Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Prova scritta di Geometria e Algebra

raccolta domande 2011–2012 (fino al 16.01.2013)

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_r$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Allora

   ☐ $r \geq 3$.
   ☐ $r \geq 2$.
   ☐ $r \leq 2$.
   ☐ $r \leq 3$.
   ☐ $r = 3$.

2. Se 0 è un autovalore di un endomorfismo f allora

   ☐ f è suriettivo
   ☐ il nucleo di f è banale
   ☐ f non è iniettivo
   ☐ f è iniettivo
   ☐ l'unico elemento del nucleo di f è il vettore nullo

3. Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare con $\dim \operatorname{Ker} f = 3$. Allora

   ☐ f non è suriettiva.
   ☐ f è suriettiva.
   ☐ f è l'applicazione lineare nulla.
   ☐ f può essere iniettiva.
   ☐ f è iniettiva.

4. Se il sistema $Ax = y$ ha ∞^k soluzioni allora il sistema $Ax = 0$ ha ∞^h soluzioni con

   ☐ h strettamente maggiore a k.
   ☐ h uguale a k.
   ☐ h maggiore o uguale a k.
   ☐ h strettamente minore di k.
   ☐ h minore o uguale a k.

5. Siano u, v vettori di $\mathbb{R}^7$. Allora

   ☐ $\mathcal{L}(u, v, u + v)$ è contenuto in $\mathcal{L}(u, v)$ ma è diverso da $\mathcal{L}(u, v)$.
   ☐ $0 \notin \mathcal{L}(u, v)$.
   ☐ $\mathcal{L}(u, v, u + v) = \mathcal{L}(u, v)$.
   ☐ $u - v \notin \mathcal{L}(u, v)$.
   ☐ $\mathcal{L}(u, v, u + v)$ contiene $\mathcal{L}(u, v)$ ma è diverso da $\mathcal{L}(u, v)$.

6. Siano π_1, π_2 due piani di $\mathbb{R}^3$ e sia $p \in \pi_1 \cap \pi_2$, allora

   ☐ i due piani si intersecano solo in p
   ☐ esiste esattamente una retta r con $r \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$
   ☐ esiste almeno una retta $r \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$
   ☐ i due piani sono perpendicolari
   ☐ ogni retta per p è contenuta nell'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$

7. Siano U, V sottospazi di uno spazio vettoriale W. Allora $U \cap V$ è

- ☐ il più piccolo sottospazio di W contenuto in U e V.
- ☐ V.
- ☐ $U+V$.
- ☐ il più grande sottospazio di W contenuto in U e V.
- ☐ $\{0\}$.

8. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare, se $u, v \in V$ sono vettori non nulli per cui $f(u) = u$ e $f(v) = -v$ allora
   - ☐ u e v sono linearmente indipendenti
   - ☐ $u = v$
   - ☐ $f(u) = f(v)$
   - ☐ $u = -v$
   - ☐ u e v sono linearmente dipendenti

9. Se u e v hanno norma a per un prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ allora $u+v$ ha norma
   - ☐ maggiore di $2a$
   - ☐ minore o uguale a $2a$
   - ☐ 0
   - ☐ uguale a $2a$
   - ☐ a

10. Se A e B sono due matrici quadrate $n \times n$ allora
    - ☐ $\det A = \det B$.
    - ☐ $\det(A+B) = \det A + \det B$.
    - ☐ $AB = BA$.
    - ☐ $\det(AB) = \det(BA)$.
    - ☐ Il prodotto AB non ha senso.

11. Se β è una forma bilineare simmetrica semidefinita positiva su V e $u \in V$ è tale che $\beta(u,u) \leq 0$ allora
    - ☐ $\beta(u,u) = 0$
    - ☐ $u = 0$
    - ☐ non esiste un tale u
    - ☐ $\beta(u,u) > 0$
    - ☐ $\beta(u,u) < 0$

12. Sia λ un autovalore di $f : V \longrightarrow V$. Allora
    - ☐ $\lambda \neq 0$.
    - ☐ esiste un vettore $v \in V$ per cui $f(v) \neq \lambda v$.
    - ☐ f ha determinante λ.
    - ☐ λ^2 è un autovalore di $f \circ f$.
    - ☐ per ogni vettore $v \in V$ si ha $f(v) = \lambda v$.

13. Siano U e V due sottospazi vettoriali di W. Allora $U+V$ è:
    - ☐ Il più piccolo sottospazio che contiene sia U che V.
    - ☐ Il più grande sottospazio che contiene sia U che V.
    - ☐ Solo un sottoinsieme, non un sottospazio.
    - ☐ Tutto lo spazio W.
    - ☐ L'unione di U e V.

14. Se A è una matrice con n righe e m colonne quando è possibile calcolare A^2?

- ☐ Solo se $n = m$.
- ☐ Solo se $n > m$.
- ☐ Solo se $n < m$.
- ☐ Mai.
- ☐ Sempre.

15. Sia V un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[t]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nell'indeterminata t. Allora $\dim V$ è

- ☐ Minore o uguale a 2.
- ☐ Uguale a 4.
- ☐ Uguale a 3.
- ☐ Minore o uguale a 3.
- ☐ Minore o uguale a 4.

16. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con autovalori $-h, 0, h+1$ per $h \in \mathbb{R}$. Allora

- ☐ f è semplice per $h \neq -1, 0, 1/2$.
- ☐ f è sempre semplice.
- ☐ f è semplice solo per $h \neq -1, 0, 1/2$
- ☐ f è semplice per $h \neq -1, 0, -1/2$.
- ☐ f è semplice solo per $h \neq -1, 0, -1/2$

17. Sia A una matrice quadrata di rango massimo. Allora

- ☐ il determinante di ogni minore di A è zero.
- ☐ il determinante di ogni minore di A non è zero.
- ☐ il determinante di A non è zero.
- ☐ il determinante di A è zero.
- ☐ il determinante di A può essere zero.

18. Se $f : U \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow W$ sono applicazioni lineari e $g \circ f$ è suriettiva allora

- ☐ g e f sono suriettive
- ☐ f è suriettiva
- ☐ g è suriettiva
- ☐ f è iniettiva
- ☐ g è iniettiva

19. Siano u, v due vettori di norma unitaria in $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $u + v$ ha norma

- ☐ 2.
- ☐ minore di 1.
- ☐ maggiore di 2.
- ☐ minore o uguale a 2.
- ☐ 1.

20. Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo semplice con esattamente due autovalori distinti λ_1,λ_2. Allora

- ☐ la dimensione di V è la somma delle molteplicità algebriche di λ_1 e λ_2.
- ☐ la dimensione di V è minore della molteplicità geometrica di λ_1.
- ☐ λ_1 e λ_2 sono entrambi non nulli.
- ☐ uno tra λ_1 e λ_2 è nullo.

- ☐ la dimensione di V è la molteplicità geometrica di λ_1.

21. Sian π un piano di $\mathbb{R}^3$ e siano r, s due rette con $r \subset \pi$ e $r \cap s \neq \varnothing$.

- ☐ r e s sono perpendicolari.
- ☐ $s \subset \pi$.
- ☐ r e s non sono sghembe.
- ☐ s è perpendicolare π.
- ☐ r è perpendicolare ad π.

22. Sia λ un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$. Allora

- ☐ $\lambda \neq 0$.
- ☐ La molteplicità algebrica e geometrica di λ sono positive.
- ☐ $\lambda^3 = 1$.
- ☐ Anche 2λ è un autovalore di f.
- ☐ 2λ non è un autovalore di f.

23. Siano v_1, v_2, v_3 vettori linearmente dipendenti e sia $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ una loro combinazione lineare con $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Allora

- ☐ v può essere 0.
- ☐ $v = 0$.
- ☐ $v \neq 0$.
- ☐ v è v_1 o v_2 o v_3.
- ☐ $-v = 0$.

24. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$. Allora vale

- ☐ I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono diversi da zero.
- ☐ $n \leq 4$.
- ☐ $n \geq 4$.
- ☐ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
- ☐ $n = 4$.

25. Se A e B sono due matrici simili allora

- ☐ $A \cdot B = \mathrm{Id}$
- ☐ $A \cdot B^{-1} = \mathrm{Id}$
- ☐ $B \cdot A \cdot B^{-1} = A$.
- ☐ $\det A = \det B$
- ☐ $\det A = \det B^{-1}$

26. Siano r, s due rette di $\mathbb{R}^3$ incidenti nel punto p. Allora

- ☐ tutte le rette per p sono parallele ad r e ad s.
- ☐ esistono infinite rette perpendicolari ad r e ad s.
- ☐ non esiste alcuna retta perpendicolare ad r e ad s.
- ☐ non esiste alcuna retta passante per p.
- ☐ esiste un'unica retta perpendicolare ad r e ad s passante per p.

27. Siano r e s due rette contenute nel piano π di $\mathbb{R}^3$. Allora esse sono sghembe se

- ☐ Sono perpendicolari.
- ☐ Si intersecano.
- ☐ Non si intersecano.

- ☐ Non sono parallele.
- ☐ In nessun caso.

28. Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V sono linearmente indipendenti, allora

- ☐ $\dim V < n$
- ☐ $\dim V \leq n$
- ☐ $\dim V = n$
- ☐ $\dim V \geq n$
- ☐ $\dim V > n$

29. Se β è una forma bilineare simmetrica semidefinitiva positiva su $\mathbb{R}^n$ allora la forma β' definita da $\beta'(u, v) = -\beta(u, v)$ per ogni u, v in $\mathbb{R}^n$ è

- ☐ semidefinita negativa.
- ☐ definita positiva.
- ☐ definita negativa.
- ☐ semidefinita positiva.
- ☐ nulla.

30. Se $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare iniettiva allora

- ☐ $n = 3$
- ☐ una tale f non esiste.
- ☐ $n \leq 3$
- ☐ $n \geq 3$
- ☐ $n < 3$

31. Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ e sia (i_+, i_0, i_-) la sua segnatura. Allora vale

- ☐ $i_+ = 1$, $i_0 = 1$ e $i_- = 1$.
- ☐ $i_+ = 3$, $i_0 = 0$ e $i_- = 0$.
- ☐ $i_+ + i_0 + i_- = 3$.
- ☐ $i_+ = 0$, $i_0 = 0$ e $i_- = 3$.
- ☐ $i_+ + i_0 + i_- < 3$.

32. Siano U, V due sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora vale

- ☐ $U \cap V = \{0\}$.
- ☐ $U = V$.
- ☐ $\dim(U + V) = 5$.
- ☐ $U + V \neq \mathbb{R}^5$.
- ☐ $U + V = \mathbb{R}^5$.

33. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare non nulla che si annulla su due vettori linearmente indipendenti. Allora

- ☐ f è suriettiva.
- ☐ f è iniettiva.
- ☐ La dimensione del nucleo è maggiore di 2.
- ☐ La dimensione del nucleo è minore di 2.
- ☐ La dimensione dell'immagine di f è 1.

34. Siano r, s rette parallele di $\mathbb{R}^3$. Allora

- ☐ r, s sono contenute in qualche piano.

- ☐ r, s s'intersecano.
- ☐ r, s sono sghembe.
- ☐ r, s non sono contenute in alcun piano.
- ☐ r, s sono contenute in un solo piano.

35. Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ semidefinita positiva non definita positiva. Allora

- ☐ esiste un vettore v in $\mathbb{R}^3$ di norma nulla rispetto a β.
- ☐ gli indici sono tutti 1.
- ☐ l'indice di positività è positivo.
- ☐ l'indice di negatività è positivo.
- ☐ la somma degli indici è 2.

36. Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ allora

- ☐ $\dim \operatorname{Im} f = 2$
- ☐ $\dim \operatorname{Im} f = 0$
- ☐ $\dim \ker f = 3$
- ☐ $\dim \ker f = 0$
- ☐ $\dim \ker f \geq 3$

37. Siano u e v due vettori di norma 1 in $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare standard. Allora

- ☐ $(u, v) \geq 1$.
- ☐ $(u, v) = 0$.
- ☐ $(u, v) > 1$.
- ☐ $(u, v) \leq 1$.
- ☐ $(u, v) < 1$.

38. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ con $\dim \operatorname{Im} f = 3$. Allora

- ☐ $\dim \operatorname{Ker} f = 3$.
- ☐ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
- ☐ Esiste $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ con $f(v) = 0$.
- ☐ f è suriettiva.
- ☐ $f(v) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

39. Se u e v sono vettori di $\mathbb{R}^3$ di norma a rispetto al prodotto scalare standard allora

- ☐ $|u + v| \leq 2a$
- ☐ $|u + v| = 0$
- ☐ $|u + v| = |u| + |v|$
- ☐ $|u + v| = 2a$
- ☐ $|u + v| \geq 2a$

40. Se v_1, v_2, v_3 sono tre vettori linearmente indipendenti, in quanti modi posso scrivere 0 come loro combinazione lineare?

- ☐ In almento tre modi.
- ☐ In esattamente tre modi.
- ☐ In un solo modo.
- ☐ In infiniti modi.
- ☐ In nessun modo.

41. Se 0 si scrive in un unico modo come combinazione lineare di alcuni vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ allora

- ☐ qualche vettore tra $v_1, v_2, \dots, v_n$ è nullo.
- ☐ tutti i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono nulli.
- ☐ $n > 1$.
- ☐ $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.
- ☐ $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

42. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo semplice con due autovalori distinti. Allora

- ☐ un autovalore ha molteplicità geometria 3.
- ☐ un autovalore è nullo.
- ☐ un tale f non esiste.
- ☐ un autovalore ha molteplicità geometria 2.
- ☐ un autovalore ha molteplicità geometrica 0.

43. Sia f un endomorfismo semplice di V e sia A la sua matrice associata in una base di V. Allora

- ☐ A è diagonale.
- ☐ A è invertibile.
- ☐ A ha determinante non nullo.
- ☐ Gli autovalori di f sono tutti distinti.
- ☐ A è diagonalizzabile.

44. Se u e v sono due vettori di $\mathbb{R}^n$ e hanno norma 2 per un prodotto scalare β allora

- ☐ $\beta(u, v) > 2$.
- ☐ $|\beta(u, v)| \leq 4$.
- ☐ $\beta(u, v) \leq 1$.
- ☐ $|\beta(u, v)| \leq \sqrt{2}$.
- ☐ i due vettori sono ortogonali.

45. Se f è un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 0 e 1 allora

- ☐ f è semplice
- ☐ f è suriettivo
- ☐ f è iniettivo
- ☐ 0 è un autovettore
- ☐ f non è semplice

46. Se una matrice $n \times n$ ha determinante non nullo allora il suo rango è:

- ☐ Al più n.
- ☐ Non si può decidere.
- ☐ n.
- ☐ Almeno n.
- ☐ Almeno 1.

47. Siano A e B due matrici congruenti e sia $\det A = 2$. Allora

- ☐ $\det B = 2$.
- ☐ $\det B = -\sqrt{2}$.
- ☐ $\det B < 0$.
- ☐ $\det B = \sqrt{2}$.
- ☐ $\det B > 0$.

48. Sia A una matrice quadrata con $\det A = -1$. Allora $\det A^2$ vale

- ☐ -2.
- ☐ 0.
- ☐ 1.
- ☐ -1.
- ☐ 2.

49. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione suriettiva. Allora

- ☐ esistono due vettori u, v linearmente indipendenti per cui $f(u) = f(v) = 0$.
- ☐ f è bigettiva.
- ☐ $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.
- ☐ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
- ☐ f è iniettiva.

50. Se B è una matrice $n \times n$ invertibile allora il rango di B^2 è

- ☐ 0
- ☐ $2n$
- ☐ 2
- ☐ n
- ☐ minore di n

51. Sia A una matrice di rango 3. Allora

- ☐ esiste un minore $n \times n$ con $n > 3$ con determinante non nullo.
- ☐ esiste un minore 3×3 di A con determinante non nullo.
- ☐ ogni minore 3×3 di A ha determinante non nullo.
- ☐ la matrice A ha 3 righe e 3 colonne.
- ☐ la matrice A è la matrice identità.

52. Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo non suriettivo. Allora

- ☐ La dimensione di $\operatorname{Ker} f$ è 2.
- ☐ f è nullo.
- ☐ La dimensione di $\operatorname{Ker} f$ è almeno 2.
- ☐ La dimensione dell'immagine di f è 4.
- ☐ La dimensione dell'immagine di f è 5.

53. Siano A, B due matrici quadrate della stessa dimensione e supponiamo che B sia invertibile. Allora $\det B^{-1}AB$ è

- ☐ uguale a $\det A$.
- ☐ diverso da 0.
- ☐ uguale a 0.
- ☐ uguale a $\det B^2 \cdot \det A$.
- ☐ diverso da $\det A$.

54. Una circonferenza nella spazio è definita dall'intersezione di

- ☐ un piano ed una retta.
- ☐ due piani.
- ☐ una sfera ed una retta.
- ☐ un piano ed una sfera.
- ☐ due rette.

55. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo semplice e iniettivo. Allora

- ☐ il prodotto degli autovalori di f è diverso da 0.
- ☐ $f = 0$.
- ☐ il determinante di f è 1.
- ☐ gli autovalori di f sono tutti distinti.
- ☐ 0 è un autovalore di f.

56. Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ con indici $i_+ = 2$, $i_0 = 0$, $i_- = 2$ e sia A la sua matrice associata rispetto ad una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo dedurre che

- ☐ $\det A > 0$.
- ☐ $\det A < 0$.
- ☐ $\det A = 0$.
- ☐ $\det A = -1$.
- ☐ $\det A = 1$.

57. Se il sistema $AX = B$ ha ∞^r soluzioni allora il sistema $AX = 0$ ha ∞^s soluzioni con

- ☐ $s = 0$
- ☐ $s = 1$
- ☐ $s > r$
- ☐ $s = r$
- ☐ $s < r$

58. Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ due vettori ortogonali per il prodotto scalare standard. Allora $|u + v|^2$ vale

- ☐ $|u|^2 - |v|^2$.
- ☐ $|u|^2|v|^2$.
- ☐ $||u| - |v||$.
- ☐ $|u|^2 + |v|^2$.
- ☐ $|u|^2/|v|^2$.

59. Sia A una matrice quadrata invertibile allora ${}^tA \cdot A$ ha determinante

- ☐ negativo.
- ☐ positivo.
- ☐ -1.
- ☐ 1.
- ☐ nullo.