Esercizi di Geometria e Algebra
6 novembre 2013

1. Sia $n \geq 1$ e sia

$$A_n \doteq \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Provare che $\det A_n = n + 1$.

Soluzione. Procediamo per induzione su n. Il passo base corrisponde a $n = 1$ e, in tale caso, abbiamo $A_1 = (2)$ e quindi $\det A_1 = 2 = 1 + 1$; abbiamo così verificato la formula per $n = 1$.

Per il passo induttivo fissiamo un naturale $n > 1$ e supponiamo che la formula da dimostrare sia vera in $1, 2, \ldots, n$ e proviamo che è vera anche in $n + 1$.

Sviluppando il determinante della matrice A_{n+1} (che è una matrice $(n + 1) \times (n + 1)$) secondo la prima riga abbiamo, usando Laplace,

$$\det A_{n+1} = 2 \det B - (-1) \det C$$

dove B è la matrice ottenuta togliendo la prima riga e la prima colonna di A_{n+1} e C è la matrice ottenuto togliendo la prima riga e la seconda colonna di A_{n+1}.

Quindi $B = A_n$ mentre C è la seguente matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante di C usiamo ancora Laplace sviluppando questa volta secondo la prima colonna. Abbiamo quindi $\det C = -\det A_{n-1}$; infatti la sottomatrice di C che si ottiene eliminando la prima riga e la prima colonna è proprio A_{n-1}.

Mettendo insieme quanto visto e usando che la nostra tesi è vera per n e per $n-1$, abbiamo

$$\det A_{n+1} = 2 \det A_n - \det A_{n-1} = 2(n + 1) - n = n + 2$$

e quindi la tesi è vera anche per $n + 1$. Ciò completa la dimostrazione per induzione.

Abbiamo cioè visto che $\det A_n = n + 1$ per ogni $n \geq 1$ naturale.

2. Verificare che

$$A_1^{-1} = \frac{1}{2}(1), \quad A_2^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

E in generale?

Soluzione. Per verificare che le matrici indicate siano effettivamente le inverse di A_1, A_2, A_3 e A_4 basta semplicemente moliplicarle rispettivamente per A_1, A_2, A_3 e A_4 e controlalre che si ottiene l'identità.

Possiamo anche procedere in altri modi. Ad esempio, per $n = 1$, abbiamo $A_1 = (2)$ ed è quindi chiaro che $A_1^{-1} = (1/2)$ come indicato.

Per $n = 2$ possiamo usare la formula esplicita per l'inversa di una matrice (invertibile!) 2×2. Infatti se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $\Delta \doteq \det A = ad - bc \neq 0$ allora $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Applicando questa formula ad A_2, abbiamo subito $A_2^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Per $n = 3$ possiamo usare la formula esplicita con l'aggiunta oppure procedere con l'algoritmo di Gauss–Jordan. Per questo secondo metodo ecco una serie di possibili passaggi (ma non sono gli unici!):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3/4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1/4 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right)$$

Nella sottomatrice di destra abbiamo l'inversa di A_3 che coincide con la matrice del testo.

Per un n generico la matrice inversa è data da $\frac{1}{n+1}(b_{i,j})$ dove

$$b_{i,j} \doteq \begin{cases} (n - i + 1)j & \text{se } i \geq j \\ i(n - j + 1) & \text{se } i < j \end{cases}$$

come si può controlare (ma non è facilissimo!) moltiplicando la matrice ora definita per A_n (questo prodotto deve fare l'identità).

3. Portare a scala le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Una possibile sequenza di mosse elementari per la prima matrice è la seguente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 + R_1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 - R_2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 + R_3}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 - R_4} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la seconda matrice invece possiamo procedere come segue

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5 \to R_5 + R_3} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Calcolare, in funzione di $\alpha \in \mathbb{R}$, il rango delle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & -\alpha \\ -1 & 2 & -\alpha \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il determinante della prima matrice è $4 - \alpha$ e quindi, per $\alpha \neq 4$, troviamo che il rango è 2 mentre per $\alpha = 4$ il rango è 1 visto che, sostituendo 4 ad α, la matrice *non* diventa la matrice nulla.

Un altro metodo per calcolare il rango è portare la prima matrice in una forma a scala. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & -\alpha \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 \\ 0 & \boxed{-\alpha + 4} \end{pmatrix}.$$

Anche in questo modo otteniamo che se $\alpha \neq 4$ allora la forma a scala ha due pivot e quindi la matrice data ha rango due, altrimenti per $\alpha = 4$ abbiamo un solo pivot e quindi rango 1.

Per la seconda matrice procediamo, come primo modo, a calcolare il determinante; troviamo $-\alpha^2 - 7\alpha + 8$. Questo polinomio in α ha per radici 1 e 8. Quindi, per $\alpha \neq 1, 8$ la matrice ha rango 3. Per $\alpha = 1$ abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e tale matrice ha rango 2 in quanto il primo minore 2×2 in alto a sinistra (ad esempio) ha determinante non nullo.

Analogamente per $\alpha = 8$ abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & -8 \\ -1 & 2 & -8 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

che ha ancora rango 2.

Anche per questa seconda matrice possiamo operare sulle righe per ottenere una forma a scala a calcolare il rango dal numero di pivot. Abbiamo

$$\begin{pmatrix} 2 & -\alpha & -\alpha \\ -1 & 2 & -\alpha \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -\alpha \\ 2 & -\alpha & -\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha - 2 & -\alpha + 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & -\alpha - 2 \\ 0 & -\alpha - 2 & -\alpha + 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{\alpha+2}{3} R_2} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & -\alpha - 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\dfrac{-\alpha^2 - 7\alpha + 8}{3}} \end{pmatrix}$$

e quindi, equivalentemente al primo metodo, se α non è radice del polinomio $-\alpha^2 - 7\alpha + 8$ (cioè se $\alpha \neq 1, 8$) allora abbiamo tre pivot e quindi la matrice data ha rango 3, altrimenti solo due pivot e quindi rango 2.

5. Trovare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}_4[t]$ generato dai polinomi $1 - t + t^2 - t^3$, $t^2 - 1$, $t^3 - 1$, $t^4 - 1$ e $4 - t - t^2 - t^3 - t^4$.

   Soluzione. Scegliamo $1, t, t^2, t^3, t^4$ come base dello spazio $\mathbb{R}_4[t]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 4. Rispetto a tale base $\mathcal{B}$ i polinomi dati hanno coordinate

$$c_{\mathcal{B}}(1 - t + t^2 - t^3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{\mathcal{B}}(t^2 - 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_{\mathcal{B}}(t^3 - 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$c_{\mathcal{B}}(t^4 - 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\mathcal{B}}(4 - t - t^2 - t^3 - t^4) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Possiamo ora usare l'algoritmo di Gauss per mettere a scala la matrice costituita dai vettori colonna delle coordinate sopra trovate. Abbiamo cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Con semplici calcoli, analoghi a quanto visto negli esercizi precedenti, troviamo che una sua possible (ma non unica!) forma a scala è la seguente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi le prima quattro colonne sono una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$ generato dai vettori colonna delle coordinate. Possiamo allora prendere i corrispondenti quattro primi polinomi come base del sottospazio generato cercato in $\mathbb{R}_4[t]$.

6. Trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^{2,3}$ generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Scegliamo la base $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}$ (cioè le matrici elementari) per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,3}$, calcoliamo le coordinate delle matrici date rispetto a questa base, mettiamo tali vettori colonna nelle colonne di una matrice e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una possibile forma a scala di questa matrice è

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi prendere la prima, la seconda e la quarta matrice come base del sottospazio generato da tutte e quattro le matrici.