X' e X'' sono soluzioni di $(*)$, allora anche $X'+X''$ è una soluzione. Chiaramente $rg(A) = rg(\tilde{A})$, e se $p = rg(A)$ allora le soluzioni sono ∞^{n-p}.

Ad ogni sistema lineare non omogeneo $AX = B$ si può associare il sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

Si osservi che se X_0 è una soluzione particolare di $AX = B$ e $\tilde{X}$ la soluzione generica di $AX = 0$, allora $\tilde{X} + X_0$ è la soluzione generica di $AX = B$; infatti

$$A(\tilde{X} + \tilde{X}_0) = A\tilde{X} + A\tilde{X}_0 = O + B = B.$$

Esempi.

1) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \right).$$

Poiché $\det(A) = -4 \neq 0$, il sistema è di Cramer, e quindi ammette un'unica soluzione.

Applicando il metodo risolutivo dei sistemi di tipo Cramer:

$$x = \frac{|A^{(1)}|}{|A|} = 0,\ y = \frac{|A^{(2)}|}{|A|} = 1,\ z = \frac{|A^{(3)}|}{|A|} = 0,$$

per cui, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ è l'unica soluzione del sistema.

2) Risolviamo il sistema

$$(*) \qquad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(A \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} \right).$$

Poiché $p = rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2$ il sistema è compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni ($n-p = 3-2 = 1$). Esso corrisponde al sistema di tipo Cramer

$$\begin{cases} 2y = z \\ 2x = 6 - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 3 \\ (y = t) \\ z = 2t \end{cases}$$

Il secondo sist. (di Cramer) ha l'unica soluzione $(x, z) = (-3t + 3, 2t)$ (dipendente dal param. t). Quindi, il sistema dato ha per soluzioni $(x, y, z) = (-3t + 3, t, 2t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Altro metodo: Il sistema omogeneo associato è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione generale
$(x, y, z) = (h, -1/3\,h, -1/3\,h)$. Una soluzione particolare di $(*)$, ottenuta ad esempio ponendo $z = 0$, è $(3, 0, 0)$. Quindi, *tutte* le soluzioni di $(*)$ sono date da

$$(x, y, z) = (h + 3, -1/3\,h, -1/3\,h), \qquad h \in \mathbb{R}.$$

Ponendo $t = -1/3\,h$, ci si rende conto immediatamente che gli insiemi

$$\{(-3t + 3, t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e}$$

$$\left\{\left(h + 3, -\frac{1}{3}h, -\frac{2}{3}h\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$$

coincidono.

3) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

Ovviamente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ 7 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Poiché $p = rg(A) = 1 \neq 2 = rg(\tilde{A})$, il sistema NON è compatibile.

Esempi ed Esercizi.

1) Verificare che la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

è ortogonale, per ogni valore reale di θ. Ripetere per

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

2) Trovare A^{-1} e B^{-1}, dove

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Trovare, per ogni $k \in \mathbb{R}$, il rango delle seguenti matrici A e B. Determinare in particolare i valori reali di k per cui le matrici A e B sono invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 3 & 1+k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-k & 3 & -1 \\ 0 & -1 & k \\ 0 & -k & 2 \end{pmatrix}.$$

4) Discutere il seguente sistema, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, e risolverlo nei casi in cui è compatibile.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ 2x - \lambda z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizi di riepilogo

1) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0,$$

calcolare $2A - 3B$, A^2, B^T, AB, BA.

2) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolarne tutti i possibili prodotti a due a due.

3) Risolvere il sistema lineare $AX = B$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4) Dire se le seguenti matrici sono invertibili. In caso affermativo, trovarne l'inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\mu \\ \mu - 1 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

6) Al variare di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, determinare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\mu \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

7) Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - y + z + t = 0, \\ x - 2z - t = -1. \end{cases}$$

8) Verificare che i seguenti sistemi lineari sono equivalenti (hanno le stesse soluzioni):

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + y - 4z = 5, \\ x + 3y - 7z = 0, \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x - z = 3, \\ y - 2z = -1. \end{cases}$$

9) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, studiare e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + kz = k, \\ 2y + z = 0, \\ kx + z = k. \end{cases}$$

Richiami sulle relazioni di equivalenza

Definizione. Una *relazione* $\mathcal{R}$ su un insieme A è un sottoinsieme S di $A \times A$. Se $a, b \in A$, si scrive

$$a \, \mathcal{R} \, b \Leftrightarrow (a, b) \in S \, .$$

Una *relazione di equivalenza* in A è una relazione, di solito indicata con il simbolo $\sim$, tale che, $\forall a, b, c \in A$, valgono le seguenti proprietà:

1. $a \sim a$ (<u>proprietà riflessiva</u>)

2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (<u>proprietà simmetrica</u>)

3. $a \sim b$, $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (<u>proprietà transitiva</u>).

Dati $\sim$ una relazione di equivalenza e $a \in A$, si chiama *classe di equivalenza* individuata da a l'insieme

$$[a] = \{x \in A \mid x \sim a\} \, .$$

Le classi di equivalenza dividono l'insieme A in sottoinsiemi mutuamente disgiunti. L'insieme formato dalle classi di equivalenza si chiama *insieme quoziente* di A e si indica $A/\sim$.

Esempio. Sia $\mathcal{R}$ l'insieme delle rette dello spazio (o del piano) euclideo. La relazione

$$r \sim s \quad \Leftrightarrow \quad r \equiv s \text{ o } r, s \text{ complanari e } r \cap s = \emptyset$$

è una relazione di equivalenza (detta *parallelismo*).

La classe di equivalenza $[r]_\sim$ è la *direzione* individuata dalla retta r.

Vettori dello spazio ordinario

Lo spazio V_3

Sia S_3 lo spazio della geometria euclidea. Ogni segmento di estremi A e B individua due segmenti orientati AB e BA aventi orientazioni opposte; ciò è espresso scrivendo che

$$AB = -BA.$$

Nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio introduciamo la seguente relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*

$$AB \sim CD \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1) AB \text{ è parallelo a } CD, \\ (2) \|AB\| = \|CD\|, \\ (3) AB, CD \text{ sono equiversi.} \end{array}$$

Le classi di equivalenza si chiamano *vettori*. Il vettore $\vec{u}$ individuato da $\vec{AB}$, è anche individuato da un qualsiasi altro segmento ad esso equipollente (come $\vec{CD}$). Il rappresentante $\vec{AB}$ di un vettore $\vec{u}$ si dice *vettore $\vec{u}$ applicato in A* e si indica $(\vec{u}, A)$. Si usa anche la notazione $\vec{u} = B - A$.

I segmenti AA, BB, ..., individuano il vettore nullo $\vec{0}$.

Un vettore non nullo è individuato dalla direzione, dal verso e dal modulo. $\mathbf{V}_3$ denota l'insieme dei vettori liberi dello spazio e con $\mathbf{S}_3$ i punti dello spazio. Fissato un punto $O \in \mathbf{S}_3$, ad ogni punto $P \in \mathbf{S}_3$ si può associare un unico vettore $\vec{u} \in \mathbf{V}_3$, ponendo $\vec{u} = \vec{OP}$, e viceversa.

Somma di vettori. Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori. Se si considerano i rappresentanti indicati $\vec{u} = B - A$ e $\vec{v} = C - B$, poniamo

$$\vec{u} + \vec{v} = C - A$$

(che non dipende dai rappresentanti scelti).

Proprietà:

1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + (\vec{v}) + \vec{w}$ (associativa)

2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativa)

3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (elemento neutro)

4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (inverso rispetto alla somma)

Se consideriamo rappresentanti opportuni $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AD}$, allora $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AC}$ è la diagonale del parallelogramma di lati AB e AD, in accordo con quanto si studia in Fisica.

Differenza di vettori: Per definizione, poniamo $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. Se $\vec{u}=B-A$ e $\vec{v}=C-A$, allora $\vec{u}-\vec{v}=B-C$.

Prodotto di un numero reale per un vettore

Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V_3}$. Vogliamo definire $\lambda\vec{u}$.

1. Se $\lambda = 0$, oppure $\vec{u}=\vec{0}$, poniamo $\lambda\vec{u}=\vec{0}$.

2. Se $\lambda \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, il vettore $\lambda\vec{u}$ ha direzione coincidente con $\vec{u}$, verso concorde con quello di $\vec{u}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$, e inoltre
$$\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|.$$

Il numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto *scalare*.

Proprietà:

1) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$,

2) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$,

3) $(\lambda+\mu)\vec{u} = \lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$,

4) $1\vec{u}=\vec{u}$.

Dipendenza lineare

I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente dipendenti* se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $\neq (0, \ldots, 0)$ tale che

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}.$$

Se ad esempio $\lambda_n \neq \vec{0}$, allora

$$\vec{v}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\vec{v}_{n-1},$$

cioè, $\vec{v}_n$ 'dipende' da $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_{n-1}$. Più precisamente, $\vec{v}_n$ è <u>combinazione lineare</u> di $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1}$. In generale, un vettore $\vec{v}$ è *combinazione lineare* di $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ se

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n\,.$$

Indipendenza lineare: I vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbf{V}_3$ si dicono *linearmente indipendenti* se e solo se *non* sono linearmente dipendenti, cioè

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Chiaramente **vale sempre** (sia per vettori indipendenti che dipendenti)

$$\lambda_i = 0\ \forall i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}\,.$$

Significato geometrico: Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbf{V}_3$. Allora

$$\begin{array}{rcl} \vec{v}_1 \text{ dipendente} & \Leftrightarrow & \vec{v}_1 = \vec{0} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ dipendenti} & \Leftrightarrow & \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ paralleli} \\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ dipendenti} & \Leftrightarrow & \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \text{ complanari.} \end{array}$$

$n \geq 4$ **vettori di $\mathbf{V}_3$ sono sempre dipendenti**. Quindi, *in $\mathbf{V}_3$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti* è 3.

Nell'insieme $\mathbf{V}_2$ dei vettori del piano, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 2.

Nell'insieme $\mathbf{V}_1$ dei vettori della retta, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è 1.

Si dice perciò che la **dimensione** della retta è 1 ed una sua base è data da un vettore non nullo $\{\vec{v}_1\}$; la dimensione del piano è 2 ed una sua base è data da 2 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$; la dimensione dello spazio è 3 ed una sua base è data da 3 vettori indipendenti $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base di $\mathbf{V}_3$. Allora, per ogni $\vec{v}$, $\{\vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sono dipendenti, e

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3.$$

La terna di numeri $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ è univocamente individuata, e λ_1, λ_2, λ_3 sono dette le *coordinate* di $\vec{v}$ nella base $\mathcal{B}$. Naturalmente, nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 & \text{ha coordinate} & (1,0,0), \\ \vec{e}_2 & \text{ha coordinate} & (0,1,0), \\ \vec{e}_3 & \text{ha coordinate} & (0,0,1). \end{array}$$

Vediamo ora come condizioni vettoriali si traducano in problemi scalari tramite le coordinate. Siano

$$\vec{u}(u_1, u_2, u_3), \qquad \vec{v}(v_1, v_2, v_3), \qquad \vec{w}(w_1, w_2, w_3).$$

Allora:

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} au_1 + bv_1 + cw_1 = 0 \\ au_2 + bv_2 + cw_2 = 0 \\ au_3 + bv_3 + cw_3 = 0. \end{cases}$$

Si consideri

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Se $rg(A) = p$, allora p è il massimo numero di vettori indipendenti in $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Naturalmente, $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$, e $\lambda\vec{u}=(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

Se consideriamo il riferimento cartesiano affine $\mathcal{R}(Oxyz)$ associato a $\mathcal{B}$ tale che $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ siano i vettori unità sugli assi si ha, con l'usuale simbolismo,

$$\vec{e}_1=\vec{i}, \quad \vec{e}_2=\vec{j}, \quad \vec{e}_3=\vec{k},$$
$$u_1=u_x, \quad u_2=u_y, \quad u_3=u_z.$$

Se $P_i(x_i, y_i, z_i)$ per $i=1,2$, allora

$$\vec{P_1P_2}=\vec{OP_2}-\vec{OP_1}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

Esercizi.

1) Dati i vettori $\vec{v}(1,2,3)$, $\vec{w}(1,1,1)$ e $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(0,1,1)$, $\vec{v}_3(2,2,4)$.

a) Si possono scrivere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ come combinazione lineare di $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$? Se sì, trovare i coefficienti della combinazione lineare.

b) $\vec{v}_2$ è combinazione lineare di $\vec{w}, \vec{v}_1, \vec{v}_3$?

2) Si consideri $\mathbf{V}_2$ ed una sua base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, i vettori

$$\vec{v}_1 = (1-t)\vec{e}_1 + t\vec{e}_2, \qquad \vec{v}_2 = t\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

costituiscono una base di $\mathbf{V}_2$?

3) Siano dati i seguenti vettori di $\mathbf{V}_3$ riferiti alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 = (2-h, 4-2h, 2-h),\\
&\vec{v}_2 = (h, 3h, 2h),\\
&\vec{v}_3 = (1-h, 1-2h, h).
\end{aligned}$$

1. determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ il vettore $\vec{w}(1-2h, 1-h, -5h)$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

2. Esaminare il caso $h = 0$.

Orientazione.

In generale, *orientare* uno spazio significa *fissare* una base ordinata di suoi vettori, e assumerla come positiva.

Una retta r si dice *orientata* se è assegnato un vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$, parallelo ad r. Tale vettore determina un verso di percorrenza su r, che **si sceglie** come positivo.

Un piano π si dice *orientato* se è assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *ordinata* di vettori paralleli a π. Tale base determina un verso di rotazione su π, quello della minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$, che **si sceglie** come positivo. Per convenzione, si sceglie il verso *antiorario* come positivo.

Lo spazio $\mathbf{V}_3$ è *orientato* se è assegnata una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *ordinata* di suoi vettori. Tale base determina una orientazione, che **si sceglie** come positiva, legata al fatto che un osservatore, posto nel semispazio determinato dal piano di $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ in cui c'è $\vec{e}_3$, vede la minima rotazione che porta $\vec{e}_1$ su $\vec{e}_2$ in senso *antiorario*.

Prodotto scalare

Il *prodotto scalare* tra due vettori è l'applicazione

$$g\colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbb{R}, \quad g(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u}=\vec{0} \text{ o } \vec{v}=\vec{0} \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Proprietà:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, <u>commutatività</u>

2. $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$, <u>omogeneità</u>

3. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$, <u>distributività</u>.

Sia $\mathcal{B} = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ una <u>base ortonormale</u> di $\mathbf{V}_3$ (cioè, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sono unitari e mutuamente ortogonali); allora:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\cdot\vec{i}=1, & \vec{j}\cdot\vec{j}=1, & \vec{k}\cdot\vec{k}=1, \\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0, & \vec{j}\cdot\vec{k}=0, & \vec{i}\cdot\vec{k}=0. \end{array}$$

Se $\vec{u} = u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}$, allora si ha

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3.$$

Si osservi che se $\mathcal{B}$ non fosse ortonormale, l'espressione del prodotto scalare non sarebbe così semplice. Si vede facilmente che

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

Dunque, *conoscendo il prodotto scalare*, si può determinare la lunghezza di un vettore e l'angolo tra due vettori.

La *componente ortogonale* di $\vec{v}$ rispetto ad un vettore non nullo $\vec{u}$ è il <u>numero reale</u>

$$v_{\vec{u}} = \|\vec{v}\| \cos\widehat{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v} \cdot \hat{u} \in \mathbb{R}.$$

La *proiezione ortogonale* di $\vec{v}$ su $\vec{u}$ è il <u>vettore</u>

$$\vec{v}_{\vec{u}} = v_{\vec{u}} \, \hat{u}.$$

Prodotto vettoriale

Il *prodotto vettoriale* tra vettori è l'applicazione

$$\wedge \colon \mathbf{V}_3 \times \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3, \quad \wedge(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

così definita:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{cases} \vec{0} & \text{se } \vec{u} \parallel \vec{v} \\ \vec{w} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\vec{w}$ ha:
(i) modulo $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin \widehat{\vec{u}\vec{v}}$,
(ii) direzione perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
(iii) verso tale che la terna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sia equiversa a $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Proprietà:

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$, <u>anticommutatività</u>,
2. $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, <u>omog.</u>
3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, <u>distributività</u>.

Se $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è una base ortonormale, allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Prodotto misto

Il *prodotto misto* di 3 vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_3$ è dato dal numero reale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$. Considerata una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, si ha la seguente espressione analitica:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Significato geometrico dei prodotti vettoriale e misto:

- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \mathcal{A}$, area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

- $|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \mathcal{V}$, volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Esercizi di riepilogo

1) (Rispetto ad una fissata base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$,) si considerino i vettori $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{j} + \vec{k}$. Provare che $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ formano una base, e trovare le componenti di $\vec{x} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ rispetto a tale base.

2) Dati i vettori $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = -3\vec{j}$, $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, calcolare $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$, l'area del triangolo di lati $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il volume del parallelepipedo di lati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

3) trovare la proiezione ortogonale del vettore $\vec{v} = (0, -3, 0)$ sul vettore $\vec{u} = (1, -2, 3)$.

4) Dati i vettori $\vec{a} = (1, -2, 0)$ e $\vec{b} = (3, -1, -1)$,

1. Verificare che i vettori
$$\vec{u_1} = (2, 1, 0)\,, \qquad \vec{u_2} = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -2\right)\,,$$
sono perpendicolari ad $\vec{a}$.

2. Si trovino i vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ perpendicolari a $\vec{b}$ le cui componenti ortogonali ad $\vec{a}$ siano rispettivamente $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$.

5) Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, i vettori $\vec{u} = (h, h-1, 2)$ e $\vec{v} = (5, h, 0)$ sono perpendicolari, e per quali valori sono paralleli.

6) Dati i vettori $\vec{v_1} = (0, -1, -1)$, $\vec{v_2} = (1, 0, 2)$, trovare la giacitura $\vec{a}$ individuata da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ (cioè un vettore perpendicolare al piano individuato da $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$).

7) Si considerino i seguenti vettori

$\vec{u} = \lambda\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\,, \quad \vec{v} = \vec{i} - \lambda\vec{j} + \vec{k}\,, \quad \vec{w} = -2\vec{i} + \mu\vec{k}\,,$

dove $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$.

1. Trovare per quali valori di $\lambda\,, \mu$ esistono vettori $\vec{x}$ tali che
$$\vec{u} \wedge \vec{x} + \vec{x} \wedge \vec{v} = \vec{w}\,.$$
2. Determinare, quando possibile, le componenti di $\vec{x}$ per $\lambda = 1$.

8) Trovare i vettori di modulo 3, perpendicolari ai vettori $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Geometria analitica del piano.

Coordinate cartesiane nel piano.

Un **riferimento ortonormale cartesiano** del piano è individuato da una base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ dei vettori del piano, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y)$.

Sia P un punto del piano.

$$P(x, y) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Fissare un riferimento $RC(O, x, y)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti del piano, i vettori del piano e le coppie di $\mathbb{R}^2$.

Assi coordinati:
asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazione $y = 0$.
asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ del piano,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2},\right).$$

Retta del piano.

Due punti P_1, P_2 non coincidenti individuano una retta r del piano:

$$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2}.$$

Posto $P_i(x_i, y_i)$, $P(x, y)$, il parallelismo si può esprimere in due modi:

a) Equazione cartesiana di una retta del piano:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana della retta:*

$$r : ax + by + c = 0, \qquad (a, b) \neq (0, 0).$$

(a, b) rappresenta un vettore (non nullo) perpendicolare alla retta r. Di conseguenza, $(b, -a)$ rappresenta un vettore parallelo a r.

b) Equazioni parametriche di una retta del piano:

$$\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P} = t\, \overrightarrow{P_1P_2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) = y_1 + mt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*. (l, m) sono le coordinate di un vettore parallelo ad r, e si dicono *parametri direttori* della retta.

Eliminando t, si perviene all'equazione cartesiana.

Esempio. Troviamo le equazioni parametriche e cartesiana della retta passante per $P_1(1,0)$ e $P_2(1,1)$. Si ha $\vec{P_1P_2} = (0,1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due rette.

Due rette r ed s del piano sono (1) **incidenti**, (2) **parallele e distinte**, oppure (3) **coincidenti**. Per studiarne la mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Risulta:

sist. incompatibile $\Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \ \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset$,
sist. compatibile $\Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \ \Leftrightarrow r \cap r' \neq \emptyset$.

Inoltre:

$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow$ 1 soluzione $\Leftrightarrow r \cap r' = \{P_0\}$,
$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^1$soluzioni $\Leftrightarrow r \equiv r'$.

Ponendo

$$r \parallel r' \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad r \equiv r',$$

possiamo dire che

$$r \parallel r' \Leftrightarrow (b, -a) \sim (b', -a') \Leftrightarrow (a, b) \sim (a', b'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Ortogonalità di due rette.

Due rette r ed r' sono perpendicolari se e solo se tali sono i loro parametri direttori. Quindi:

$$\begin{aligned} r \perp r' \quad &\Leftrightarrow \quad (l,m) \perp (l',m') \\ &\Leftrightarrow \quad (l,m)\cdot(l',m') = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a,b)\cdot(a',b') = 0. \end{aligned}$$

Esempi ed esercizi.

- Le rette $x-y=1$ e $3x-3y=1$ sono parallele; le rette $x+2z=1$ e $3x+6z=3$ sono parallele e coincidenti.

- Le rette $x-2y=1$ e $4x+2y=1$ sono perpendicolari.

Angoli tra due rette.

Date due rette orientate r ed r' e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r', risulta

$$\cos\widehat{rr'} = \cos\widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \frac{ll'+mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Se, invece, le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ può assumere due valori tra loro supplementari:

$$\cos\widehat{rr'} = \pm\frac{\vec{r}\cdot\vec{r'}}{\|\vec{r}\|\,\|\vec{r'}\|} = \pm\frac{ll'+mm'}{\sqrt{l^2+m^2}\sqrt{l'^2+m'^2}}.$$

Fasci di rette.

Siano r ed r' due rette. Se $r \cap r' = \{A\}$, si chiama *fascio di rette proprio* la totalità delle rette del piano passanti per A, che si dice *centro* del fascio proprio. Se $r \parallel r'$, la totalità delle rette del piano parallele ad r (o ad r') costituisce il *fascio di rette improprio* individuato dalla direzione di r (e di r').

Se $r\colon ax + by + c = 0$ e $r'\colon a'x + b'y + c' = 0$, il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0,$$

che mostra come le rette di un fascio siano ∞^1.

Si osservi che nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, la retta r' non è rappresentata; essa si può pensare ottenuta per $k = \pm\infty$.

Esercizio: Determinare il fascio di rette del piano, di centro $A(-1, 1)$, ed il fasci di rette del piano parallele a $r : 2x - 3y = 1$.

Distanze.

Geometricamente, la distanza di un punto P da una retta r, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova la retta per P e perpendicolare ad r e la si interseca con r.

In termini analitici, se $P(x_0, y_0)$ ed $r : ax+by+c = 0$, risulta:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dati due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la *retta assiale del segmento* AB è il luogo dei punti del piano, equidistanti da A e B. La sua equazione (necessariamente di I grado) è

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

Distanza di due rette parallele r, r': è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

Circonferenza.

Chiamiamo *circonferenza* l'insieme $\mathcal{C}$ dei punti P del piano tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso detto *centro* e R un numero reale positivo detto *raggio*. Se $C(\alpha, \beta)$ e $P(x, y)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ segue:

$$\mathcal{C} : (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

che dà l'equazione cartesiana di una circonferenza generica. Equivalentemente:

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza di centro (α, β), dove $\alpha = -a$, $\beta = -b$, e raggio $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$, dove però:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 - c > 0 \Rightarrow &\quad \text{circonferenza ordinaria,} \\
a^2 + b^2 - c = 0 \Rightarrow &\quad \text{circonferenza di raggio nullo,} \\
a^2 + b^2 - c < 0 \Rightarrow &\quad \text{circonferenza immaginaria.}
\end{aligned}$$

Esempio:

Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$, avente come punti diametralmente opposti $A(3,0)$ e $B(1,1)$.

Esempi ed esercizi.

1) Determinare le rette del piano che soddisfano le seguenti condizioni:

1. r : passante per $A(1,-2)$ e parallela al vettore $\vec{u} = (3,2)$.

2. s : passante per $A(1,-2)$ e $B(2,2)$.

3. t : passante per $A(1,-2)$ e perpendicolare al vettore $\vec{u} = (3,2)$.

2) Trovare il punto A', simmetrico di $A(1,1)$ rispetto alla retta $r : 2x + 4y + 1 = 0$.
(Ripetere per $A(0,0)$ ed $r : x - 3y + 2 = 0$).

3) Dati i punti $A(1,-1)$, $B(-2,3)$ e la retta $r : x - y + 3 = 0$, trovare

1. i punti $P \in r$ tali che $d(A,P) = d(A,B)$,

2. il punto $Q \in r$ tali che $d(A,Q) = d(B,Q)$,

3. l'equazione dell'asse del segmento AB.

4) Data la retta $r : x - 3y + 2 = 0$, trovare i punti dell'asse delle x, aventi distanza 3 da r. (Ripetere per l'asse y).

5) Studiare la mutua posizione delle seguenti coppie di rette:

1. $r : x + y - 2 = 0$, $s : 2x - 1 = 0$,
2. $r : x + y - 2 = 0$, $s : 4x + 4y - 3 = 0$,
3. $r : 2x + ky + 1 = 0$, $s : x - y + 1 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

6) Determinare gli angoli formati dalle seguenti coppie di rette:

1. $r : x + 3y - 1 = 0$, $s : 2x + y + 5 = 0$,
2. $r : x + y - 5 = 0$, $s : x = 1 - t, y = 2 + t$,

7) Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$:

1. di centro $A(2, 1)$ e raggio 2,
2. di centro $B(0, -2)$ e passante per $P(3, 1)$,
3. di centro $C(1, -3)$ e tangente ad $r : x - y + 3 = 0$,
4. di centro $E(1, 1)$, e secante la retta $s : x - y + 2 = 0$ in una corda di lunghezza 2.

8) Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, tangente ad $r : x + y + 3 = 0$ in $A(1, -4)$ e passante per l'origine.

9) Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, -1)$ $B(0, 2)$ e $D(-1, 3)$.

10) Trovare la circonferenza $\mathcal{C}$, passante per $A(1, 2)$, $B(-1, -2)$ ed avente centro sulla retta $r : x = 2 + t, y = 1 - t$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{C}$ in A, e le rette tangenti a $\mathcal{C}$ e passanti per il punto $D(10, 0)$.

11) Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = 0\,, \qquad s : x + 2y - 1 = 0\,.$$

(*Suggerimento*: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i vettori unitari associati alle rette, allora $\vec{r} + \vec{s}$ e $\vec{r} - \vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.)

12) Scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine O ed è tangente nel punto $P(1, 2)$ alla retta

$$r : \; x - y + 1 = 0\,.$$

CONICHE

Definizione e classificazione proiettiva

Si dice *conica* il luogo $\mathcal{C}$ dei punti $P(x,y)$ del piano Euclideo S_2, le cui coordinate (x,y) sono soluzioni di un'equazione di secondo grado a coefficienti reali (non tutti nulli):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Sia ora $\mathcal{C}$ la conica rappresentata da tale equazione. $\mathcal{C}$ si dice **generale** (o **non degenere**) se il polinomio che ne determina l'equazione è irriducibile (nel campo dei numeri reali), si dice **degenere** se tale polinomio è decomponibile nel prodotto di due polinomi di primo grado.
In particolare, $\mathcal{C}$ si dice *semplicemente degenere* se $\mathcal{C}$ è unione di due rette distinte, *doppiamente degenere* se è unione di due rette coincidenti.

La suddivisione delle coniche in generali, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri costituisce la *classificazione proiettiva* coniche, in quanto tale classificazione è invariante per trasformazioni proiettive. In particolare, è anche invariante per cambiamenti di riferimento cartesiani.

Esempi: $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ è generale,

$\mathcal{C}_2 : x^2 - 2xy = 0$ è semplicemente degenere,

$\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 2xy = 0$ è doppiamente degenere.

Osservazione: L'equazione di una conica C dipende da 5 parametri essenziali, quindi per determinare una conica occorrono 5 condizioni tra loro indipendenti.

I coefficienti a_{ij} che determinano l'equazione di $\mathcal{C}$ formano una matrice quadrata A, **simmetrica** di ordine 3, detta *matrice associata alla conica*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Teorema: Se A è la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$, allora:

- $\mathcal{C}$ è generale $\Leftrightarrow rg(A) = 3$,
- $\mathcal{C}$ è semplicemente degenere $\Leftrightarrow rg(A) = 2$,
- $\mathcal{C}$ è doppiamente degenere $\Leftrightarrow rg(A) = 1$.

Inoltre, il rango di A è invariante per cambiamenti di riferimento (si dice pertanto che $rg(A)$ è un *invariante* della conica).

Classificazione affine. Invarianti.

Sia $\mathcal{C}$ una conica **non degenere**. Essendo $\mathcal{C}$ determinata da un'equazione di secondo grado, l'intersezione di $\mathcal{C}$ con una qualsiasi retta contiene 2 punti (reali o complessi, propri oppure "all'infinito", distinti o coincidenti).
In particolare, una conica ha due "punti all'infinito", le cui coordinate si trovano ponendo uguale a zero il complesso dei termini di secondo grado dell'equazione di $\mathcal{C}$, ossia, risolvendo

$$(*) a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0.$$

Si chiama *complemento algebrico di* a_{33}, il numero

$$D_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

e si ha:

$$D_{33} = -\Delta,$$

dove Δ è il discriminante di $(*)$. Pertanto, risulta:

1. $\mathcal{C}$ ha due punti all'infinito reali e distinti **(Iperbole)** $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow D_{33} < 0$,

2. $\mathcal{C}$ ha due punti all'infinito reali e coincidenti (**Parabola)** $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow D_{33} = 0$,

3. $\mathcal{C}$ ha due punti all'infinito complessi **(Ellisse)** $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow D_{33} > 0$,

La distinzione tra diversi tipi di coniche non degeneri sulla base dei suoi punti all'infinito si dice **classificazione affine** delle coniche, ed è invariante per cambiamenti di riferimento affini (in particolare, anche ortonormali, ma NON per cambiamenti di riferimento proiettivi).

Una *circonferenza* è una ellisse con $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$.

Se $\mathcal{C}$ è un'iperbole e $(l, m), (l', m')$ sono le soluzioni di $(*)$, i parametri direttori $(l, m), (l', m')$ si dicono **direzioni asintotiche** di $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ è una parabola, le direzioni asintotiche sono coincidenti.

Un'iperbole $\mathcal{C}$ si dice equilatera se le sue direzioni asintotiche sono ortogonali tra loro. Si prova che un'iperbole $\mathcal{C}$ è equilatera se e solo se

$$T = a_{11} + a_{22} = 0,$$

e si prova che $T = a_{11} + a_{22}$ risulta invariante per cambiamenti di riferimento ortonormali (ma non per quelli affini). I tre numeri $rg(A)$ (che determina la classificazione proiettiva), D_{33} (che determina la classificazione affine) e T si dicono gli **invarianti della conica** $\mathcal{C}$.

Posizioni di una retta rispetto ad una conica.

Dati una conica non degenere $\mathcal{C}$ ed una retta r del piano, r può assumere tre posizioni rispetto a $\mathcal{C}$:

r è **secante** se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e distinti.

r è **tangente** se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e coincidenti.

r è **esterna** se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti complessi coniugati.

Dato un punto $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, l'equazione della retta tangente in P_0 a $\mathcal{C}$ è

$$\begin{aligned}&(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + \\ &+ (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0,\end{aligned}$$

che si può ricordare più facilmente come lo sviluppo del prodotto

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

dove (a_{ij}) è la matrice associata alla conica.

Centro e diametri di una conica.

Ellisse ed iperbole sono dette **coniche a centro**, perché esiste un punto del piano che risulta essere il loro centro di simmetria. Le coordinate del centro C della conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

sono la soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Si chiamano *diametri* della conica tutte la rette passanti per il su centro.

Abbiamo detto che una iperbole ha due punti reali “all’infinito”. I diametri tangenti all’infinito all’iperbole si chiamano *asintoti*.
Essi sono le due rette passanti per il centro, e i cui parametri direttori (l, m) sono soluzioni dell’equazione omogenea $(*)$, ossia, soddisfano

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + 2a_{12}lm = 0.$$

Assi di una conica.

Sono dei diametri che rappresentano gli assi di simmetria di una conica non degenere $\mathcal{C}$. Per una conica a centro ($\neq$ circonferenza), sono le due rette passanti per il centro C, ed i cui parametri direttori (l, m) soddisfano l'equazione

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0.$$

Nel caso di una circonferenza ogni diametro è un asse.
Per una parabola $\mathcal{C}$, esiste un unico asse. Essendo per una parabola $D_{33} = 0$, la sua equazione si può scrivere nella forma

$$(ax + by)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

e si dimostra che il suo asse ha equazione

$$(a^2 + b^2)(ax + by) + a_{13}a + a_{23}b = 0.$$

Si chiamano **vertici** di una conica le intersezioni degli assi con la conica stessa. Una parabola ha un unico vertice, un'ellisse ne ha 4, un'iperbole 2 (reali).

Equazioni canoniche.

Mediante la scelta di un opportuno sistema di riferimento ortonormale, l'equazione di una conica (non degenere) si scrive in una forma particolarmente semplice. Distinguiamo i seguenti casi:

a) Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro, di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in un riferimento cartesiano $RC(O, x, y)$. Nel nuovo riferimento $RC'(O', x', y')$, scelto in modo tale che
a) $O' = C$ sia il centro della conica, e
b) gli assi del riferimento gli assi della conica,

l'equazione si riduce alla forma

$$Lx'^{\,2} + My'^{\,2} + N = 0.$$

Il modo più semplice per trovare i coefficienti L, M, N, consiste nell'usare gli invarianti della conica. Infatti, L, M, N possono determinarsi risolvendo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} LMN = det(A), \\ LM = D_{33}, \\ L + M = T. \end{cases}$$

In base alle diverse possibilità per il segno di L, M, N, si può scrivere l'equazione canonica in uno dei seguenti modi standard:

I) $\frac{x'^{\,2}}{a^2} + \frac{y'^{\,2}}{b^2} = 1$ (ellisse a punti reali);

II) $\frac{x'^{\,2}}{a^2} + \frac{y'^{\,2}}{b^2} = -1$ (ellisse a punti immaginari);

III) $\frac{x'^{\,2}}{a^2} - \frac{y'^{\,2}}{b^2} = \pm 1$ (iperbole);

b) Sia $\mathcal{C}$ una parabola. In un sistema di riferimento cartesiano $RC'(O', x', y')$, scelto in modo tale che
a) $O' = V$ sia il vertice della conica, e
b) gli assi del riferimento il suo asse e la tangente nel vertice,

l'equazione di $\mathcal{C}$ si riduce alla forma

$$\alpha y'^{\,2} + 2\beta x' = 0.$$

Il modo più semplice per determinare i coefficienti α, β consiste nell'usare gli invarianti della conica. Infatti, si ha:

$$\begin{cases} -\alpha\beta^2 = det(A), \\ (0 = D_{33}), \\ \alpha = T. \end{cases}$$

Esercizi: Si supponga sempre fissato un sistema $RC(O, x, y)$. **Studiare** una assegnata conica vuol dire:

a) classificarla dal punto di vista proiettivo ed affine.

b) trovarne assi, eventuale centro, eventuali asintoti.

c) trovarne l'equazione canonica.

1) Studiare $C : 3x^2 - 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$.

2) Studiare $C : 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 1 = 0$.

3) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $C_k : x^2 + y^2 + 2kxy + 2ky + 1 = 0$.

a) Classificare C_k dal punto di vista proiettivo e affine.
b) Per $k = 1$, studiare C_1.

4) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $C_k : x^2 + ky^2 + 4kxy + 2(k-1)y = 0$.

a) Classificare C_k dal punto di vista proiettivo e affine.
b) Per $k = 3$, studiare C_3.

5) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $C_k : 3x^2 - 2kxy - 2x + 2y + 3 = 0$.

a) Classificare C_k dal punto di vista proiettivo e affine.

b) Per $k = 1$, studiare C_1.

Geometria analitica dello spazio

Un **riferimento ortonormale cartesiano** dello spazio è individuato da una base ortonormale positiva $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ dei vettori dello spazio, e da un punto O scelto come origine del riferimento. Il riferimento si indica con $RC(O, x, y, z)$.

Sia P un punto dello spazio.

$$P(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Un riferimento $RC(O, x, y, z)$ permette quindi di stabilire *corrispondenze biunivoche* tra i punti di S_3, i vettori di $\mathbf{V}_3$ e le terne di $\mathbb{R}^3$.

Assi coordinati:

asse x: retta per O e parallela a $\vec{i}$. Ha equazioni $y = z = 0$.

asse y: retta per O e parallela a $\vec{j}$. Ha equazioni $x = z = 0$.

asse z: retta per O e parallela a $\vec{k}$. Ha equazioni $x = y = 0$.

Piani coordinati:

piano xy: piano degli assi x ed y. Ha equazione $z = 0$.

piano xz: piano degli assi x e z. Ha equazione $y = 0$.

piano yz: piano degli assi y e z. Ha equazione $x = 0$.

Dati due punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dello spazio,

$$\vec{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

è il vettore posizione di P_2 rispetto a P_1. La *distanza* tra P_1 e P_2 è quindi data da:

$$\begin{aligned} & d(P_1, P_2) = \|\vec{P_1P_2}\| \\ & = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{aligned}$$

Il *punto medio* del segmento $\overline{P_1P_2}$ è il punto M di coordinate

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Piani.

Tre punti P_1, P_2, P_3 non allineati individuano un piano α dello spazio:

$$P \in \alpha \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3} \quad \text{dipendenti.}$$

Posto $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $P(x, y, z)$, la dipendenza lineare si può esprimere in due modi:

a) Equazioni parametriche di un piano:

$$\vec{P_1P} = u\vec{P_1P_2} + v\vec{P_1P_3}, \qquad u, v \in \mathbb{R},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + u(x_2 - x_1) + v(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + u(y_2 - y_1) + v(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + u(z_2 - z_1) + v(z_3 - z_1) \end{cases}$$

b) Equazione cartesiana di un piano:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante, si ha l'*equazione cartesiana del piano:*

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

I parametri (a, b, c) si chiamano *coefficienti di giacitura* del piano e rappresentano le coordinate di un vettore (non nullo) perpendicolare al piano. Infatti, considerando il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ uscente da $P_0 \in \alpha$, si ha

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \qquad \forall P \in \alpha$$

da cui

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

che rappresenta il piano per P_0 con coefficienti di giacitura (a, b, c).

Esempio. Dati i punti $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(1, 1, 1)$, $P_3(1, 0, 1)$ troviamo le equazioni parametriche e cartesiana del piano. Si ha $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 0, 1)$, dunque

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = u \\ z = u + v \end{cases},$$

da cui l'equazione cartesiana $x = 1$.

Mutue posizioni di due piani.

Siano α ed α' due piani. Volendo studiare la loro mutua posizione, consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Risulta

$$\text{sist. incomp.} \Leftrightarrow rg(A) \neq rg(\tilde{A}) \quad \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset,$$
$$\text{sist. comp.} \Leftrightarrow rg(A) = rg(\tilde{A}) \quad \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' \neq \emptyset.$$

Inoltre

$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 2 \Leftrightarrow \infty^1 \text{ soluzioni } \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = r,$$
$$rg(A) = rg(\tilde{A}) = 1 \Leftrightarrow \infty^2 \text{ soluzioni } \quad \Leftrightarrow \alpha \equiv \alpha',$$

dove r è una retta. Ponendo

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow \alpha \cap \alpha' = \emptyset \quad \text{oppure} \quad \alpha \equiv \alpha'$$

possiamo dire che

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow (a, b, c) \sim (a', b', c'),$$

dove '$\sim$' sta per 'è proporzionale a'.

Esempi ed esercizi.

a) I piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 1$ sono paralleli; i piani $x - y + 2z = 1$ e $3x - 3y + 6z = 3$ sono paralleli e coincidenti.

b) Il piano perpendicolare al vettore $(1, -1, 2)$ e uscente dal punto $(3, -1, 5)$ è

$$1(x - 3) + (-1)(y + 1) + 2(z - 5) = 0.$$

Retta

Due punti $P_1 \neq P_2$ individuano una retta r:

$$P \in r \Leftrightarrow \vec{P_1P}, \vec{P_1P_2} \text{ dipendenti.}$$

La dipendenza lineare si può esprimere nei seguenti modi:

Equazioni cartesiane di una retta:

$$rg \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

che si può porre nella forma

$$r \colon \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

(*equazioni cartesiane della retta*). Quindi, r si può scrivere come intersezione di due piani

$$\alpha \colon ax+by+cz+d = 0, \qquad \alpha' \colon a'x+b'y+c'z+d' = 0,$$

e tali che

$$rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

N.B,: r non determina univocamente i piani α ed α': due altri piani *distinti* passanti per r (ce ne sono ∞^1) individuano la stessa retta.

Si chiamano *parametri direttori* di r le coordinate di un arbitrario vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ parallelo ad r.
Se $P_1, P_2 \in r$ e $P_1 \neq P_2$, allora $\vec{v} = \vec{P_1P_2}$ è parallelo ad r e quindi parametri direttori di r sono

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

I parametri direttori (l, m, n) di una retta *sono individuati a meno di un fattore di proporzionalità*.

Equazioni parametriche di una retta.

$$p \in r \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \vec{PP_1} = t\vec{P_1P_2},$$

da cui

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) = x_1 + lt \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) = y_1 + mt \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) = z_1 + nt \end{cases}$$

che sono dette *equazioni parametriche della retta*.

Eliminando t si riottengono le equazioni cartesiane.

Esempi ed esercizi.

1) Trovare i parametri direttori della retta

$$r\colon \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x+y+z+3=0 \end{cases}$$

$(\vec{v}=(-3,1,2))$.

2) Verificare che le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=2 \\ z=2-\frac{t}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=11-4t' \\ y=2 \\ z=t' \end{cases},$$

rappresentano la stessa retta r, trovarne i parametri direttori e le equazioni cartesiane.

Mutua posizione retta-piano.

Ad un piano α associamo il vettore $\vec{n}=(a,b,c)$, perpendicolare ad α, di coordinate i parametri di giacitura; ad una retta r associamo il vettore $\vec{r}=(l,m,n)$, parallelo ad r, di coordinate i parametri direttori. Allora:

$$r \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{r}\perp\vec{n} \Leftrightarrow al+bm+cn=0,$$

$$r \text{ incidente } \alpha \Leftrightarrow \neg(\vec{r}\perp\vec{n}) \Leftrightarrow al+bm+cn\neq 0.$$

In particolare,

$$r\perp\alpha \Leftrightarrow \vec{r}\parallel\vec{n}.$$

Mutua posizione di due rette.

Due rette dello spazio r ed r', di parametri direttori $\vec{r} = (l, m, n)$ ed $\vec{r'} = (l', m', n')$ rispettivamente, possono essere

$$\begin{cases} \text{complanari : } \begin{cases} r \parallel r' \Leftrightarrow (l, m, n) \sim (l', m', n') \\ \\ r \text{ incidente } r' \Leftrightarrow r \cap r' = P_0 \end{cases} \\ \\ \text{sghembe : non complanari.} \end{cases}$$

Caso particolare di incidenza:

$$r \perp r' \Rightarrow \vec{r} \perp \vec{r'} \Rightarrow ll' + mm' + nn' = 0.$$

Rette sghembe.

Due rette r ed r' sono *sghembe* se non esiste alcun piano che le contiene.

Ricordiamo che, se $F, F' \subset \mathbf{V}_3$, la distanza tra F ed F' è

$$\text{dist}(F, F') = \inf\{\text{dist}(P, P');\ P \in F, P' \in F'\}.$$

Siano $\vec{r}$ ed $\vec{r'}$ i param. dir. delle rette sghembe r, r'. Esistono e sono univocamente determinati, $R \in r$ ed $R' \in r'$, tali che $\vec{RR'} \perp \vec{r}, \vec{r'}$, e vale: $\text{dist}(r, r') = \|\vec{RR'}\|$.

Esempio: Provare che sono sghembe le due rette

$r : x - z = y - z = 0,\ r' : x - 2z - 1 = y + z - 2 = 0.$

Angoli tra rette e piani. Siano r, r' due rette orientate e $\vec{r}$, $\vec{r'}$ due vettori concordemente orientati con r ed r'. Allora

$$\cos \widehat{rr'} = \cos \widehat{\vec{r}\vec{r'}} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{r'}\|} =$$

$$= \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Se le due rette non sono orientate, l'angolo $\widehat{rr'}$ assume due valori, tra loro supplementari:

$$\cos \widehat{rr'} = \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{\|\vec{r}\| \, \|\vec{r'}\|} =$$

$$= \pm \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}.$$

Analogamente, indicate con n ed n' le rette normali rispetto ad α ed α', si ha

$$\cos \widehat{\alpha\alpha'} = \cos \widehat{\vec{n}\vec{n'}} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n'}}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{n'}\|} =$$

$$= \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$\sin \widehat{\alpha r} = |\cos \widehat{\vec{n}\vec{r}}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \, \|\vec{r}\|} =$$

$$\frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Fasci di piani.

Siano α ed α' due piani. Se $\alpha \cap \alpha' = r$, si chiama *fascio di piani proprio* di asse r la totalità dei piani dello spazio passanti per r, che si dice *asse* del fascio proprio.
Se $\alpha \parallel \alpha'$, i piani dello spazio paralleli ad α (o ad α') formano il *fascio di piani improprio* individuato dalla giacitura di α (e di α').

Se $\alpha\colon ax+by+cz+d = 0$ e $\alpha'\colon a'x+b'y+c'z+d' = 0$ il fascio è rappresentato da

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

al variare dei parametri omogenei λ e μ, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Se $\lambda \neq 0$, ponendo $k = \mu/\lambda$, il fascio è rappresentato dall'equazione

$$ax + by + cz + d + k(a'x + b'y + c'z + d') = 0,$$

che evidenzia che i piani di un fascio sono ∞^1.

Nell'equazione precedente, al variare di k in $\mathbb{R}$, il piano α' non è rappresentato; esso si può pensare ottenuto per $k = \pm\infty$. Ciò porta ad ampliare $\mathbb{R}$ in modo spontaneo, aggiungendo <u>un solo</u> punto improprio (mentre in Analisi l'ampliamento è fatto con i due punti impropri $\pm\infty$).

Esempi ed esercizi.

1) Trovare il piano passante per $A(0,2,-1)$ e per la retta

$$r\colon \begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Poiché $A \notin r$, il piano è univocamente individuato. Si considera il fascio di piani di asse r e si impone il passaggio per A del generico piano.

Il piano generico $x+2y+z+k(x-z)=0$ passa per A se $k=-3$, quindi il piano cercato è $x-y-2z=0$.

2) Si risolva l'esercizio precedente considerando il piano pass. per A e per due punti scelti di r.

3) Scrivere il fascio di rette del piano α: $3x-y+5z+1=0$ di centro $P_0(0,1,0) \in \alpha$.

Sia r una retta per P_0 <u>non</u> contenuta in α; ad esempio:

$$r\colon \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

L'equazione $x+kz=0$, con $k \in \mathbb{R}$, rappresenta il fascio di piani di asse r e

$$\begin{cases} x+kz=0 \\ 3x-y+5z+1=0 \end{cases}$$

rappresenta il fascio di rette richiesto.

Distanze.

In generale, la distanza tra rette, tra rette e piani, e tra piani, è sempre riconducibile alla distanza tra punti.
La distanza di un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ da un piano $\pi : ax + by + cz + d = 0 = 0$ è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su π. In termini analitici,

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dati due punti $A(x_1, y_1, z_1) \neq B(x_2, y_2, z_2)$, il *piano assiale del segmento* AB è il luogo dei punti dello spazio, equidistanti da A e B. Ha equazione:

$$\begin{aligned} &(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 \end{aligned}$$

La distanza di un punto: ax+by+cz+d=0=0 P da una retta r dello spazio, è la distanza tra P e la sua proiezione ortogonale H su r. Per determinare H, si trova il piano per P e $\perp r$, e lo si interseca con π. **N.B.:** NON esiste una formula analitica per la distanza punto-retta nello spazio.

Distanza di due rette $r \parallel r'$: è la distanza tra r ed un qualsiasi punto di r'.

Distanza di due piani $\pi \parallel \pi'$: è la distanza tra π ed un qualsiasi punto di π'.

Distanza tra una retta r ed un piano π parallelo ad r: è la distanza tra π ed un punto di r.

Sfere e circonferenze.

Chiamiamo *sfera* l'insieme dei punti P dello spazio tali che $\|\vec{CP}\| = R$, dove C è un punto fisso e $R > 0$. Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e $P(x, y, z)$, da $\|\vec{CP}\| = R$ si ha

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2,$$

(equazione cartesiana di una sfera), da cui,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

dove $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$. Viceversa, ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

rappresenta una sfera Σ di centro
$(\alpha = -a, \beta = -b, \gamma = -c)$, e raggio
$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Si ha:

$$\begin{array}{lr} a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 & \text{sfera ordinaria,} \\ a^2 + b^2 + c^2 - d = 0 & \text{sfera di raggio nullo,} \\ a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 & \text{sfera immaginaria.} \end{array}$$

Se π è un piano, $\Sigma \cap \pi$ dà una circonferenza.

Esempio:

Trovare la sfera che ha come punti diametralmente opposti $A(3, 0, 0)$ e $B(1, 1, 1)$.

Superfici e curve

Nello spazio un piano si rappresenta con un'equazione, una retta con due equazioni. Un'equazione, ponendo un vincolo tra le incognite, riduce di uno il grado di libertà. Quindi, il piano ha dimensione 2, mentre la retta ha dimensione 1.

Chiamiamo *superficie* Σ il luogo dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio le cui coordinate verificano un'equazione del tipo

$$f(x, y, z) = 0,$$

che è detta *equazione cartesiana* di Σ.

Se f è un polinomio, la superficie si dirà *algebrica*: le superfici algebriche di grado 1 sono i piani, quelle di grado 2 si chiamano *quadriche*.

Una superficie si può rappresentare *parametricamente* tramite equazioni del tipo

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

dove $(u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2$. Quindi, $P(u, v) \in \Sigma$ dipende da due parametri.

Un punto P descrive una *curva* γ dello spazio se esso dipende da un solo parametro:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in I \subset \mathbb{R},$$

che rappresentano le *equazioni parametriche* di γ. Eliminando il parametro si perviene (spesso con difficoltà) alle equazioni cartesiane di $\gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, dove

$$\Sigma_1 \colon f_1(x, y, z) = 0, \qquad \Sigma_2 \colon f_2(x, y, z) = 0.$$

Esempio.

Se $\Sigma \colon f(x, y, z) = 0$ e $\Sigma' \colon g(x, y, z) = 0$ sono equazioni algebriche di primo grado, esse rappresentano dei piani. Se non sono paralleli tra loro, il loro sistema rappresenta la retta $r = \Sigma \cap \Sigma'$, che è dunque una particolare curva.

Curve piane e sghembe. Una curva γ dello spazio si dice *piana* se esiste un piano che la contiene, altrimenti si dice *sghemba*.

Esempio.

Data la curva

$$\gamma\colon x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = 2t,$$

dimostriamo che è piana. Bisogna vedere se esiste un piano

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

tale che $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$ per ogni t. Ora,

$$a(t^2 - 1) + b(t^2 + 1) + 2tc + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a + b)t^2 + 2tc + d - a + b = 0,$$

che porta (per il principio di identità dei polinomi) al sistema omogeneo

$$a + b = 0, \quad 2c = 0, \quad d - a + b = 0,$$

che ha soluzioni $c = 0$, $a = -b$, $d = -2b$. Quindi γ è piana ed è contenuta nel piano $\alpha\colon x - y + 2 = 0$.

Esercizio.

Provare che la curva γ (elica cilindrica) di equazioni parametriche

$$\gamma : x = \cos(u), \quad y = \sin(u), \quad z = u$$

è sghemba.

Superfici rigate

Una *superficie rigata* è una superficie Σ costituita da rette, formata dall'insieme dei punti appartenenti a tutta le rette (dette *generatrici*) che passano per i punti di una assegnata curva γ (detta *direttrice*), secondo una direzione assegnata per ciascun punto di γ. Una tale superficie è quindi completamente determinata a partire dalle equazioni parametriche di γ

$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad u \in I,$$

e dalle direzioni delle generatrici:

$$\vec{v}(u) = (l(u), m(u), n(u)), \quad u \in I.$$

La generica generatrice sarà individuata dalle equazioni

$$\frac{x - x(u)}{l(u)} = \frac{y - y(u)}{m(u)} = \frac{z - z(u)}{n(u)},$$

e quindi,

$$\begin{cases} x = x(u) + l(u)v, \\ y = y(u) + m(u)v, \\ z = z(u) + n(u)v. \end{cases}$$

Una superficie rigata è immediatamente riconoscibile come tale a partire dalle sue equazioni parametriche, per il fatto che la dipendenza da uno dei due parametri è **di tipo lineare**.

Coni e cilindri

Sia P un punto dello spazio ed α un piano. Proiettare P su α *da un fissato punto* V vuol dire considerare il punto $P' = VP \cap \alpha$.
Proiettare P su α *secondo una direzione data* $\vec{w}$ vuol dire considerare il punto $P' = s \cap \alpha$, dove s è la retta per P parallela a $\vec{w}$.

Se P descrive una curva γ, il punto P' descrive una curva $\gamma' \subset \alpha$, che è la *proiezione* di γ.

Si chiama *cono* la superficie $\mathcal{K}$ luogo delle rette (dette *generatrici* di $\mathcal{K}$) che proiettano da un punto V (*vertice*) una curva γ, detta *direttrice* del cono.

La curva γ', proiezione di γ su α da V, è data da $\gamma' = \mathcal{K} \cap \alpha$.

Si chiama *cilindro* la superficie Γ luogo delle rette (dette *generatrici* di Γ) incidenti una curva γ ed aventi la stessa direzione individuata da un vettore $\vec{w}$.

La curva γ', proiezione di γ su α parallelamente a $\vec{w}$, è data da $\gamma' = \Gamma \cap \alpha$.

Troviamo ora le equazioni parametriche di un cono e di un cilindro. Sia

$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Se $V(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{w}(l, m, n)$, allora

$$\mathcal{K}\colon \begin{cases} x = x_0 + v(x(u) - x_0) \\ y = y_0 + v(y(u) - y_0) \\ z = z_0 + v(z(u) - z_0), \end{cases}$$

$$\Gamma\colon \begin{cases} x = x(u) + lv \\ y = y(u) + mv \\ z = z(u) + nv. \end{cases}$$

Esempi ed esercizi.

1) Scrivere l'equazione del cilindro avente generatrici di direzione $\vec{w}(1, 1, 1)$ e passante per la curva

$$\gamma\colon \quad x = t^3, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^2.$$

La generica generatrice ha equazioni

$$\frac{x - t^3}{1} = \frac{y - t^3 + t}{1} = \frac{z - t^2}{1} = h,$$

quindi equazioni parametriche del cilindro sono

$$\Gamma\colon \quad x = t^3 + h, \quad y = t^3 - t + h, \quad z = t^2 + h.$$

Per ottenere l'equazione cartesiana, basta eliminare i parametri t ed h

$$\Gamma\colon \quad (x - y)^3 - (x - y)^2 + z - x = 0.$$

2) Per proiettare la curva γ dell'esempio precedente sul piano yz parallelamente alla direzione individuata da $\vec{w}$, si pone $x = 0$ nelle equazioni parametriche, si ha $h = -t^3$ e quindi

$$\gamma' \colon \quad x = 0, \quad y = -t, \quad z = t^2 - t^3,$$

oppure in forma cartesiana

$$\gamma' \colon \quad x = 0, \quad z = y^2 + y^3.$$

3) Proiettare la stessa curva γ nel piano $x = y + 1$ dal punto $V(1, 1, 1)$. Si ha:

$$\mathcal{K} : \begin{cases} x = 1 + v(t^3 - 1), \\ y = 1 + v(t^3 - t - 1), \\ z = 1 + v(t^2 - 1) \end{cases} \quad \gamma' : \begin{cases} x = 1 + t^2 - \frac{1}{t}, \\ y = t^2 - \frac{1}{t}, \\ z = 1 + t - \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Superfici di rotazione

Si chiama *superficie di rotazione* la superficie generata dalla rotazione di una curva γ intorno ad una retta a, che prende il nome di *asse* della superficie.

L'asse a può essere assegnato mediante un suo punto $A(x_0, y_0, z_0)$ e i parametri direttori (l, m, n), la curva γ mediante equazioni parametriche

$$\gamma\colon \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Il generico punto $P \in \gamma$, quando γ ruota intorno ad a, descrive una circonferenza, detta *parallelo*,

$$\mathcal{P} = \tau \cap S,$$

dove τ è il piano per P e perpendicolare ad a ed S la sfera di centro A e raggio $\|\vec{AP}\|$

$$\begin{aligned} &\tau\colon l(x - x(u)) + m(y - y(u)) + n(z - z(u)) = 0, \\ &S\colon (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \\ &\qquad = (x(u) - x_0)^2 + (y(u) - y_0)^2 + (z(u) - z_0)^2. \end{aligned}$$

Se a coincide con l'asse z, le precedenti equazioni si semplificano notevolmente perché $(l, m, n) \sim (0, 0, 1)$ e si può prendere $A(0, 0, 0)$.

Esempio. Trovare la superficie Σ generata dalla rotazione intorno all'asse z della retta

$$r\colon \quad x = 1, \quad y = 2z.$$

Equazioni parametriche di r sono

$$x = 1, \quad y = 2u, \quad z = u.$$

Quindi, posto $A(0,0,0)$ e $(l,m,n) \sim (0,0,1)$,

$$\begin{aligned} \tau\colon &\quad z = u, \\ S\colon &\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1^2 + (2u)^2 + (u)^2, \end{aligned}$$

cioè

$$\mathcal{P}\colon \begin{cases} z = u, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 5u^2 \end{cases}$$

ed eliminando il parametro

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$$

che è una superficie algebrica di ordine 2, vale a dire una *quadrica*.

Coordinate cilindriche. Siano α un piano ed r una retta perpendicolare ad α (detta *asse delle quote*). Posto $O = \alpha \cap r$, consideriamo nel piano α un riferimento polare (ρ, φ) e nella retta r un riferimento cartesiano.

Se P è un punto dello spazio, consideriamo P', la sua proiezione ortogonale su α, e P'', proiezione ortogonale di P su r. Denotiamo (ρ, φ) le coordinate polari di P' in α ed h la coordinata di P'' su r. I tre numeri (ρ, φ, h), associati a P, si chiamano *coordinate cilindriche* di P.
Fuori dall'asse z, la corrispondenza tra il punto e le sue coordinate cilindriche è biunivoca.
Per $\rho = cost.$ si ottiene un cilindro rotondo intorno all'asse r di raggio c.

Spesso ad un riferimento cilindrico si fa corrispondere un riferimento cartesiano $RC(Oxyz)$ tale che r coincida con l'asse z, il semiasse positivo delle x con l'asse polare nel piano α. Allora

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ y = \rho \sin \varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ z = h & h \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Coordinate sferiche. Fissiamo nello spazio un riferimento polare costituito da:

un punto O detto *polo*;

una retta orientata r per O detta *asse polare*;

un semipiano α di origine r detto *senipiano polare*;

un'unità di misura per le lunghezze ed un verso positivo per le rotazioni intorno all'asse polare.

Poniamo

$\rho = \|\vec{OP}\|$ raggio vettore,

$\varphi = \widehat{\alpha\beta}$ longitudine, dove β è il piano per r e P, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$\theta = \widehat{\vec{OP}\vec{r}}$ colatitudine, $0 \leq \theta \leq \pi$ ($\psi = \pi/2 - \theta$ latitudine).

I tre numeri (ρ, φ, θ) sono detti *coordinate sferiche*. Al riferimento polare si può associare un riferimento $RC(Oxyz)$ tale che O coincida con il polo, z coincida con l'asse polare, il semiasse positivo delle x appartenga al semipiano polare e coincidano le unità di misura per i segmenti. Allora

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi & \rho \in \mathbb{R}^+ \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi & 0 \le \varphi < 2\pi \\ z = \rho \cos\theta & 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Le coordinate si dicono *sferiche* poiché, per $\rho =$ cost, si ottengono sfere concentriche. Pertanto, per $\rho = R$, le equazioni precedenti sono equazioni parametriche della sfera di centro O e raggio R; le coordinate (φ, θ) sono *coordinate geografiche* sulla sfera.

Esercizi di riepilogo.

1) Determinare le equazioni delle bisettrici delle rette

$$r : x - 1 = y - z = 0\,, \qquad s : y = 1 = z\,.$$

Suggerimento: si ricordi che se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ sono i *versori* associati alle rette, allora $\vec{r} + \vec{s}$ e $\vec{r} - \vec{s}$ danno le direzioni delle bisettrici.

2) Si consideri il piano α contenente il triangolo T di vertici

$$A(1,0,0), \quad B(0,\sqrt{2},1), \quad C(-1,1/\sqrt{2},1)\,.$$

1. Determinare l'angolo ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi/2$) tra il piano α e il piano coordinato xy.

2. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per A e B.

3. Trovare i parametri direttori di r e quelli di giacitura di α.

4. Determinare il piano ortogonale ad $\vec{AB}$ e passante per il punto medio H di AB.

SPAZI VETTORIALI

Definizione: Si chiama *spazio vettoriale (su un campo $\mathbb{K}$)* una terna $(V, +, \cdot)$, dove $V \neq \varnothing$ e

$$+ \colon V \times V \to V, \qquad \cdot \colon \mathbb{K} \times V \to V,$$

sono due applicazioni che soddisfano:

1. La coppia $(V, +)$ è un gruppo commutativo, ossia per ogni $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V$,
   (a) $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{z} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{z})$,
   (b) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$,
   (c) $\exists \vec{0}$ tale che $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
   (d) $\exists -\vec{v}$ tale che $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
2. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$ per ogni $\vec{v} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
3. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$ per ogni $\vec{v} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
4. $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$ per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
5. $1\vec{v} = \vec{v}$ per ogni $\vec{v} \in V$.

Gli elementi di V sono detti *vettori*, quelli di $\mathbb{K}$ *scalari*. Si scriverà V al posto di $(V, +, \cdot)$. L'elemento neutro di $(V, +)$, $\vec{0}$, si chiama *vettore nullo*.

Proprietà:

- l'elemento neutro $\vec{0}$ è unico.
- dato $\vec{u} \in V$, l'elemento $\vec{u'}$ tale che $\vec{u} + \vec{u'} = \vec{0}$ è unico.
- Per ogni $\vec{u} \in V$: $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.
- per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\vec{u} \in V$:
  $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ oppure $\vec{u} = \vec{0}$.

Esempi ed esercizi.

1) $\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n\}$ è uno spazio vettoriale, rispetto alle operazioni

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Si verifica facilmente che tali operazioni assegnano una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}^n$.

2) L'insieme $\mathbb{K}^{m,n}$ delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma tra matrici e di moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

3) L'insieme $\mathbb{K}[t]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di somma di polinomi e moltiplicazione di un polinomio per uno scalare.

4) Dati due spazi vettoriali V, W su $\mathbb{K}$, si definisce una struttura di spazio vettoriale sul loro prodotto cartesiano $V \times W$ mediante le operazioni:

$$+\colon (V \times W) \times (V \times W) \to V \times W,$$
$$((\vec{x}, \vec{y}), (\vec{x}', \vec{y}')) \mapsto (\vec{x} + \vec{x}', \vec{y} + \vec{y}'),$$

$$\cdot\colon \mathbb{K} \times (V \times W) \to V \times W,$$
$$(\lambda, (\vec{x}, \vec{y})) \mapsto (\lambda\vec{x}, \lambda\vec{y}).$$

Si verificano facilmente le proprietà richieste.

5) Dati X un insieme non vuoto e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, l'insieme

$$\mathcal{M}(X, V) = \{f\colon X \to V\}$$

ha una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, rispetto alle operazioni

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

per ogni $x \in X$. Si verificano facilmente le proprietà richieste.

Sottospazi vettoriali

Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto $W \subset V$ si dice *sottospazio vettoriale* di V se e solo se $(W, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V ristrette a W.

Proposizione (caratterizzazione dei sottospazi vettoriali): W sottospazio vettoriale di V se e solo se per ogni $\vec{u}, \vec{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha $\vec{u} + \vec{v} \in W$ e $\lambda\vec{u} \in W$.

DIM: $" \Rightarrow "$: banale.

$" \Leftarrow "$: Si usa l'ipotesi per provare le proprietá che fanno di W uno spazio vettoriale, rispetto alle operazioni indotte da quelle di V.

Dalla Proposizione segue che *tutti i sottospazi di* V *contengono il vettore nullo* $\vec{0}$.

Esempi ed esercizi.

1) Provare che $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Sia $\mathbb{R}_n[t] \subset \mathbb{R}[t]$ il sottoinsieme dei polinomi di grado $\leq n$. Provare che $\mathbb{R}_n[t]$ è un sottospazio di $\mathbb{R}[t]$.

Infatti, la somma di due polinomi di grado minore o uguale ad n ha ancora grado minore uguale ad n, ed altrettanto per la moltiplicazione di un polinomio per uno scalare.

3) Provare che $\bar{\mathbb{R}}_n[t] \subset \mathbb{R}[t]$, il sottoinsieme dei polinomi di grado *uguale* ad n, *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$ (a meno che $n = 0$, per cui è banale). Infatti, $\bar{\mathbb{R}}_n[t]$ non contiene il polinomio nullo se $n \geq 1$, quindi non può essere uno spazio vettoriale.

4) Provare che $Z_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

5) Provare che $Z_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

6) $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

7) $K = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} \mid \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n,n}$?

Somma e somma diretta

Siano V uno spazio vettoriale e S,T due suoi sottospazi. Si dimostra facilmente che $S \cap T$ è un sottospazio vettoriale di V, mentre, in generale, $S \cup T$ *non* è un sottospazio vettoriale di V. Posto

$$S+T = \{\vec{x}+\vec{y} \mid \vec{x} \in S, \vec{y} \in T\},$$

$S+T$ è un sottospazio vettoriale di V, detto *somma* di S e di T. Inoltre, $S+T$ è il più piccolo sottospazio di V contenente $S \cup T$ (cioè, (i) $S+T$ è un sottospazio vettoriale, (ii) contiene $S \cup T$, e (iii) è contenuto in ogni soottospazio W di V che contiene $S \cup T$).

Se in $S+T$ la decomposizione di ogni vettore come somma di due elementi in S e T è unica, allora $S+T$ si dice *somma diretta* e si indica $S \oplus T$. Se $V = S \oplus T$, allora i due sottospazi si dicono *supplementari*.

Proposizione: Sia V uno spazio vettoriale, e siano S, T, W suoi sottospazi. Allora,
$W = S \oplus T \Leftrightarrow W = S+T$ e $S \cap T = \{\vec{0}\}$.

Dim.: Sia $W = S \oplus T \Rightarrow W = S+T$. Inoltre, $\vec{w} \in S \cap T \Rightarrow \vec{w} = \vec{w} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{w}$; ma queste scritture devono coincidere, dunque $\vec{w} = \vec{0}$.

Viceversa, se $W = S+T$ e $S \cap T = \{\vec{0}\}$, supponiamo che $\vec{w} \in W$ si scriva come $\vec{w} = \vec{s} + \vec{t} = \vec{s}\,' + \vec{t}\,'$. Sottraendo membro a membro si ottiene
$\vec{s} - \vec{s}\,' = \vec{t}\,' - \vec{t} \in S \cap T = \{\vec{0}\}$, dunque $\vec{s} = \vec{s}\,'$ e $\vec{t}\,' = \vec{t}$.

Il concetto di somma e di somma diretta si estende a più sottospazi:

$$S_1 + \cdots + S_h = \{\vec{v_1} + \dots \vec{v_h} \mid \vec{v_i} \in S_i, i = 1, \dots, h\},$$

e la somma si dice *diretta* (si scrive $S_1 \oplus \cdots \oplus S_h$) se ogni $\vec{v} = \vec{v_1} + \dots \vec{v_h}$, $\vec{v_i} \in S_i$, in modo unico.

Continua a valere che $S_1 + \cdots + S_h$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $S_1 \cup \cdots \cup S_h$. Si osservi inoltre che

$$W = S_1 \oplus \cdots \oplus S_h \quad \Rightarrow \quad S_i \cap S_j = \{\vec{0}\} \quad i \neq j,$$

ma non vale il viceversa. Come controesempio, basta considerare tre rette in $\mathbf{V}_2$ passanti per l'origine.

Dipendenza ed indipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ un suo sottoinsieme finito. Si dice che un vettore $\vec{v} \in V$ è *combinazione lineare* di $\{\vec{v}_i\}$ se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, tali che

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n.$$

Definizione: L'insieme $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ si dice

1. *indipendente* se l'unica combinazione lineare di vettori $\{\vec{v}_i\}_{i\in I}$ che dia come risultato $\vec{0}$, è quella in cui tutti i coefficienti sono nulli:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{v}_j = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = 0 \quad \forall j;$$

2. *dipendente* se non è indipendente, ovvero, se $\vec{0}$ si può ottenere mediante una combinazione lineare non banale (con almeno un coefficiente $\neq 0$) di $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.

Proprietà:

- $X \subset Y$, X linearmente dipendente
  $\Rightarrow Y$ linearmente dipendente.

- $X \subset Y$, Y linearmente indipendente
  $\Rightarrow X$ linearmente indipendente.

- $\{\vec{u}\}$ linearmente indipendente $\Leftrightarrow \vec{u} \neq \vec{0}$

- $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linearmente indipendente
  $\Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ non paralleli
  $\Leftrightarrow$ non esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\vec{u} = t\vec{v}$,
  o viceversa.

- $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ linearmente indipendente
  $\Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non complanari.

- In generale, $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p}\}$ linearmente indipendente
  $\Leftrightarrow$ nessuno degli $\vec{u_i}$ è combinazione lineare dei restanti.

Sottospazi generati

Sia $X \subset V$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice *sottospazio vettoriale generato da X*, l'insieme

$L(X) = \{\vec{x} \in V \mid \vec{x}$ è comb. lin. di elementi di $X\}$.

$L(X)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente X. Dati due sottospazi S, T, si ha

$$S + T = L(S \cup T).$$

Si noti che:

- se σ è una permutazione di $\{1, \ldots, h\}$, allora
$$L(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_h}) = L(\vec{v_{\sigma_1}}, \ldots, \vec{v_{\sigma_h}});$$

- se $\vec{u} \in L(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_h})$ allora
$$L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h, \vec{u}) = L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h).$$

Quindi, procedendo per scarti successivi, si conclude che

$$L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h) = L(\vec{u}_{r_1}, \ldots, \vec{u}_{r_p}),$$

dove i $p \leq h$ vettori $\vec{u_{r_1}}, \ldots, \vec{u_{r_p}}$ sono indipendenti.

Qunidi, p è **il massimo numero di vettori indipendenti in $L(X)$**.

È importante notare che ogni vettore di $L(X)$ si esprime in modo *unico* come combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h$.

Infatti, sia $\vec{x} \in L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h)$, e supponiamo che

$$\vec{x} = a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_h\vec{v}_h = b_1\vec{v}_1 + \cdots + b_h\vec{v}_h.$$

Ma allora, sottraendo membro a membro, si ha

$$(a_1 - b_1)\vec{v}_1 + \cdots + (a_h - b_h)\vec{v}_h = \vec{0}.$$

Essendo la precedente una combinazione lineare nulla di vettori lineramente indipendenti, tutti i coefficienti sono nulli, per cui, $a_i = b_i$ per ogni i.

Si può dimostrare il seguente

Teorema: Se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p \in L(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u_m})$ sono lineramente indipendenti, allora, $p \leq m$.

Basi e dimensione

Sia V uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto $G \subset V$ è detto un insieme di *generatori* di V se $V = L(G)$.
Se esiste un insieme *finito* $F \subset V$ di generatori di V, allora V si dice *finitamente generato*.

Una *base* di V è un sottoinsieme $B \subset V$ di *generatori linearmente indipendenti*.

Ogni spazio vettoriale ammette una base.

Teorema: Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno la stessa cardinalità.

DIM (nel caso finito): Se $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ e $B' = \{\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_m\}$ sono due basi di V, allora:

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \in V = L(\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_m) \quad \Rightarrow \quad n \leq m,$$

$$\vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_m \in V = L(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \quad \Rightarrow \quad m \leq n,$$

e quindi, $m = n$.

Teorema del completamento di una base:

Siano V uno spazio vettoriale finitamente generato, $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una sua base, e $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ $\neq \emptyset$ un insieme indipendente.
$\Rightarrow$ si possono scegliere $n - p$ vettori $\vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_{n-p}} \in B$, tali che $B' = \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_{n-p}}\}$ sia una nuova base di V.

Definizione: Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, si chiama *dimensione* di V ($\dim_{\mathbb{K}} V$ o $\dim V$) la cardinalità di una sua base.

Si pone $\dim\{\vec{0}\} = 0$. Uno spazio vettoriale V ha

-) *dimensione finita* se una sua base ha cardinalità finita;

-) *dimensione infinita* se una sua base ha cardinalità infinita.

Chiaramente, ogni sottospazio di uno spazio vettoriale di dimensione finita è di dimensione finita. Invece, uno spazio vettoriale di dimensione infinita ha sia sottospazi di dimensione finita che infinita.

Se $\dim V = n$, allora:

- n è il <u>massimo</u> numero di vettori *linearmente indipendenti* in V;
- n è il <u>minimo</u> numero di *generatori* di V.

Se $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, allora per ogni $\vec{x} \in V$ esiste un'unica n-pla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, tale che

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n,$$

Gli scalari x_1, ..., x_n sono chiamati *coordinate* di $\vec{x}$ rispetto alla base B.

Esempi ed esercizi.

-) $\dim \mathbb{K}^n = n$. Infatti, la **base canonica** di $\mathbb{K}^n$ è

$$\vec{e_1} = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e_n} = (0, \ldots, 0, 1).$$

-) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, una base è costituita da ciascun suo elemento non nullo (ad esempio, $\vec{e_1} = 1$).

Invece, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, poiché $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ e la somma ed il prodotto per scalari su $\mathbb{C}$, come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ sono quelle di $\mathbb{R}^2$.
Una base è costituita da $\vec{e_1} = 1$ e $\vec{e_1}^* = i$.

-) Analogamente, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$. Se $B = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ è una base di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$, allora $B' = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}, \vec{e_1}^*, \ldots, \vec{e_n}^*\}$ è una base di $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{R}$, con $\vec{e_h}^* = i\vec{e_h}$, $h = 1, \ldots, n$.

-) Si ha $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{m,n} = m \cdot n$. La **base canonica** è data dall'insieme $B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, dove E_{ij} è la matrice che ha 1 al posto (ij) e 0 altrove.

-) Si ha $\dim \mathbb{R}_n[t] = n + 1$, la **base canonica** è $\{1 = t^0, t^1, \ldots, t^n\}$.

-) Si ha $\dim \mathbb{R}[t] = +\infty$. Più precisamente, una base di $\mathbb{R}[t]$ ha la cardinalità di $\mathbb{N}$, ad esempio, la **base canonica** è $\{t^h \mid h \in \mathbb{N}\}$.
$\mathbb{R}[t]$ ammette sia i sottospazi di dimensione finita $\mathbb{R}_n[t]$, sia sottospazi di dimensione infinita.

-) Si provi che $\mathbb{R}[t^2] = L(\{t^{2h}\}_{h \in \mathbb{N}})$ è un sottospazio di dimensione infinita di $\mathbb{R}[t]$.

Teorema (Relazione di Grassmann): Siano V uno spazio vettoriale, e S,T due suoi sottospazi di dimensione finita. Allora

$$\text{dim}(S+T)+\text{dim}(S\cap T)=\text{dim}\, S+\text{dim}\, T.$$

Dim.: Completiamo una base $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_h\}$ di $S\cap T$, ad una base $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_h,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p\}$ di S, e ad una base $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_h,\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_q\}$ di T. Per provare la tesi, dimostriamo che

$$B=\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_h,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_p,\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_q\}$$

è una base di $S+T$. Si dimostra facilmente che B è un insieme di generatori per $S+T$. Proviamo ora la lineare indipendenza di B. Sia

$$a_1\vec{u}_1+\cdots+a_h\vec{u}_h+b_1\vec{v}_1+\cdots+b_p\vec{v}_p+c_1\vec{w}_1+\cdots+c_q\vec{w}_q=\vec{0}.$$

La riscriviamo nella forma

$$a_1\vec{u}_1+\cdots+a_h\vec{u}_h+b_1\vec{v}_1+\cdots+b_p\vec{v}_p=-c_1\vec{w}_1-\cdots-c_q\vec{w}_q,$$

da cui si vede che $\vec{w}=-c_1\vec{w}_1-\cdots-c_q\vec{w}_q\in T\cap S$, quindi

$$\vec{w}=\lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_h\vec{u}_h,$$

per opportuni coefficienti λ_i. Pertanto,

$$\lambda_1\vec{u}_1+\cdots+\lambda_h\vec{u}_h+c_1\vec{w}_1+\cdots+c_q\vec{w}_q=\vec{0},$$

da cui $\lambda_i=c_j=0$, poichè $\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_h,\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_q\}$ è una base. Quindi la prima equazione diventa

$$a_1\vec{u}_1+\cdots+a_h\vec{u}_h+b_1\vec{v}_1+\cdots+b_p\vec{v}_p=\vec{0},$$

che implica $a_i=b_j=0$, da cui la tesi.

Nel caso di somma diretta, $S \cap T = \{\vec{0}\}$, e la relazione di Grassmann si riduce a

$$\dim(S \oplus T) = \dim S + \dim T.$$

Viceversa, se $\dim(S+T) = \dim S + \dim T$, allora $\dim(S \cap T) = 0$, quindi $S + T = S \oplus T$.

Rango di un insieme di vettori

Sia V uno spazio vettoriale. Si definisce *rango* di un insieme $X \subset V$ di vettori, il massimo numero di vettori indipendenti di X. Si noti che se $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h \in V$, allora

$$\dim L(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h) = rg\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_h\}.$$

Esercizio. In $\mathbb{R}^4$, siano

$$U = L((1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,3,1,3))$$

e

$$W = L((1,2,0,2),(1,2,1,2),(3,1,3,1)).$$

Trovare $\dim(U \cap W)$, $\dim(U+W)$ e descrivere $U \cap W$ e $U + W$.

Funzioni tra spazi vettoriali

Preliminari

Siano V, W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e $f\colon V \to W$ un'applicazione. Se $U \subset V$, si chiama *immagine* di U mediante f, l'insieme

$$f(U) = \{\vec{y} \in W \mid \exists \vec{x} \in U : f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

Se $Z \subset W$, si chiama *controimmagine* di V mediante f, l'insieme

$$f^{-1}(Z) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) \in Z\}.$$

Se $Z = \{\vec{y}\}$, allora $f^{-1}(\vec{y}) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{y}\}$. Inoltre

$$\vec{y} \in f(V) \Rightarrow f^{-1}(\vec{y}) \neq \emptyset.$$

Esempio: L'applicazione *costante* $f\colon V \to W$ tale che $f(\vec{x}) = \vec{y}_0$ per ogni $\vec{x} \in V$, verifica

$$\begin{aligned}
&f(V) = \{\vec{y}_0\} \\
&\Rightarrow f^{-1}(\vec{y}_0) = V, \quad f^{-1}(\vec{y}) = \varnothing \quad \forall \vec{y} \neq \vec{y}_0.
\end{aligned}$$

Applicazioni lineari

Siano V, W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. $f\colon V \to W$ si dice *lineare* (o *omomorfismo*) se

$$f(\vec{x} + \vec{x'}) = f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) \quad \forall \vec{x}, \vec{x'} \in V$$
$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in V, \lambda \in \mathbb{K},$$

o, equivalentemente,

$$f(\lambda\vec{x}+\mu\vec{x'}) = \lambda f(\vec{x})+\mu f(\vec{x'}) \quad \forall \vec{x}, \vec{x'} \in V,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Le applicazioni lineari *conservano le operazioni vettoriali*. In particolare, $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

Esempi.

1) $o\colon V \to W$, $\vec{x} \mapsto \vec{0}$, applicazione nulla, è lineare. Le altre applicazioni costanti **non** sono lineari.

2) $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, proiezione, è lineare, suriettiva, ma non iniettiva.

3) $i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, z)$, inclusione, è lineare, iniettiva, ma non suriettiva.

4) Fissato $\vec{a} \in V$, sia $t_{\vec{a}}\colon V \to V$ tale che $\vec{x} \mapsto \vec{x}+\vec{a}$, traslazione. $t_{\vec{a}}$ è lineare se e solo se $\vec{a} = \vec{0}$.

5) Se $f\colon V \to W$ e $g\colon W \to Z$ sono due applicazioni lineari, allora

$$g \circ f\colon V \to Z, \quad \vec{x} \mapsto g \circ f(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$$

è lineare.

Se $V = W$, una applicazione lineare è detta *endomorfismo*. Un esempio è l'*identità*

$$\mathrm{id}_V \colon V \to V, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}.$$

Un endomorfismo $f \colon V \to V$ è detto
involutivo se $f^2 =$id,
proiettore se $f^2 = f$,
nilpotente se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $f^m = o$, endomorfismo nullo.

Se $f, g \colon V \to W$, si pone per definizione

$$\begin{aligned} &f + g \colon V \to W, \quad \vec{x} \mapsto (f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \\ &\lambda f \colon V \to W, \quad \vec{x} \mapsto (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Rispetto a queste operazioni, l'insieme

$$Lin(V, W) = \{f \colon V \to W \mid f \text{ lineare}\}$$

è uno spazio vettoriale, sottospazio di $\mathcal{M}(V, W)$. Come vedremo, se V e W sono finitamente generati, allora

$$\dim(Lin(V, W)) = \dim V \cdot \dim W.$$

Proposizione: Siano V_n, W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$, $B = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ una base di V, e $\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n} \in W$.
Allora, esiste un'unica applicazione lineare $f\colon V \to W$ tale che $f(\vec{v_i}) = \vec{w_i}$ per ogni i.

Dim.: Infatti, per $\vec{x} = x_1\vec{v_1} + \cdots + x_n\vec{v_n}$, si pone

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + x_n f(\vec{v_n}) = x_1\vec{w_1} + \cdots + x_n\vec{w_n}.$$

È immediato verificare che f è lineare. Inoltre f è unica. Infatti, se $g\colon V \to W$ è tale che $g(\vec{v_i}) = \vec{w_1}$, allora per ogni $\vec{x}$, risulta:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - g(\vec{x}) &= x_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + x_n f(\vec{v_n}) \\ &\quad - x_1 g(\vec{v_1}) - \cdots - x_n g(\vec{v_n}) \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Osservazione: Per conoscere un'applicazione lineare $f\colon V \to W$, basta conoscere $f(\vec{v_i})$, dove $\{\vec{v_i}\}$ è una base di V. Inoltre:

S sottosp. di $V \Rightarrow f(S)$ sottosp. di W,

T sottosp. di $W \Rightarrow f^{-1}(T)$ sottosp. di V.

In particolare:

$$\mathrm{ker} f = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \vec{0}\} = f^{-1}(\vec{0}_W),$$

$$\mathrm{im} f = \{f(\vec{x}) \in W \mid \vec{x} \in V\} = f(V)$$

sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e W.

Proposizione: Sia $f\colon V \to W$ lineare. Allora:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x'}) \Leftrightarrow \vec{x'} - \vec{x} \in \ker f$$
$$\Leftrightarrow \exists u \in \ker f : \vec{x'} = \vec{x} + \vec{u}.$$

Dim.:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x'}) \Leftrightarrow f(\vec{x'}) - f(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow f(\vec{x'} - \vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x'} - \vec{x} \in \ker f.$$

Quindi,

$$f \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \ker f = \{\vec{0}_V\} \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V,$$
$$f \text{ è suriettiva} \Leftrightarrow \mathrm{im} f = W \Leftrightarrow f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W.$$

La seguente proprietà è immediata:

Lemma: Siano V_n, W spazi vettoriali, $f\colon V \to W$ lineare, $B = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ una base di V.
Allora, im$f$ è finitamente generato, e

$$\mathrm{im} f = L(f(\vec{v_1}), \dots, f(\vec{v_n})).$$

Quindi, dim(im f) $\leq$dim$V$.

In particolare, dim(im$f$)=dim$V$ se e solo se f è iniettiva. In tal caso, infatti,

$$\lambda_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + \lambda_n f(\vec{v_n}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow f(\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_i = 0.$$

Teorema fondamentale dell'Algebra Lineare: *Siano V_n, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e $f\colon V_n \to W$ lineare. Allora:*

$$\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{im} f) = \dim V.$$

Dim.: Sappiamo già che $\dim(\ker f) \leq \dim V$ e $\dim(\mathrm{im} f) \leq \dim V$. Siano $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ una base di $\ker f$, $\{\vec{w_1}, \dots, \vec{w_1}\}$ una base di $\mathrm{im} f$ e $\vec{v_i} \in V$ i vettori tali che $f(\vec{v_i}) = \vec{w_1}$. Basta provare che $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{v_1}, \dots, \vec{v_q}\}$ è una base di V.

Tali vettori *generano* V. Infatti, se $\vec{x} \in V$, allora $f(\vec{x}) \in$ $\mathrm{im} f$, dunque

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \lambda_1 \vec{w_1} + \cdots + \lambda_q \vec{w_q} \\ &= \lambda_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + \lambda_q f(\vec{v_q}) \\ &= f(\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_q \vec{v_q}), \end{aligned}$$

da cui $\vec{x} - \lambda_1 \vec{v_1} - \cdots - \lambda_q \vec{v_q} \in \ker f$, e quindi

$$\vec{x} - \lambda_1 \vec{v_1} - \cdots - \lambda_q \vec{v_q} = \mu_1 \vec{u_1} + \cdots + \mu_p \vec{u_p}.$$

I vettori sono *linearmente indipendenti*. Infatti,

$$\begin{aligned} & a_1 \vec{u_1} + \cdots + a_p \vec{u_p} + b_1 \vec{v_1} + \cdots + b_q \vec{v_q} = \vec{0}_V \\ & \Rightarrow a_1 f(\vec{u_1}) + \cdots + b_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + b_q f(\vec{v_q}) = \vec{0}_W, \\ & \Rightarrow b_1 \vec{w_1} + \cdots + b_q \vec{w_q} = \vec{0}_W \Rightarrow b_1 = \cdots = b_q = 0, \end{aligned}$$

per l'indipendenza di $\{\vec{w_j}\}$. Dunque,

$$a_1 \vec{u_1} + \cdots + a_p \vec{u_p} = \vec{0}_V \Rightarrow a_1 = \cdots = a_p = 0.$$

da cui la tesi, per l'indipendenza di $\{u_j\}$.

Isomorfismi

Siano V, W spazi vettoriali. Se $f\colon V \to W$ è lineare e biunivoca, f si dice *isomorfismo*. In tal caso, esiste $f^{-1}\colon W \to V$ ed è ancora un isomorfismo.

Se $V = W$, un isomorfismo $f\colon V \to V$ si chiama *automorfismo*.

Due spazi vettoriali V e W si dicono *isomorfi* ($V \cong W$) se esiste un isomorfismo $f\colon V \to W$.

Teorema: *Siano V, W spazi vettoriali di dimensione finita. Allora*

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W.$$

DIM: $V \cong W \Rightarrow \exists f\colon V \to W$ isomorfismo, e risulta $\ker f = \{\vec{0}\}$ e $\mathrm{im} f = W$. Quindi,

$$\text{Teor. fond.} \Rightarrow \dim(W) = \dim(\mathrm{im} f) = \dim V.$$

Viceversa, se $\dim V = \dim W = n$, siano $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ una base di V e $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$ una base di W.
Definiamo un'applicazione lineare $f\colon V \to W$, ponendo $f(\vec{e_i}) = \vec{e}'_i$. Tale f è quindi univocamente definita, e per la linearità, si ha

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n} \Rightarrow f(\vec{x}) = x_1\vec{e}'_1 + \cdots + x_n\vec{e}'_n.$$

Se $\vec{x} \neq \vec{y}$, allora $f(\vec{x}) \neq f(\vec{y})$, dunque f è iniettiva.

Infine, se $\vec{z} = z_1\vec{e}'_1 + \cdots + z_n\vec{e}'_n \in W$, allora posto $\vec{x} = z_1\vec{e_1} + \cdots + z_n\vec{e_n} \in V$, si ha $f(\vec{x}) = \vec{z}$, dunque f è suriettiva.

Per il teorema precedente, se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\dim V = n$, allora $V \cong \mathbb{K}^n$. In altre parole, $\mathbb{K}^n$ è un *modello* per tutti gli spazi vettoriali di dimensione n.
Più precisamente, sia $B = \{\vec{v_1}, \dots \vec{v_n}\}$ una base di V. Allora, l'unica applicazione lineare

$$c_B \colon V \to \mathbb{K}^n, \quad \vec{v_i} \mapsto \vec{e_i},$$

dove $C = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$, è un isomorfismo.

c_B è detta applicazione *coordinata* di V in $\mathbb{K}^n$ rispetto a B. Essa associa a $\vec{v} \in V$ la n-pla delle sue coordinate rispetto a B.

Esempi ed esercizi.

1) Si consideri l'applicazione

$$D = \frac{d}{dt} \colon \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t].$$

Verificare che $D(t^h) = ht^{h-1}$ per $h \geq 1$ e $D(1) = 0$. D è lineare, e im$D = \mathbb{R}_2[t]$, quindi D non è suriettiva. D non è nemmeno iniettiva, poiché ad esempio

$$D(p(t)) = D(p(t) + k), \qquad \forall k \in \mathbb{K}.$$

Dal teorema fondamentale risulta:

$$\dim(\ker D) = \dim(\mathbb{R}_3[t]) - \dim(\mathrm{im} D) = 4 - 3 = 1,$$

per cui, $\ker D = \mathbb{K}$.

2) Si consideri l'endomorfismo

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + z, y, x + z).$$

1. Determinare $\ker f$ e im$f$.

2. Verificare che $\ker(f^2) = \ker f$ e $\mathrm{im}(f^2) = \mathrm{im} f$.

Matrici ed applicazioni lineari

Siano V_n, W_m, due spazi vettoriali **di dimensione finita**, $f\colon V \to W$ lineare, $B = \{\vec{e_i}\}_{1\leq i\leq n}$ una base di V e $B' = \{\vec{e}'_j\}_{1\leq j\leq m}$ una base di W. Allora,

$$f(\vec{e_i}) = a_{1i}\vec{e}'_1 + \cdots + a_{mi}\vec{e}'_m$$

introduce una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, la cui i-esima colonna è data dalle coordinate di $f(\vec{e_i})$ rispetto a B'. In simboli,

$$A = M_B^{B'}(f),$$

detta *matrice associata* ad f rispetto a B e B'. *Variando le basi, la matrice cambia*.

Viceversa, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, definisce un'applicazione lineare

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ X \mapsto AX,$$

e $A = M_C^{C'}(f_A)$, dove C e C' sono le basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$, rispettivamente. Allora,

$$f_A = c_{B'} \circ f \circ c_B^{-1}.$$

Siano V_n, W_m, Z_p spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, e B, B', B'' basi rispettive di V, W, Z. Se $f\colon V \to W$, $g\colon W \to Z$ sono funzioni lineari, allora

$$h = g \circ f\colon V \to Z$$

è lineare, e per le matrici associate vale

$$M_B^{B''}(h) = M_{B'}^{B''}(g) \cdot M_B^{B'}(f).$$

Si noti come nella uguaglianza precedente gli indici B' in alto ed in basso si semplifichino, fornendo un'utile regola pratica.

Nota. $M_B^{B'}(f)$ contiene tutte le informazioni su f. Ad esempio,

$\dim(\mathrm{im} f) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg} A$,

$\dim(\ker f) = \dim V - \mathrm{rg} A$,

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists f^{-1} \Leftrightarrow f$ è un isomorfismo.

Teorema: *Siano V_n, W_m spazi vettoriali di dimensione finita, $f\colon V \to W$ lineare, $B = \{\vec{e_i}\}_{1 \le i \le n}$ una base di V e $B' = \{\vec{e'}_j\}_{1 \le j \le m}$ una base di W. Allora, l'applicazione*

$$M_B^{B'} : Lin(V, W) \to \mathbb{K}^{m,n}, \qquad f \mapsto M_B^{B'}(f)$$

è un'isomorfismo.

DIM: È facile ferificare che $M_B^{B'}$ è lineare. Inoltre, $M_B^{B'}$ è iniettiva, perché $M_B^{B'}(f) = O \Rightarrow f = o$. Infine, $M_B^{B'}$ è suriettiva, poiché per ogni $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ si può costruire un'applicazione lineare $f\colon V \to W$ tale che $M_B^{B'}(f) = A$.

Esempi ed esercizi.

1) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + z, y, x + z)$. Allora, la matrice di f rispetto alla base canonica C di $\mathbb{R}^3$ (in dominio e codominio) è

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Sia $D\colon \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t], t^h \mapsto ht^{h-1}$. Si consideri la base canonica $\mathcal{P} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Allora,

$$M_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si provi che D è nilpotente.

Cambiamenti di base

Siano V_n uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $B = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$, $B' = \{\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n\}$ due basi. Allora,

$$\vec{e}'_k = \sum_{j=1}^{n} p_{jk}\vec{e_j}, \qquad \vec{e_j} = \sum_{r=1}^{n} q_{rj}\vec{e}'_r$$

e per $P = (p_{jk})$ e $Q = (q_{rj})$ vale $Q = P^{-1}$.

P è detta *matrice del cambiamento di base* da B a B'. Come si trasformano le coordinate di un vettore? Sia $\vec{x} \in V$, e sia $\vec{x} = \sum_j x_j\vec{e_j}$, $\vec{x} = \sum_i x'_i\vec{e}'_i$. Allora,

$$\vec{x} = \sum_i x'_i\vec{e}'_i = \sum_i x'_i \left(\sum_j p_{ji}\vec{e_j}\right) = \sum_j \left(\sum_i x'_i p_{ji}\right)\vec{e_j}$$

$$\Rightarrow x_j = \sum_i p_{ji}x'_i \qquad \Rightarrow X = PX',$$

e naturalmente, $X' = P^{-1}X$.

Si può anche pensare al cambio di base come alla funzione lineare $c\colon V \to V, \quad c(\vec{e_i}) = \vec{e'_i}$, per la quale $P = M_B^B(\mathrm{id}_V)$.

Quindi, (a) si 'vedono' gli stessi vettori rispetto a due basi diverse, o (b) si considera il cambio di base una trasformazione da V in V, che porta $\vec{e_i}$ in $\vec{e}'_i$ per ogni i.

Siano V_n, W_m spazi vettoriali, $f\colon V \to W$ lineare, $B = \{\vec{e_i}\}$ una base di V e $C = \{\vec{w_j}\}$ una base di W. Allora, poniamo

$$A = M_B^C(f), \qquad Y = AX.$$

Consideriamo due nuove basi $\tilde{B}$ di V e $\tilde{C}$ di W. Indicate con $\tilde{X}$ le coordinate rispetto a $\tilde{B}$ e con $\tilde{Y}$ quelle rispetto a $\tilde{C}$, si ha

$$X = P\tilde{X}, \qquad Y = Q\tilde{Y},$$

quindi

$$Q\tilde{Y} = A(P\tilde{X}) \Rightarrow \tilde{Y} = Q^{-1}AP\tilde{X}.$$

Ma $\tilde{Y} = \tilde{A}\tilde{X}$, con $\tilde{A} = M_{\tilde{C}}^{\tilde{B}}(f)$, per cui,

$$\tilde{A} = Q^{-1}AP.$$

Se f è un endomorfismo, si può scegliere $B = C$ e $\tilde{B} = \tilde{C}$, quindi $Q = P$, e

$$\tilde{A} = P^{-1}AP,$$

cioè A e $\tilde{A}$ sono matrici **simili**. Quindi, *matrici associate rispetto a basi diverse ad uno stesso endomorfismo sono simili*.

Nota. Poiché dim(im$f$) non dipende ovviamente dalla scelta delle basi,

$$rg(A) = rg(\tilde{A}),$$

ossia, *matrici simili hanno lo stesso rango*.

Esempio.

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $C = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$.

1) Provare che i vettori $\vec{v_1}(1, 0, 1)$, $\vec{v_2}(0, 1, -1)$, $\vec{v_3}(0, 0, 2)$ formano una base B di $\mathbb{R}^3$.

2) Dato l'endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(\vec{v_1}) = (3, 1, 0), \quad f(\vec{v_2}) = (-1, 0, 2),$$

$$f(\vec{v_3}) = (0, 2, 0),$$

determinare la matrice associata ad f rispetto a B e rispetto a C.

Il primo punto è ovvio. Per scrivere $M_C^C(f)$ bisogna conoscere $f(\vec{e_i})$ nella base C. Indicata con B la matrice di passaggio da C a B, si ha

$$\begin{array}{ll} \vec{v_1} = \vec{e_1} - \vec{e_3} & \qquad \vec{e_1} = \vec{v_1} - 1/2\vec{v_3} \\ \vec{v_2} = \vec{e_2} - \vec{e_3} & \qquad \vec{e_2} = \vec{v_2} + 1/2\vec{v_3} \\ \vec{v_3} = 2\vec{e_3} & \qquad \vec{e_3} = 1/2\vec{v_3} \end{array}$$

da cui

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere $M_B^B(f)$ bisogna conoscere $f(\vec{v_i})$ nella base B. Si ottiene

$$A' = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che $A' = B^{-1}AB$.

Sistemi ed applicazioni lineari

Consideriamo un sistema *omogeneo* di m equazioni in n incognite, in forma compatta $AX = O$.
Sia $f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare tale che

$$f_A(X) = AX.$$

Si osservi che $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ è soluzione del sistema $\Leftrightarrow$ $\vec{x} \in \ker f_A$. Quindi, lo spazio delle soluzioni del sistema è $\ker f_A$, e

$$\dim(\ker f_A) = 0 \Rightarrow \vec{0} \text{ è l'unica soluzione}$$

Più in generale, dal Teorema Fondamentale,

$$\dim(\ker f_A) = n - rg(A).$$

Consideriamo ora un sistema lineare *generale*

$$(*) \qquad AX = B \qquad (A\vec{x} = \vec{b})$$

e come prima, consideriamo l'applicazione f_A. Allora:

$$\vec{x} \text{ soluzione di } (*) \Leftrightarrow f_A(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} \in f_A^{-1}(\vec{b}).$$

Pertanto: il sistema $(*)$ è compatibile
$\Leftrightarrow f_A^{-1}(\vec{b}) \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow \vec{b} \in \mathrm{im} f_A$.

Ma $rg(f) = \dim(\mathrm{im} f_A) = rg(A) = p$.

Siano $c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}$, p colonne linearmente indipendenti di A (che generano $\text{im} f_A$). Allora:

$$(*) \text{ compatibile} \Leftrightarrow \vec{b} \in \text{im} f_A \Leftrightarrow \vec{b} \in L(c_{i_1}, \ldots, c_{i_p})$$
$$\Leftrightarrow \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}, \vec{b}\} \text{ lin. dip.} \Leftrightarrow rg\{\vec{b}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}\} = p.$$

Ma $rg\{\vec{b}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_p}\} = rg(\tilde{A}) = p$, dove $\tilde{A} = (A|B)$ è la matrice completa del sistema. Abbiamo così provato il

Teorema di Rouché–Capelli: $(*)$ $AX = B$ *è compatibile se e solo se* $rg(A) = rg(\tilde{A})$.

Descriviamo ora lo spazio S delle soluzioni di $(*)$. Se $f(\vec{x_0}) = \vec{b}$, cioè $\vec{x_0}$ è una soluzione di $(*)$, per la linearità di f si ha

$$S = \vec{x_0} + \ker f.$$

Se $\vec{x_0} \neq \vec{0}$, lo spazio S *non è uno spazio vettoriale*, bensì lo spazio ottenuto traslando lo spazio vettoriale $\ker f$ mediante il vettore $\vec{x_0}$.

$$S = t_{\vec{x_0}}(\ker f).$$

Se U è un sottospazio vettoriale di V ed $\vec{a} \in V$, l'insieme $t_{\vec{a}}(U)$ è detto *varietà lineare* o *spazio affine*.

Per definizione, si pone $\dim S = \dim U$, perché servono $\dim U$ parametri per descrivere S. P. es., solo rette e piani passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, ma tutte le rette ed i piani sono sottospazi affini di dimensione 1 e 2 di $\mathbb{R}^3$.

Autovalori ed autovettori

Siano V uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ ed $f: V \to V$ un endomorfismo. Ci chiediamo se esistono vettori $\vec{x_0} \neq \vec{0}$, tali che

$$f(\vec{x_0}) = \lambda \vec{x_0}, \qquad \lambda \in \mathbb{K},$$

cioè, tali che $f(\vec{x_0}) \parallel \vec{x_0}$.

Definizione: $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto *autovalore* di f se esiste un vettore non nullo $\vec{x}$, tale che

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}.$$

In tal caso, $\vec{x}$ si dice *autovettore* di f associato all'autovalore λ.

La definizione perde di significato se $\vec{x} = \vec{0}$.

Lo studio degli autovalori è uno degli argomenti più importanti sia dal punto di vista teorico sia per le applicazioni dell'Algebra Lineare alla Fisica. Infatti, gli autovalori intervengono ogni volta che l'effetto $f(\vec{x})$ di una applicazione lineare sia proporzionale alla causa $\vec{x}$.

In Fisica, gli autovalori corrispondono agli assi principali di f, cioè sono assi di rotazioni privilegiati. Se S è un solido, soggetto a forze, esso, a causa degli sforzi a cui è sottoposto, si rompe lungo direzioni che sono quelle degli autovettori.

Gli autovettori corrispondono anche alle frequenze critiche di una lamina vibrante. Si tratta del fenomeno delle risonanze, che si incontra con nomi diversi in molte branche della scienza.

Se $\vec{x}$ è un autovalore per f, allora $L(\vec{x})$ è invariante per f, cioè

$$f(L(\vec{x})) \subset L(\vec{x}).$$

Se λ è un autovalore per f, allora

$$V(\lambda) = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_V)$$

è un sottospazio vettoriale di V, detto *autospazio* di f relativo all'autovalore λ. $V(\lambda)$ è formato dal vettore nullo e da tutti gli autovettori relativi a λ, quindi

$$\dim V(\lambda) \geq 1.$$

Il numero naturale $\dim V(\lambda)$ è detto *molteplicità geometrica* di λ.

Teorema: *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sono autovalori di f distinti, e $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_p}$ sono autovettori di f corrispondenti agli autovalori dati, allora i vettori $\vec{x_1}, \ldots, \vec{x_p}$ sono linearmente indipendenti.*

Di conseguenza, se $\lambda_i \neq \lambda_j$, allora

$$V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{\vec{0}\}.$$

Polinomio caratteristico

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice quadrata. Si chiama *autovalore* della matrice A uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ per il quale esiste un vettore non nullo $X \in \mathbb{K}^{n,1}$, tale che

$$AX = \lambda X.$$

Dalla teoria dei sistemi lineari, risulta quindi che

$$\begin{array}{ll} & \lambda \quad \text{autovalore di } A \\ \Leftrightarrow & \exists X \neq 0 : (A - \lambda I_n)X = 0 \\ \Leftrightarrow & (A - \lambda I_n)X = 0 \text{ è un sistema omogeneo NON di Cramer} \\ \Leftrightarrow & \det(A - \lambda I_n) = 0. \end{array}$$

Si dice *polinomio caratteristico* di A, il polinomio

$$\begin{array}{ll} & P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \\ = & c_n(A)\lambda^n + c_{n-1}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + c_1(A)\lambda + c_0(A), \end{array}$$

dove $c_h(A)$ sono funzioni degli elementi della matrice A. In particolare:

$$\begin{aligned} &c_n(A) = (-1)^n, \\ &c_{n-1}(A) = (-1)^{n-1} tr(A), \\ &\ldots \\ &c_0(A) = det(A). \end{aligned}$$

Essendo $c_n(A) \neq 0$, $P_A(\lambda)$ è di grado n.

Teorema: *Se A ed A' sono due matrici simili, allora $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$.*

DIM: Sia $A' = B^{-1}AB$. Allora:

$$\begin{aligned} P_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda I_n) = \det(B^{-1}AB - \lambda B^{-1}B) \\ &= \det(B^{-1}(A - \lambda I_n)B) = \det(A - \lambda I_n) \\ &= P_A(\lambda). \end{aligned}$$

Matrici simili rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse, per cui definiamo il polinomio caratteristico $P_f(\lambda)$ di un endomorfismo $f : V_n \to V_n$, come il polinomio caratteristico di una qualsiasi matrice che lo rappresenti.

Teorema: *Siano V_n uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f: V_n \to V_n$ un endomorfismo. Allora, gli autovalori di f sono le radici in $\mathbb{K}$ dell'equazione $P_f(\lambda) = 0$.*

DIM:

$$\vec{x} \text{ autovettore} \Rightarrow f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Rightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_V)(\vec{x}) = \vec{0},$$

che in forma matriciale, fissata una base, è rappresentato dal sistema omogeneo

$$(A - \lambda I_n)(X) = O,$$

dove $f(X) = AX$.

Esempio. Trovare autovalori ed autospazi di
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (-y, x, 2z).$$
Considerando la base canonica C di $\mathbb{R}^3$, si ha
$$A = M_C^C(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\det(A - \lambda \mathrm{id}) = (2-\lambda)(\lambda^2+1) = 0.$$
Dunque, l'unico autovalore reale di A è $\lambda = 2$. Troviamo ora l'autospazio $V(2)$:
$$(A - 2\mathrm{id})X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow V(2) = \{t(0,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = L(\vec{e_3}).$$

Sia ora $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ f(x,y,z) = (-y, x, 2z)$. Allora, f ha i tre autovalori distinti $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 2$. Si vede facilmente che
$$V(\lambda_1) = L((i,1,0)),\ V(\lambda_2) = L((-i,1,0))$$
$$V(\lambda_3) = L((0,0,1)).$$
Rispetto a $B = \{(i,1,0), (-i,1,0), (0,0,1)\}$,
$$M_B^B(f) = \tilde{A} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Si verifichi che $\tilde{A}$ è simile ad A, e che $\det \tilde{A} = \det A$, $tr\tilde{A} = trA$.

Endomorfismi semplici

Sia V_n uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ si dice *semplice* se esiste una base di autovettori per f.

Se $\tilde{B} = \{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}\}$ è una tale base, allora $f(\vec{u_i}) = \lambda_i \vec{u_i}$ per ogni i, e

$$M^{\tilde{B}}_{\tilde{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

cioè, f è rappresentata da una matrice diagonale. Per questo, si dice anche che f è *diagonalizzabile*.

Se f è semplice e $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_1}\}$ è un'altra base, allora $M^B_B(f) \sim M^{\tilde{B}}_{\tilde{B}}(f)$ che è diagonale.

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è detta *diagonalizzabile* se esiste una matrice D diagonale simile ad A.

Vedremo che **non tutti gli endomorfismi sono semplici**, e quindi non ogni matrice è diagonalizzabile.

Teorema (Criterio di semplicità): *Un endomorfismo $f\colon V \to V$ è semplice se e solo se*

1. tutti gli zeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ di $P_f(\lambda)$ appartengono a $\mathbb{K}$; e

2. $m_i = \dim(V(\lambda_i))$ $\forall i = 1, 2, \ldots, r \leq n$, dove m_i è la molteplicità algebrica di λ_i.

Si può dimostrare che, in generale,

$$1 \leq \dim(V(\lambda_i)) \leq m_i.$$

Quindi, se $P_f(\lambda)$ ha n zeri tutti <u>distinti</u>, appartenenti a $\mathbb{K}$, allora $m_i = 1$ $\forall i$, per cui, f è semplice. D'altra parte, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono distinti, autovettori corrispondenti $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ sono indipendenti, e quindi formano una base.

In termini di autospazi, f è semplice se e solo se

$$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r).$$

Una base di autovettori di V è ottenuta scegliendo una base in ogni autospazio. Da qui segue anche:

f semplice $\Leftrightarrow \dim V = \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_r)$.

Esempi.

$$1) \quad f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (-y, x, 2z),$$

poiché f ammette solo un autovalore reale $\lambda = 2$ di molteplicità algebrica 1, non è semplice. L'analogo endomorfismo su $\mathbb{C}^3$, ha tre autovalori distinti $\pm i$, 2, e quindi è semplice.

2) Si consideri l'endomorfismo

$$f\colon \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}_3[t]$$

che rispetto alla base canonica $\mathcal{P} = \{1, t, t^2, t^3\}$ è associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che

$$\det(A - \lambda \mathrm{id}) = \lambda(\lambda + 2)^2(\lambda - 1) = 0,$$

quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ con $m_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ con $m_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ con $m_3 = 2$. Gli autospazi corrispondenti sono

$$\begin{aligned} V(0) &= L(-t^2 + t^3) && \Rightarrow \dim V(0) = 1 \\ V(1) &= L(2t - 3t^2 + 2t^3) && \Rightarrow \dim V(1) = 1 \\ V(-2) &= L(1, t) && \Rightarrow \dim V(-2) = 2 \end{aligned}$$

e quindi, f è semplice.

Osservazione. Se A ed A' sono matrici simili, allora $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$, ma non vale il viceversa! Infatti, le matrici

$$A = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori, ma non sono simili.

Infatti, se lo fossero, dovrebbe esistere una matrice invertibile P, tale che $A' = P^{-1}OP = O$, che è falso.

Esempi ed esercizi.

1) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $W = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$, dove $\vec{v_1} = (0, 3, 1)$ e $\vec{v_2} = (1, 4, 1)$. Provare che $f : W \to W$, definita da

$$f(\vec{v_1}) = (-1, 5, 2), \qquad f(\vec{v_2}) = (0, 6, 2),$$

è un endomorfismo, e Trovare gli autovalori di $f : W \to W$.

SOLUZIONE: Bisogna provare che $f(W) \subset W$, mostrando che $f(\vec{v_1})$, $f(\vec{v_2}) \in L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

Considerando $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ come base di W, si ha

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

$$\det(A - \lambda \mathrm{id}) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2.$$

2) Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, provare che A e A^T hanno gli stessi autovalori.

3) Provare che se λ è un autovalore per f, allora λ^k ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) è un autovalore per f^k.

4) Dimostrare che se f è un isomorfismo e λ un suo autovalore, allora $\lambda \neq 0$, e λ^{-1} è un autovalore per f^{-1}.

5) **Autovalori di endomorfismi notevoli:** Determinare gli autovalori di f nelle ipotesi seguenti:

1. $f^k = 0$,

2. $f^k = \mathrm{id}$.

Esercizi di riepilogo

1) Sia $\mathcal{F}$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali di una variabile reale.

a) Provare che, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, l'insieme $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x_0) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale.

b)Provare che $e^x, e^{2x} \in \mathcal{F}$ sono indipendenti.

2) In $\mathbb{R}_2[t]$, si considerino $p_1(t) = 1 - t + 2t^2$, $p_2(t) = -2+t^2$, $p_3(t) = -1-t+3t^2$, $q(t) = 1+t$.

a) Vedere se p_1, p_2, p_3 sono dipendenti.

b) Descrivere $W_1 = L(p_1, p_2, p_3)$ e $W_2 = L(q)$.

c) W_1 e W_2 sono tra loro supplementari ?

3) In $\mathbb{R}^{3,3}$, si considerino i vettori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e gli insiemi

$$W_i = \{X \in \mathbb{R}^{3,3} \mid XA_i = A_iX\} \qquad i = 1, 2.$$

a) Verificare che $W_1 = W_2$.

b) Dimostrare che W_i è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{3,3}$ e determinarne una base.

4) Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, base canonica $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

a) Provare che i vettori $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -1)$, $\vec{v}_3 = (0, 0, 2)$, formano una base B di $\mathbb{R}^3$.

b) Dato l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$, tale che $f(\vec{v}_1) = (3, 1, 0), f(\vec{v}_2) = (-1, 0, 2), f(\vec{v}_3) = (0, 2, 0)$, determinare la matrice associata ad f sia rispetto alla base C, sia rispetto a B.

c) Precisare se f è un isomorfismo.

5) Spazio vettoriale V, base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che

$$f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \frac{3}{2}\vec{v}_2\,, \quad f(\vec{v}_1 - 2\vec{v}_3) = -\frac{1}{2}\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3\,,$$

$$f(2\vec{v}_1) = 4\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3\,.$$

Verificare che f è invertibile e determinare la matrice associata ad f^{-1} rispetto a B.

6) Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare l'immagine, mediante f, di $\vec{u} = (1, 0, 3)$ e di $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

b) Trovare, se esistono, le controimmagini del vettore $\vec{v} = (0, 3) \in \mathbb{R}^2$.

7) Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, base canonica $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Verificare che $\vec{u}_1 = (0,0,1), \vec{u}_2 = (0,1,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, lineare, tale che

$$f(\vec{u}_1) = (2,3,5), \quad f(\vec{u}_2) = (-1,0,2),$$

$$f(\vec{u}_3) = (0,3,9).$$

a) Provare che $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{im} f$.

b) Si trovi una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ con $\vec{e}_1 \in \ker f$.

8) Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(x,y) = (-2x + 3y, 2x - 3y)$.

a) Provare che f è diagonalizzabile.

b) Determinare l' endomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che fa passare dalla base canonica a quella di autovettori.

Spazi euclidei

Forme su uno spazio vettoriale.

Sia V_n uno spazio vettoriale **su campo** $\mathbb{R}$.

Una $f\colon V \to \mathbb{R}$, lineare, si dice *forma lineare*. Lo spazio vettoriale

$$V^* = Lin(V, \mathbb{R})$$

è detto *duale* di V. Si ha $\dim V^* = n \cdot 1 = n$, da cui segue $V^* \cong V$.

Un'applicazione

$$\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$$

si dice *bilineare* se è lineare in entrambi gli argomenti, cioè,

$$\begin{aligned}
&\beta(\vec{x} + \vec{x'}, \vec{y}) = \beta(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{x'}, \vec{y}),\\
&\beta(\vec{x}, \vec{y} + \vec{y'}) = \beta(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{x}, \vec{y'}),\\
&\beta(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \beta(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda\beta(\vec{x}, \vec{y}),
\end{aligned}$$

per ogni $\vec{x}, \vec{x'}, \vec{y}, \vec{y'} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Una forma bilineare β è detta *simmetrica* se

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \beta(\vec{y}, \vec{x}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

antisimmetrica o *alternante* se

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = -\beta(\vec{y}, \vec{x}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

In tal caso, $\beta(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ per ogni $\vec{x} \in V$.

Esempio. In $\mathbb{R}^2$, siano $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2)$ due generici vettori.

1) $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ è una forma bilineare simmetrica.

2) $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right|$ è una forma bilineare antisimmetrica.

Se $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ è una base di V_n, la matrice

$$M_B(\beta) = (a_{ij}) = (\beta(\vec{e_i}, \vec{e_j})),$$

si dice *matrice associata a β tramite B*.

La conoscenza di $A = M_B(\beta)$ permette di calcolare $\beta(\vec{x}, \vec{y})$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in V$. Infatti, se $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{e_i}$, $\vec{y} = \sum_j y_j \vec{e_j}$, allora

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \beta(\sum_i x_i \vec{e_i}, \sum_j y_j \vec{e_j}) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j = X^T A Y,$$

dove $X^T = (x_1, \dots, x_n)$, e analogamente per Y.

Si noti che:

$$\beta \text{ simmetrica} \Leftrightarrow M_B(\beta) \text{ simmetrica},$$
$$\beta \text{ antisimmetrica} \Leftrightarrow M_B(\beta) \text{ antisimmetrica}.$$

Se $B' = \{\vec{e}\,'_1, \dots, \vec{e}\,'_n\}$ è una nuova base, allora $\beta(\vec{x}, \vec{y}) = (X')^T A' Y'$. Indicata con P la matrice (invertibile) di passaggio da B a B', si prova facilmente che $A' = P^T A P$.

Poiché $0\vec{x} = \vec{0}$, si verifica facilmente che

$$\beta(\vec{0}, \vec{y}) = \beta(0\vec{x}, \vec{y}) = 0\beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \qquad \forall \vec{y} \in V,$$

e analogamente $\beta(\vec{x}, \vec{0}) = 0$. <u>Non vale il viceversa:</u>

$$\forall \vec{y} \in V \quad \beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}.$$

β si dice *non degenere* quando vale

$$\forall \vec{y} \in V \quad \beta(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0},$$

Ovviamente, se $B = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$, allora

$$\beta \text{ non degenere} \Leftrightarrow \beta(\vec{x}, \vec{e_i}) = 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dunque, se $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ rispetto a B, allora

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \beta(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = 0 \; \forall j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0 \; \forall j,$$

da cui, per la teoria dei sistemi lineari,

$$\beta \; \textit{non} \text{ degenere} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow rg(A) = n.$$

Se $A' = P^T A P$, si prova che $rg(A) = rg(A')$, quindi possiamo definire $rg(\beta) = rg(A)$, dove $A = M_B(\beta)$ rispetto ad una base qualsiasi.
Se $rg(\beta) < n$, allora β è degenere.

Esempi.

1) In V_2, si considerino due basi $B = \{\vec{e_i}, \vec{e_2}\}$ e $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, tali che

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}, \qquad \vec{e}'_2 = \vec{e_1} + \vec{e_2}.$$

Sia

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

La matrice associata a β rispetto alla base B è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Trovare $G' = M_{B'}(\beta)$.

Procedendo direttamente, si ottiene

$$G' = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Si provi che $G' = P^T G P$, dove P è la matrice del cambiamento di base.

2) **(Metrica di Lorentz):** Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \beta(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

La matrice $A = M_C(\beta)$ rispetto alla base canonica C, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essendo $\det A = -1 \neq 0$, la forma bilineare β è non degenere.

Forme quadratiche.

Si dice *forma quadratica associata a una forma bilineare* β, l' applicazione

$$Q\colon V \to \mathbb{R},\ Q(\vec{x}) = \beta(\vec{x}, \vec{x}).$$

Rispetto ad una base B, si ha l'espressione

$$Q(\vec{x}) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = X^T A X,$$

quindi la matrice di β è anche la matrice di Q.

Q è detta *quadratica* perchè

$$Q(\lambda\vec{x}) = \beta(\lambda\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda^2 \beta(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda^2 Q(\vec{x}).$$

Viceversa, data una forma quadratica Q, si può ricostruire la forma bilineare simmetrica da cui proviene:

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})).$$

Infatti:

$$\begin{aligned} &Q(\vec{x} + \vec{y}) = \beta(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \\ &= \beta(\vec{x}, \vec{x}) + \beta(\vec{x}, \vec{y}) + \beta(\vec{y}, \vec{x}) + \beta(\vec{y}, \vec{y}). \end{aligned}$$

L'insieme $\{\vec{x} \in V \mid Q(\vec{x}) = 0\}$ si dice *cono isotropo* della forma bilineare simmetrica β.

Ogni forma quadratica Q ammette una *forma canonica*, cioè una rappresentazione di Q *mediante un polinomio omogeneo privo di termini misti*. Infatti, vale il seguente

Teorema: *Siano V_n uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica e Q la forma quadratica associata.*
Allora, esiste una base $B' = \{\vec{e'_1}, \dots, \vec{e'_n}\}$, per cui $\beta(\vec{e'_i}, \vec{e'_j}) = 0$ per $i \neq j$.

Rispetto alla base B', la matrice $A' = M_{B'}(\beta)$ è diagonale, con $a'_{ii} = \beta(\vec{e'_i}, \vec{e'_i}) \neq 0$ per $i = 1, \dots, p$ e uguali a 0 se $i > p$. Quindi, $rg(\beta) = p$, e

$$Q(\vec{x}) = \alpha'_1 x_1^2 + \cdots + \alpha'_p x_p^2.$$

In termini matriciali, il teorema afferma che, considerata una matrice simmetrica A, esiste almeno una matrice invertibile P ad elementi reali tali che $A' = P^T A P$ sia diagonale.

La forma canonica **non** è unica. In particolare, i coefficienti si possono scegliere in modo tale che $\alpha'_i = \pm 1$.

Si ha allora per Q la *forma normale* (di Sylvester):

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_q^2.$$

I numeri $p, q-p, n-q$ si dicono rispettivamente *indice di positività, indice di negatività* ed *indice di nullità* di Q. La coppia $(p, q-p)$ si dice *segnatura* di Q. Una forma quadratica Q si dice

semidefinita positiva	$\Leftrightarrow q - p = 0$
definita positiva	$\Leftrightarrow p = n$
semidefinita negativa	$\Leftrightarrow p = 0$
definita negativa	$\Leftrightarrow p = 0, q = n$
Lorentziana	$\Leftrightarrow p = n - 1, q - p = 1$
indefinita	$\Leftrightarrow p \neq 0 \neq q - p.$

In particolare, Q è non degenere se $q = n$. Ne segue che Q è:

semidef. pos. (neg)	$\Leftrightarrow$	$Q(\vec{x}) \geq 0 (\leq 0)\ \forall \vec{x}$
def. pos. (neg)	$\Leftrightarrow$	$Q(\vec{x}) > 0 (< 0)\ \forall \vec{x} \neq \vec{0}$
indefinita	$\Leftrightarrow$	non è semidefinita.

Esempi.

1) $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$. Si ha $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$, e

$$M_C\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow Q \text{ è definita positiva.}$$

2) $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\beta(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$. Si ha $Q(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$, e

$$M_C\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow Q \text{ è Lorentziana.}$$

3) $\beta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\beta(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2$. Si ha $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2(+0 \cdot x_3^2)$, dunque Q è semidefinita positiva.

4) Sia $\beta\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rappresentata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ da

$$\beta(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 2(x_1y_2 + x_2y_1) + x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

Rispetto alla base $B = \{\vec{v_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{v_2} = (0,0,1), \vec{v_3} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$, si ha $\beta(\vec{v_i},\vec{v_j}) = 0\ \forall i \neq j$, e β assume la forma canonica

$$Q(\vec{x}) = -{x_1'}^2 + 2{x_2'}^2 + 3{x_3'}^2.$$

La segnatura è $(2,1)$, dunque Q è Lorentziana.

Prodotti scalari

Sono la generalizzazione della nozione analoga vista in $\mathbf{V}_3$ ad uno spazio vettoriale (reale) arbitrario.

Dato V_n uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, si chiama *prodotto scalare* su V un'applicazione

$$g\colon V \times V \to \mathbb{R}$$

bilineare, simmetrica e definita positiva.

Si usa anche la notazione $\vec{u} \cdot \vec{v} = g(\vec{u}, \vec{v})$. g è:

1. distributiva:
   (a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v'}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v'}$,
   (b) $(\vec{u} + \vec{u'}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u'} \cdot \vec{v}$;
2. omogenea:
   (a) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$,
   (b) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$;
3. commutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
4. def. positiva: $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ per ogni $\vec{u} \neq \vec{0}$, per cui, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Si dice *spazio vettoriale euclideo* una coppia (V, g), con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, di dimensione finita, e g un prodotto scalare su V.

Esempi ed esercizi.

1) $V = \mathbf{V}_3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{uv}$ è un prodotto scalare.

2) $V = \mathbb{R}^n$, $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$$

è un prodotto scalare.

3) $V = \mathbb{R}^2$, $g(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 5u_2 v_2$ non è un prodotto scalare. Perché?

4) $V = \mathbb{R}^2$, $g(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2$ non è un prodotto scalare.

5) $V = \mathbb{R}^{n,n}$, $g(A, B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$ è un prodotto scalare.

Siano (V, g) uno spazio euclideo, $\vec{u} \in V$.

$$\|\vec{u}\|_g = \sqrt{g(\vec{u}, \vec{u})} \geq 0$$

si dice *norma*, o *lunghezza*, o *modulo* di $\vec{u}$. Si ha:

$$\|\lambda\vec{u}\|_g = \sqrt{g(\lambda\vec{u}, \lambda\vec{u})} = |\lambda|\|\vec{u}\|_g.$$

Quindi, $Q(\vec{u}) = \|\vec{u}\|_g^2$ è la forma quadratica associata a g. Inoltre,

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|_g^2 - \|\vec{u}\|_g^2 - \|\vec{v}\|_g^2).$$

Due vettori $\vec{u}, \vec{v} \in V$ sono *ortogonali* (rispetto a g) se $g(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, e si scrive $\vec{u} \perp_g \vec{v}$, o $\vec{u} \perp \vec{v}$. In tal caso, vale il *teorema di Pitagora* per spazi vettoriali euclidei:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|_g^2 = \|\vec{u}\|_g^2 + \|\vec{v}\|_g^2.$$

Se $\vec{u}, \vec{v} \in V$,

$$\mathrm{dist}_g(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|_g,$$

si chiama *distanza di $\vec{u}$ da $\vec{v}$* (rispetto a g). Si noti che se $\vec{u} = \vec{OP}$ e $\vec{v} = \vec{OQ}$, allora

$$\mathrm{dist}_g(\vec{u}, \vec{v}) = \mathrm{dist}_g(P, Q) = \|P - Q\|_g.$$

Teorema (Disuguaglianza di Schwarz): *Siano* (V, g) *uno spazio vettoriale euclideo e* $\vec{u}, \vec{v} \in V$*. Allora*

$$|g(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|_g \, \|\vec{v}\|_g, \text{ e } |g(\vec{u}, \vec{v})| = \|\vec{u}\|_g \, \|\vec{v}\|_g \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}.$$

DIM: Se $\vec{v} = \vec{0}$ o $\vec{u} = \vec{0}$, è banale. Se $\vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}$, si consideri $\vec{u} + \lambda\vec{v}$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Essendo g definito positivo, si ha

$$\|\vec{u}+\lambda\vec{v}\|_g^2 = \|\vec{u}\|_g^2 + 2\lambda g(\vec{u}, \vec{v}) + \lambda^2 \|\vec{v}\|_g^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Quindi, questo trinomio di secondo grado in λ ha segno costante, per cui il suo discriminante è nonpositivo, ossia

$$g(\vec{u}, \vec{v})^2 - \|\vec{u}\|_g^2 \, \|\vec{v}\|_g^2 \leq 0.$$

Dal precedente si ottiene anche il seguente

Teorema (Disuguaglianza di Minkowski o triangolare): *Se* V *è uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare* g *e* $\vec{u}, \vec{v} \in V$*, allora*

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|_g \leq \|\vec{u}\|_g + \|\vec{v}\|_g.$$

DIM: Infatti,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|_g^2 &= \|\vec{u}\|_g^2 + 2g(\vec{u}, \vec{v}) + \|\vec{v}\|_g^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|_g^2 + 2|g(\vec{u}, \vec{v})| + \|\vec{v}\|_g^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|_g^2 + 2\|\vec{u}\|_g \, \|\vec{v}\|_g + \|\vec{v}\|_g^2 = (\|\vec{u}\|_g + \|\vec{v}\|_g)^2. \end{aligned}$$

Come sopra, $\|\vec{u} + \vec{v}\|_g = \|\vec{u}\|_g + \|\vec{v}\|_g \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.

La disuguaglianza di Schwartz consente di definire come *coseno dell'angolo* $\widehat{uv}$ (se $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$), il numero

$$\cos \widehat{uv} = \frac{g(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|_g \, \|\vec{v}\|_g}.$$

Esempi.

1) Si consideri in $\mathbb{R}^2$ il prodotto scalare

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Trovare l'angolo tra i vettori $\vec{e_1} = (1, 0)$ e $\vec{e_2} = (0, 1)$.

La matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

e quindi,

$$\cos \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \frac{g(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{\|\vec{e}_1\|_g \, \|\vec{e}_2\|_g} = \frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{5}}.$$

2) Sia $V = \mathbb{R}^{2,2}$ e $g(A, B) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ij}$. Trovare l'angolo tra $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Poiché $g(A, B) = 0$, i due vettori sono ortogonali. Inoltre,

$$\|A\|_g = \sqrt{7}, \quad \|B\|_g = \sqrt{6}.$$

Basi ortonormali

Premettiamo il seguente

Lemma: Se $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ sono vettori di uno spazio vettoriale euclideo (V, g), tra loro ortogonali e non nulli, allora essi sono indipendenti.

DIM: Sia $\lambda_1\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{u}_k = \vec{0}$. Fissiamo i, e moltiplichiamo scalarmente per $\vec{u}_i$. Poiché $g(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$ se $i \neq j$, si ha $\lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Una base $B = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ di uno spazio euclideo (V, g) si dice *ortonormale* se

$$g(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Teorema: *Ogni spazio vettoriale euclideo ammette una base ortonormale.*

DIM: La dimostrazione è costruttiva. Partendo da una qualsiasi base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, si costruisce una base ortonormale $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ tramite il processo di *ortonormalizzazione di Gram–Schmidt*.

Sia, dunque, $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base di (V, g). Poniamo

$$\begin{array}{ll} & \vec{e}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|_g}, \\ \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - g(\vec{u}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1, & \vec{e}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|_g}, \\ \vec{v}_3 = \vec{u}_3 - g(\vec{u}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1 - g(\vec{u}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2, & \vec{e}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|_g}, \\ \dots & \dots \\ \vec{v}_h = \vec{u}_h - \sum_{i=1}^{h-1} g(\vec{u}_h, \vec{e}_i)\vec{e}_i, & \vec{e}_h = \frac{\vec{v}_h}{\|\vec{v}_h\|_g}, \end{array}$$

per ogni h (si " tolgono " da $\vec{v}_h$ le componenti lungo $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_{h-1}$).

Rispetto ad una base ortonormale $\{\vec{e}_i\}$, la matrice associata al prodotto scalare è I_n, ed il prodotto scalare assume la forma standard

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y, \quad \|\vec{x}\|_g^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T X.$$

Inoltre,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i \Rightarrow \lambda_i = g(\vec{x}, \vec{e}_i).$$

Quindi, rispetto ad usa base **ortonormale**,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} g(\vec{x}, \vec{e}_i)\vec{e}_i.$$

Gli scalari $\lambda_i = g(\vec{x}, \vec{e}_i)$ sono anche detti *coefficienti di Fourier di* $\vec{x}$.

Complemento ortogonale

Siano (V, g) uno spazio vettoriale euclideo, $A \subset V$. Il sottospazio vettoriale di V

$$A^\perp = \{\vec{x} \in V \mid g(\vec{x}, \vec{u}) = 0 \ \forall \vec{u} \in A\}$$

è detto *sottospazio ortogonale* di A. Se U è un sottospazio vettoriale, Si prova che

$$V = U \oplus U^\perp$$

e $U^\perp$ è detto *complemento ortogonale* di U.

Se $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ è una base ortonormale per V e $U = L(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$, allora $U^\perp = L(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$.

Ogni $\vec{x} \in V$ si decompone in modo unico come

$$\vec{x} = \vec{x}_U + \vec{x}_{U^\perp} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{e}_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i,$$

con $\lambda_i = g(\vec{x}, \vec{e}_i)$. Il vettore $\vec{x}_U$ è detto *proiezione ortogonale di $\vec{x}$ su U*, perché $\vec{x}_U \in U$ e $\vec{x} - \vec{x}_U \in U^\perp$, cioè, è ortogonale a U.

L'applicazione lineare

$$p_U \colon V \to V, \ \vec{x} \mapsto \vec{x}_U$$

è detta *proiezione ortogonale su U* e $p_U^2 = p_U$.

Si noti che se $\vec{x} \in U$, allora $p_U(\vec{x}) = \vec{x}$, mentre se $\vec{x} \in U^\perp$ allora $p_U(\vec{x}) = \vec{0}$. Quindi, $\mathrm{im}(p_U) = U$, $\ker(p_U) = U^\perp$.

Applicazione aggiunta

Siano (V, g) e (W, h) due spazi vettoriali euclidei e $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Si dimostra che *esiste una ed una sola applicazione lineare* $f^*\colon W \to V$, detta *aggiunta di* f, tale che

$$h(f(\vec{x}), \vec{y}) = g(\vec{x}, f^*(\vec{y})) \qquad \forall \vec{x} \in V,\ \forall \vec{y} \in W.$$

Se B è una base <u>ortonormale</u> per V e B' è una base <u>ortonormale</u> per W, allora

$$M_{B'}^{B}(f^*) = (M_{B}^{B'}(f))^T.$$

Se le basi non sono ortonormali, tale relazione non sussiste. Si osservi che se $f, g\colon V \to V$ sono endomorfismi, allora

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$,

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - z, 2y + z, 3z)$.

Trovare f^*.

Endomorfismi simmetrici

Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale euclideo (V, g) si dice *simmetrico* (o *autoaggiunto*) se $f = f^*$, ossia

$$g(f(\vec{x}), \vec{y}) = g(\vec{x}, f(\vec{y})) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

Se B è una base **ortonormale**, allora la matrice A associata ad f rispetto a B è simmetrica. La funzione

$$Q_f \colon V \to \mathbb{R}, \quad Q_f(\vec{x}) = g(f(\vec{x}), \vec{x})$$

si dice *forma quadratica associata ad f*. Q_f è anche la forma quadratica associata a

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = g(f(\vec{x}), \vec{y}) = X^T AY,$$

per cui,

$$Q_f(\vec{x}) = (AX)^T X = X^T A^T X = X^T AX,$$

Teorema: *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Se $f \colon V \to V$ è un endomorfismo simmetrico, allora*

1. *le soluzioni dell'equazione caratteristica sono tutte <u>reali</u>;*

2. *f ammette una base <u>ortonormale</u> di autovettori.*

CONSEGUENZE:

1) ogni endomorfismo simmetrico f di V è semplice, e V è somma diretta degli autospazi di f a due a due ortogonali;

2) ogni matrice reale simmetrica A è diagonalizzabile ortogonalmente, ossia

$$D = P^T AP,$$

con D matrice diagonale e P matrice ortogonale ($P^T = P^{-1}$).

Se $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ rispetto alla base ortonormale di autovettori $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, allora

$$f(\vec{x}) = f(\sum_i x_i \vec{e}_i) = \sum_i x_i f(\vec{e}_i) = \sum_i x_i \lambda_i \vec{e}_i,$$

e quindi,

$$Q_f(\vec{x}) = g(f(\vec{x}), \vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Quindi, per ridurre a forma canonica una forma quadratica, *basta trovare gli autovalori della matrice simmetrica associata*.
Autovettori di autovalori distinti saranno ortogonali, mentre per autovettori indipendenti di uno stesso autovalore si ortonormalizza.
Ciò giustifica, ad esempio, per $n = 2$, la riduzione a forma canonica di una conica.

Trasformazioni ortogonali

Siano (V, g) e (W, h) due spazi vettoriali euclidei. Un'applicazione $f \colon V \to W$ è detta *ortogonale* se

$$h(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, \vec{y}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

cioè, se f conserva il prodotto scalare. In particolare, f trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

Una *trasformazione ortogonale* di (V, g) è un endomorfismo $f \colon V \to V$ ortogonale.

Teorema: *Siano (V, g) uno spazio vettoriale euclideo e $f \colon V \to V$ un endomorfismo. Sono equivalenti:*

1. $g(f(\vec{x}), f(\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y})$ *per ogni* $\vec{x}, \vec{y} \in V$;
2. $\|f(\vec{x})\|_g = \|\vec{x}\|_g$ *per ogni* $\vec{x} \in V$;
3. $f^* \circ f = \mathrm{id}_V = f \circ f^*$, *ossia*, $f^* = f^{-1}$.

DIM: (1) $\Rightarrow$ (2). Si pone $\vec{x} = \vec{y}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Basta tenere conto del fatto che

$$2g(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} + \vec{y}\|_g^2 - \|\vec{x}\|_g^2 - \|\vec{y}\|_g^2$$

e analogamente per $f(\vec{x})$ e $f(\vec{y})$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Poiché $g(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, f^*(f(\vec{y})))$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in V$, e $g(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, \vec{y})$, si ha

$$\begin{aligned} & g(\vec{x}, (f^*(f(\vec{y})) - \vec{y})) = 0 \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \\ \Rightarrow & f^*(f(\vec{y})) = \vec{y} \ \forall \vec{y}. \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Per definizione, $g(f(\vec{x}), \vec{z}) = g(\vec{x}, f^*(\vec{z}))$ per ogni $\vec{x}, \vec{z} \in V$. Posto $\vec{z} = f(\vec{y})$ e ricordando che $f^* = f^{-1}$, si ha la conclusione $\square$

Dal punto (2) segue che

$$\begin{aligned} \text{dist}(f(\vec{x}), f(\vec{y})) &= \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|_g = \|f(\vec{x} - \vec{y})\|_g \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\|_g = \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

cioè, f è un *movimento* (rigido), ossia, f conserva le distanze.

Per il punto (3), se $A = M_B^B(f)$ è la matrice di f **rispetto ad una base ortonormale** B, si ha

$$A^T A = \text{id} = A A^T \Rightarrow A^T = A^{-1},$$

cioè, A è una matrice *ortogonale*. Un cambiamento di base ortonormale è rappresentato da una matrice ortogonale.

Dal punto (3) segue anche che f è un isomorfismo.

Teorema: *Siano (V, g) uno spazio vettoriale euclideo e $f\colon V \to V$ una trasformazione ortogonale. Gli eventuali autovalori (reali) di f sono ± 1.*

DIM : $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \Rightarrow \|f(\vec{x})\|_g = \|\lambda\vec{x}\|_g = |\lambda|\|\vec{x}\|_g$.
Ma $\|f(\vec{x})\|_g = \|\vec{x}\|_g$, da cui la conclusione.

Osservazione. Una matrice ortogonale non è sempre diagonalizzabile, come mostra l'esempio di $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ la struttura euclidea standard g e in $\mathbb{R}^{2,2}$ il prodotto scalare così definito

$$g'(A, B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

L'applicazione

$$f\colon \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^4, \;\; A \mapsto (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

è una trasformazione ortogonale. Infatti, è lineare e inoltre

$$g(f(A), f(B)) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = g'(A, B).$$

Pertanto, la matrice associata ad f rispetto alle basi canoniche $C = \{\vec{E}_{11}, \vec{E}_{12}, \vec{E}_{21}, \vec{E}_{22}\}$ di $\mathbb{R}^{2,2}$ e $C' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ deve essere ortogonale. In effetti, $M_C^{C'}(f) = \mathrm{id} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

Esercizio. Sia U un piano di $\mathbb{R}^3$. Provare che la proiezione $p_U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non è una trasformazione ortogonale (non è un movimento).

Il gruppo ortogonale

$$O(n;\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A^T = A^{-1}\} \subset \mathbb{R}^{n,n}$$

è un gruppo rispetto alla moltiplicazione tra matrici. Si ha:

$$O(n;\mathbb{R}) = O^+(n;\mathbb{R}) \cup O^-(n;\mathbb{R}),$$

dove

$$O^+(n;\mathbb{R}) = \{A \in O(n;\mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$
$$O^-(n;\mathbb{R}) = \{A \in O(n;\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}.$$

$O^+(n;\mathbb{R})$ è un sottogruppo di $O(n;\mathbb{R})$, mentre non lo è $O^-(n;\mathbb{R})$. Le matrici di $O^+(n;\mathbb{R})$ rappresentano cambiamenti di basi ortonormali equiverse, quelle di $O^-(n;\mathbb{R})$ contraverse. Le matrici di $O^+(n;\mathbb{R})$ sono dette matrici di *rotazioni*, quelle di $O^-(n;\mathbb{R})$ matrici di *ribaltamenti*.

Dato uno spazio euclideo (V, g), il sottoinsieme

$$O(V,g) = \{f\colon V \to V \mid f \text{ ortogonale}\} \subset \mathrm{End}(V)$$

è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

Fissata una base B **ortonormale** di V, è immediato verificare che l'applicazione

$$M\colon O(V,g) \to O(n,\mathbb{R}),\ \ f \mapsto M_B^B(f)$$

è un isomorfismo di gruppi.

Caso particolare $n = 2$. Se $A \in O^+(2;\mathbb{R})$, allora esiste $\varphi \in \mathbb{R}$, tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R(\varphi).$$

Si verifichi che $R(\varphi) \cdot R(\psi) = R(\varphi + \psi)$.

La trasformazione ortogonale $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tale che $f_A(X) = AX$, è una <u>rotazione</u> di angolo φ.

Se $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, l'unico vettore fisso è il vettore nullo, e non esistono autovettori per f. (Le radici dell'equazione caratteristica non sono reali.)

Se $A \in O^-(2;\mathbb{R})$, allora esiste $\varphi \in \mathbb{R}$, tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = S(\varphi).$$

Si verifichi che $S(\varphi) \cdot S(\psi) = R(\varphi - \psi)$.

La trasformazione ortogonale $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tale che $f_A(X) = AX$, ha autovalori ± 1 e autospazi

$$V(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\sin(\tfrac{\varphi}{2}) - y\cos(\tfrac{\varphi}{2}) = 0\}$$
$$V(-1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\sin(\tfrac{\varphi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) - y\cos(\tfrac{\varphi}{2} + \tfrac{\pi}{2}) = 0\}$$

Le rette $V(1)$ e $V(-1)$ sono tra loro ortogonali. f_A si dice *ribaltamento* o *simmetria ortogonale* rispetto alla retta $V(1)$. L'endomorfismo f_A è semplice.

Caso particolare $n = 3$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una trasformazione ortogonale e consideriamo il *sottospazio dei vettori fissi*

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\}.$$

La classificazione e l'intepretazione geometrica di f sono determinate dalla dimensione di U. Infatti:

a) $\dim U = 3 \quad \Rightarrow \quad f$ è l'identità

b) $\dim U = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ e, data una base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ con $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in U$, $\vec{e}_3 \in U^\perp$, si ha $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, f(\vec{e}_2) = \vec{e}_2, f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_3$.
$\Rightarrow f$ è il ribaltamento rispetto al piano U.

c) $\dim U = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$, e la restrizione di f su $U^\perp$ è una trasformazione ortogonale del piano priva di punti fissi (quindi, una rotazione).
$\Rightarrow f$ è la rotazione intorno alla retta U.

d) $\dim U = 0$. Poniamo $W = \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$.

$\Rightarrow \dim W \geq 1$.

Il sottospazio W non può avere dimensione 2, altrimenti $\dim U \neq 0$. $\dim W = 3 \Rightarrow f = -I_V$.

$\dim W = 1 \Rightarrow \quad \mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$, e la restrizione di f su $W^\perp$ è una trasformazione ortogonale del piano priva di punti fissi (quindi, una rotazione).

$\Rightarrow f$ è una *rotosimmetria*=composizione di una rotazione intorno alla retta W e di una simmetria rispetto al piano $W^\perp$.

Se B è una base ortonormale contenente una base di U (nelll'ultimo caso, di W) e $A = M_B^B(f)$, allora

$$\dim U = 3 \ \Rightarrow A = \mathrm{I}_3,$$

$$\dim U = 2 \ \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dim U = 1 \ \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\dim U = 0 \ \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\varphi) \end{pmatrix}$$

Esercizio. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

e sia $f_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_A(X) = AX$ rispetto alla base canonica.

1. Provare che f è una trasformazione ortogonale.

2. Trovare $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$.

3. Trovare i punti fissi di f e dire che cosa rappresenta f geometricamente.

4. Trovare gli autovalori di A^h per ogni $h \in \mathbb{N}$ e vedere se A^h è diagonalizzabile.

(3): Il sistema omogeneo $A - \mathrm{id}X = O$ dà come soluzione il piano $x = \sqrt{3}z$.
$\Rightarrow f$ è la simmetria ortogonale rispetto a questo piano.

(4): Poiché $A = A^T = A^{-1}$, si ha $A^2 =$id e $A^h =$id per h pari e $A^h = A$ per h dispari. Se h è pari A^h ha l'autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità 3; se h è dispari A^h ha l'autovalore $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 2 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità 1.
Essendo A simmetrica, anche A^h è simmetrica e quindi diagonalizzabile.

Movimenti rigidi

Sia (V, g) uno spazio euclideo di dimensione n. Si dice *movimento (rigido)* di V un'applicazione $m : V \to V$ che *conserva le distanze*.
Si prova che m è ottenuta componendo una trasformazione ortogonale f di V con una traslazione $t_{\vec{b}}$ (dove $\vec{b} = m(\vec{0})$), ossia

$$m = t_{\vec{b}} \circ f : V \to V, \qquad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) + \vec{b}.$$

Equivalentemente, $m = f \circ t_{\vec{c}}$, con $\vec{c} = f^{-1}(\vec{b})$.

Si osservi che, se $\vec{b} \neq \vec{0}$, allora m non è una trasformazione lineare.

Si prova immediatamente che $m = t_{\vec{b}} \circ f$ conserva le distanze.

Esercizi di riepilogo

1) Si consideri la forma bilineare $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ associata (rispetto alla base canonica) alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Vedere per quali valori di a la matrice A è diagonalizzabile.

b) Studiare, $\forall a \in \mathbb{R}$, la segnatura di β.

c) Provare che per $a = 2$ la forma β definisce un prodotto scalare e trovare una base ortonormale rispetto a β.

2) Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ riferito alla base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2\}$.

a) Provare che $\vec{u}_1 = (1, 1, -1), \vec{u}_2 = (1, -1, 0)$, $\vec{u}_3 = (-1, 0, 1)$ formano una base $\tilde{\mathcal{B}}$.

b) Si dimostri che (E, g) è uno spazio vettoriale euclideo, dove

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3 .$$

c) Dedurre dalla base $\tilde{\mathcal{B}}$ una base g-ortonormale.

d) Descrivere $U^{\perp}$, dove $U = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

e) Trovare la proiezione ortogonale di $\vec{x} = (0, 1, 1)$ su U.

3) Sia $V = \mathbb{R}_n[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale ad n. Per $p, q \in V$ si consideri l'applicazione

$$g : V \times V \to \mathbb{R}, \quad g(p,q) = \int_{-1}^{+1} p(t)q(t)\, dt\,.$$

a) Provare che g è un prodotto scalare.

b) Nel caso $n = 2$ trovare la matrice associata a g rispetto alla base canonica di V.

c) Determinare una base ortonormale di V.

4) Si consideri l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, individuato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ridurre a forma canonica la forma quadratica associata ad f.