Domande di Complementi di Algebra

1. Definizione di estensione separabile. Esempi di estensioni separabili e non separabili.
2. Definizione di estensione normale. Esempi di estensioni normali e non normali.
3. Definizione di estensione di Galois. Esempi di estensioni di Galois e non di Galois.
4. Studiare la corrispondenza di Galois per il campo di spezzamento del polinomio $(x^2-2)(x^2-3)$.
5. Siano p, q e r tre primi distinti. Determinare il gruppo di Galois del polinomio $(x^2-p)(x^2-q)(x^2-r)$.
6. Studiare la corrispondenza di Galois per il campo di spezzamento del polinomio x^3-5 su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{F}_7$.
7. Sia G il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{E}/\mathbb{K}$. Provare che se esiste $\sigma \in G$ per cui $\mathbb{E}^\sigma = \mathbb{K}$ allora G è ciclico.
8. Determinare i gradi delle sottoestensioni del campo di spezzamento di x^7-1 su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{F}_{13}$.
9. Determinare il gruppo di Galois del polinomio $x^{11}-1$ su $\mathbb{F}_p$ al variare di p tra i numeri primi. Lo stesso per x^7-1.
10. Determinare il grado del campo di spezzamento di $(x^5-1)(x^2-a)$ al variare di a nei numeri interi.
11. Posto $\zeta \doteq e^{\frac{2\pi i}{11}} \in \mathbb{C}$ e $\alpha \doteq \zeta+\zeta^3+\zeta^4+\zeta^5+\zeta^9$, provare che α ha grado 2 su $\mathbb{Q}$ e concludere che $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ è l'unica sottoestensione quadratica di $\mathbb{Q}(\zeta)$.
12. Provare che il discriminante del polinomio x^3+ax+b è dato da $-4a^3-27b^2$.
13. Calcolare il discriminante del polinomio x^4+a.
14. Indicata con ζ una radice primitiva n–esima, con $n \geq 2$ naturale, dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta)$ ha grado 2 su $\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$.
15. Dimostrare che i polinomi ciclotomici sono irriducibili su $\mathbb{Q}$.
16. Studiare la corrispondenza di Galois per il polinomio x^8-1 su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{F}_p$, al variare di p tra i numeri primi.
17. Provare che un'equazione polinomiale di grado 4 è risolubile per radicali.
18. Quali poligoni regolari sono costruibili con riga e compasso e perché?
19. Se n e m sono due naturali primi tra loro e l'n–agono regolare e l'm–agono regolare sono costruibili con riga e compasso allora anche l'nm–agono lo è.
20. Determinare il grado del campo di spezzamento di x^p-2 su $\mathbb{Q}$ con p primo.