Geometria e Algebra

Ingegneria dell'Informazione
2013–2014

Rocco Chirivì
Dipartimento di Matematica e Fisica
Università del Salento
rocco.chirivi@unisalento.it
www.dmf.unisalento.it/persone/chirivi

Modalità d'esame

- Prova scritta.

(a) 5 domande a risposta multipla $\longrightarrow$ 10 punti:
 2 punti per risposta esatta,
 0 punti per risposta non data,
 -0.5 punti per risposta errata.

(b) Un esercizio $\longrightarrow$ 10 punti.

(c) Un (altro) esercizio $\longrightarrow$ 10 punti.

  – Si supera lo scritto con 18 punti.
  – Uno scritto superato vale anche per tutti gli appelli successivi, se non si consegna un nuovo scritto.

- Prova orale: <u>opzionale</u>.

  – Se non si fa l'orale $\longrightarrow$ voto esame = voto scritto,
  – Se si fa l'orale $\longrightarrow$ voto esame = media voto scritto e voto orale.
  – Se non si accetta il voto all'orale si rifà lo scritto.

Numeri

- *Naturali*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Con i naturali non si può risolvere $x + 4 = 1$.

- *Interi*: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Con gli interi non si può risolvere $2x = 5$.

- *Razionali*: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} = \{\dots, -\frac{3}{7}, -\frac{1}{5}, 0, 1, \frac{37}{19}, \dots\}$. Non si può misurare la diagonale di un quadrato di lato unitario (Pitagora!).

- *Reali*: $\mathbb{R}$, ogni numero 'con la virgola', ad esempio 0, 1, $\frac{7}{2} = 3,5$, $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$, $\sqrt{2}, \dots$ ma anche

  $$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288\dots$$

  Non si risolve $x^2 + 1 = 0$.

- *Complessi*: $\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$.

Somma tra numeri complessi: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Prodotto tra numeri complessi:

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i. \end{aligned}$$

Il numero $\overline{z} = a - bi$ si dice *coniugato* del numero complesso $z = a + bi$. Il numero reale $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ è la *norma*, o *valore assoluto* del numero z.

Inverso di un numero complesso:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Il seguente teorema fondamentale dell'algebra dice che non serve estendere ulteriormente i numeri complessi.

Teorema: Ogni polinomio con coefficienti in $\mathbb{C}$ ha una radice in $\mathbb{C}$.

Insiemi e applicazioni

Un insieme è una collezione di elementi. Se A e B sono insiemi allora $A \cup B$ è l'unione di A e B, esso è il più piccolo insieme che contiene sia A che B. Mentre $A \cap B$ è l'intersezione tra A e B, esso è il più grande insieme contenuto in A e B.

Il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B \doteq \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

di tutte le coppie ordinate con primo elemento in A e secondo elemento in B.

Un'*applicazione* dall'insieme A nell'insieme B è un sottoinsieme f del prodotto cartesiano $A \times B$ con la proprietà: per ogni elemento a di A esiste un unico b in B per cui (a, b) sia un elemento di f. In simboli:

$$\forall a \in A \exists! b \in B \,|\, (a, b) \in f.$$

Nel seguito scriveremo sempre $f(a) = b$ se e solo se $(a, b) \in f$.

Un'applicazione si dice *iniettiva* se $a \neq a'$ implica $f(a) \neq f(a')$.

Un'applicazione di dice *suriettiva* se per ogni $b \in B$ esiste a in A per cui $f(a) = b$.

Infine, un'applicazione si dice *bigettiva* se è iniettiva e suriettiva, cioè se e solo se per ogni $b \in B$ esiste unico $a \in A$ per cui $f(a) = b$.

Operazioni

Definizione. Una **operazione** $\circ$ su un unsieme X è un'applicazione

$$\begin{array}{rcl} X \times X & \longrightarrow & X \\ (a,b) & \longmapsto & a \circ b. \end{array}$$

1. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a,b) \longmapsto a+b \in \mathbb{Z}$ è un'operazione.

2. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \ni (a,b) \longmapsto \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ è un'operazione.

3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a,b) \longmapsto a-b \in \mathbb{Z}$ *non* è un'operazione.

L'operazione $\circ$ su X si dice:

- **commutativa** se per ogni $a, b \in X$ si ha

$$a \circ b = b \circ a.$$

- **associativa** se per ogni $a, b, c \in X$ si ha

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Esercizio: quali operazioni sopra sono commutative? quali associative?

Gruppi

Un insieme non vuoto G con un'operazione $\circ$ si dice **gruppo** se:

- l'operazione $\circ$ è associativa,

- esiste un elemento e in G per cui per ogni $g \in G$ si ha
$$g \circ e = e \circ g = g,$$
e si chiama **elemento neutro**,

- per ogni $g \in G$ esiste $g' \in G$ per cui:
$$g \circ g' = g' \circ g = e,$$
g' si chiama **inverso** di g e si indica con g^{-1}.

Se inoltre $\circ$ è commutativa allora G si dice **abeliano**.

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ sono gruppi abeliani,

2. $\mathbb{Q}^* \doteq \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^* \doteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $\mathbb{C}^* \doteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sono gruppi con la moltiplicazione.

Un sottoinsieme H di un gruppo $(G, \circ)$ si dice **sottogruppo** se è $(H, \circ)$ è un gruppo.

1. L'insieme $P \subset \mathbb{Z}$ dei numeri pari è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$,

2. l'insieme $D \subset \mathbb{Z}$ dei numeri dispari *non* è un sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$.

Anelli

Un insieme A con due operazioni $+$ e $\cdot$ si dice **anello** se

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano,
- $\cdot$ è associativa,
- $\cdot$ è distributiva per $+$, cioè per ogni $a, b, c \in A$:

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot c &= a\cdot c + b\cdot c, \\ a\cdot(b+c) &= a\cdot b + a\cdot c. \end{aligned}$$

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello,
2. L'insieme $\mathbb{R}[t]$ dei polinomi a coefficienti reali è un anello.

Campi

Un anello $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ per cui $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ è un gruppo abeliano con $\cdot$ si dice **campo**.

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sono campi con le usuali operazioni $+$, $\cdot$
2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *non* è un campo,
3. L'insieme $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ con le operazioni:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

è un campo!

Spazi vettoriali

Sia $\mathbb{K}$ un campo, un gruppo abeliano $(V,+)$ con un'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}\times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda,v) & \longmapsto & \lambda\cdot v, \end{array}$$

si dice *spazio vettoriale* su $\mathbb{K}$ se per ogni $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ e $u,v\in V$ si ha:

- $\lambda\cdot(\mu\cdot v)=(\lambda\mu)\cdot v$,
- $(\lambda+\mu)\cdot v=\lambda\cdot v+\mu\cdot v$,
- $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$,
- $1\cdot v=v$.

Gli elementi di V sono detti **vettori**, quelli di $\mathbb{K}$ **scalari**. L'elemento neutro 0 per la somma $+$ di V è detto **vettore nullo**.

Esercizio: provare che $0\cdot v=0$ per ogni vettore v.

Esempi di spazi vettoriali

1. Sia $\mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le n–uple ordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ di elementi di $\mathbb{R}$. Definiamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

e

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Allora $\mathbb{R}^n$ con $+$, $\cdot$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

2. L'insieme dei polinomi $\mathbb{R}[t]$ con coefficienti in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale con le operazioni di somma di polinomi e moltiplicazione tra reali e polinomi.

3. Si indica con $\mathbb{R}^{n,m}$ l'insieme delle **matrici** con n righe e m colonne, cioè delle tabelle

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

di numeri reali. $\mathbb{R}^{n,m}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ se definiamo: $+$ tra due matrici sommando i coefficienti corrispondenti, $\cdot$ tra scalari e matrici moltiplicando ogni coefficiente di una matrice per lo scalare.

Sottospazi vettoriali

Un sottoinsieme *non vuoto* W di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ si dice **sottospazio vettoriale** se: per ogni $u, v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $u + v \in W$ e $\lambda u \in W$.

1. Se W è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ delle n–uple con prima coordinata nulla, allora W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2. L'insieme $\mathbb{R}_n[t]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ e grado minore o uguale ad n è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$.

3. Se U è un sottospazio vettoriale allora $0 \in U$. Perchè? è vero il viceversa?

4. I sottospazi vettoriali del piano $\mathbb{R}^2$ sono: $\{0\}$, le rette passanti per 0 e tutto il piano.

5. I sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ sono: $\{0\}$, le rette passanti per 0, i piani passanti per 0 e tutto lo spazio.

6. Se U, W sono sottospazi vettoriali di V allora anche $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.

7. Se U, W sono sottospazi vettoriali di V, poniamo

$$U + W \doteq \{u + w \,|\, u \in U,\, w \in W\}.$$

   Allora $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V detto **somma** di U e W.

Proposizione. $U \cap W$ è il più grande sottospazio vettoriale contenuto in U e W, $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente U e W.

Dimostrazione. $U \cap W$ è contenuto in U e W ed è un sottospazio vettoriale. Viceversa se Z è un sottospazio vettoriale contenuto in U e in W allora Z è contenuto in $U \cap W$.

$U + W$ è un sottospazio vettoriale e contiene $U = \{u + 0 \,|\, u \in U\}$ e $W = \{0 + w \,|\, w \in W\}$. Viceversa se Z è un sottospazio vettoriale che contiene U e W allora Z deve contenere anche $u + w$ per ogni $u \in U$ e $w \in W$, quindi Z contiene $U + W$. $\square$

Se $U \cap W = 0$ allora $U + W$ si scrive $U \oplus W$ e si dice somma **diretta**.

Proposizione. La somma di U e W è diretta se e solo se ogni $z \in U + W$ si scrive in modo unico come $z = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$.

Dimostrazione. Supponiamo che la somma sia diretta e siano $z = u + w$ e $z = u' + w'$ due scritture di z con $u, u' \in U$ e $w, w' \in W$. Vogliamo far vedere che $u = u'$ e $w = w'$. Infatti da $u + w = z = u' + w'$ abbiamo $u - u' = w - w'$, ma il primo membro è in U e il secondo membro è in W. Quindi $u - u' = 0$ e $w - w' = 0$ visto che $U \cap W = 0$, cioè $u = u'$ e $w = w'$.

Viceversa supponiamo che la scrittura sia unica e proviamo che $U \cap W = 0$. Sia $z \in U \cap W$, allora abbiamo le due scritture $z = z + 0$ e $z = 0 + z$. Essendo la scrittura unica abbiamo $z = 0$. $\square$

Combinazioni lineari

Siano $v_1, v_2, \ldots, v_r$ vettori in V, si chiama **combinazione lineare** ogni vettore

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sono scalari.

La combinazione lineare 0 con $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$ si dice **banale**.

I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ si dicono **linearmente indipendenti** se l'unica combinazione lineare che fa 0 è quella banale. Altrimenti si dicono **linearmente dipendenti**.

1. I vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono dipendenti o indipendenti?

2. I vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   sono dipendenti o indipendenti?

3. I polinomi $1+t$, $1-t$, 1 e t^2 in $\mathbb{R}_3[t]$ sono dipendenti o indipendenti?

4. Le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   di $\mathbb{R}^{2,2}$ sono dipendenti o indipendenti?

5. Quando due vettori u e v sono linearmenti dipendenti?

6. Quando un vettore u è linearmente indipendente?

Se $X = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ è un insieme di vettori, si dice spazio vettoriale **generato** da X l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di X; si indica con $\mathcal{L}(X)$.

Proposizione. $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene X.

Dimostrazione.

- $\mathcal{L}(X)$ è un sottospazio vettoriale:

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r) =$$

$$= (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_r + \mu_r) v_r$$

cioè la somma di due combinazioni lineari è ancora una combinazione lineare; inoltre

$$\mu(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) = (\mu\lambda_1) v_1 + \cdots + (\mu\lambda_r) v_r$$

e quindi $\mathcal{L}(X)$ è chiuso anche per moltiplicazione per scalare.

• I vettori $v_1, \ldots, v_r$ sono combinazioni lineari di X, cioè elementi di $\mathcal{L}(X)$.

• Viceversa se U è un sottospazio vettoriale di V che contiene X allora U contiene ogni combinazione lineare di elementi di X, cioè U contiene $\mathcal{L}(X)$.$\square$

1. $\mathbb{K}^n$ è generato dai vettori

$$e_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad e_n \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Il piano $\mathbb{R}^2$ è generato da qualsiasi coppia di vettori non nulli e non allineati.

3. $\mathbb{R}^{n,m}$ è generato dall'insieme

$$X = \{E_{h,k} \,|\, h = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m\}$$

delle matrici **elementari**, dove $E_{h,k}$ è la matrice tutta 0 tranne il coefficiente di riga h e colonna k che è 1.

4. $\mathbb{R}[t]$ è generato dall'insieme *infinito*

$$X = \{1, t, t^2, t^3, \ldots\}.$$

Definizione. Uno spazio vettoriale V si dice **finitamente generato** se esiste un insieme finito X che lo genera. (Cioè $V = \mathcal{L}(X)$.)

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{n,m}$ sono finitamente generati.

2. $\mathbb{R}_n[t]$ è finitamente generato.

3. $\mathbb{R}[t]$ *non* è finitamente generato.

Basi

Definizione. Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V si dice **base** di V se $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori (linearmente) indipendenti.

1. L'insieme $\{e_1,\, e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ è una base per $\mathbb{R}^2$?

2. L'insieme $\{e_1,\, e_1 + e_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ è una base per $\mathbb{R}^2$?

3. L'insieme $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ di $\mathbb{R}^3$ è una base per $\mathbb{R}^3$?

4. L'insieme $\{e_1, e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ è una base per $\mathbb{R}^3$?

5. Provare che le matrici elementari $E_{1,1}$, $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ e $E_{2,2}$ sono una base di $\mathbb{R}^{2,2}$.

6. Provare che i polinomi 1, $1 + t$ e $1 + t + t^2$ sono una base di $\mathbb{R}_2[t]$.

Proposizione. Se $\mathcal{B}$ è una base per V allora ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$ e sia $u \in V$. Sicuramente u si esprime come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_r$ in quanto $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori per V: $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Supponiamo che sia anche $u = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r$.

Allora $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r)v_r = 0$, ma $v_1, \dots, v_r$ sono indipendenti e quindi $\lambda_i = \mu_i$ per $i = 1, 2, \dots, r$. $\square$

Coordinate rispetto ad una base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{rccc} c_{\mathcal{B}}: & V & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ & v & \longmapsto & {}^t(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \end{array}$$

è una bigezione.

Esistenza basi

Lemma. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ con

- $v_1 \neq 0$,
- v_2 non è combinazione lineare di v_1,
- v_3 non è combinazione lineare di v_1 e v_2,
- così via fino a v_n non è combinazione lineare di $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$

allora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono indipendenti.

Dimostrazione. Se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ allora $\lambda_n = 0$ perchè altrimenti v_n è combinazione dei precedenti. Ma allora anche $\lambda_{n-1} = 0$ perchè altrimenti v_{n-1} è combinazione dei precedenti... si ripete questo ragionamento fino a $\lambda_1 = 0$. Cioè tutti i coefficienti sono nulli e quindi la tesi. $\square$

Teorema. Se $X = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ genera V allora esiste $\mathcal{B} \subset X$ base di V.

Dimostrazione. Definiamo:

- $w_1 = v_{i_1}$ il primo vettore non nullo in X,
- $w_2 = v_{i_2}$ il primo vettore dopo v_{i_1} indipendente da v_{i_1},
- $w_3 = v_{i_3}$ il primo vettore dopo v_{i_2} indipendente da v_{i_1}, v_{i_2},
- così via finchè è possibile, fino ad un w_n.

Proviamo che $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ è una base per V.

- $\mathcal{B}$ genera: sia $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$. Se $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$ allora v_i è combinazione lineare dei precedenti, sostituendo a v_i questa combinazione lineare otteniamo un'espressione di v in cui v_i non compare. Procedendo in questo modo troviamo una combinazione lineare dei soli $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}$ di v, cioè scriviamo V in termini di $w_1, \ldots, w_n$.

- $\mathcal{B}$ è un insieme linearmente indipendente: segue dal Lemma precedente.$\square$

Corollario. Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha una base.

Esercizio. Controllare che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^3$ ed estrarre da esso una base.

Teorema. Se $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ è un insieme di vettori indipendenti in V spazio vettoriale finitamente generato, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V con $X \subset \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Sia $Y = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ un insieme finito di generatori per V. Se ripetiamo la dimostrazione del Teorema precedente partendo da $X \cup Y = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ otteniamo una base $\mathcal{B}$ di V che contiene X in quanto $v_1 \neq 0$, v_2 non è dipendente da v_1, v_3 non è dipendente da v_1, v_2, e così via... $\square$

Esercizio. Controllare che i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti e completarli ad una base.

Teorema. Sia

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subset \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Allora se $m > n$ i vettori $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sono dipendenti.

Dimostrazione. Se uno dei vettori $w_1, w_2, \ldots, w_m$ è nullo la tesi è vera, quindi assumiamo che siano tutti non nulli.

Procediamo per induzione su n. Se $n = 1$ allora $m \geq 2$ e i vettori $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sono tutti in $\mathcal{L}(v_1)$, cioè sono tutti multipli di v_1. In particolare $w_1 = av_1$, $w_2 = bv_2$ e quindi $w_2 = \frac{b}{a}w_1$ (in quanto $a \neq 0$) e quindi w_1 e w_2 sono dipendenti.

Supponiamo $n > 1$ e la tesi vera per $n - 1$. Possiamo scrivere

$$w_j = \lambda_{1,j}v_1 + \lambda_{2,j}v_2 + \cdots + \lambda_{n,j}v_n$$

per alcuni scalari $\lambda_{h,j}, h = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. Inoltre $w_1 \neq 0$ e quindi, a meno di riordinare i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ possiamo supporre $\lambda_{n,1} \neq 0$.

Osserviamo ora che

$$w_2 - \frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}} w_1, \ldots, w_m - \frac{\lambda_{n,m}}{\lambda_{n,1}} w_1 \subset \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

e $m - 1 > n - 1$ da cui, per induzione, questi vettori sono dipendenti. Quindi esistono scalari $a_2, a_3, \ldots, a_m$ non tutti nulli per cui

$$a_2(w_2 - \frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}} w_1) + \cdots + a_m(w_m - \frac{\lambda_{n,m}}{\lambda_{n,1}} w_1) = 0$$

da cui

$$(-a_2 \frac{\lambda_{n,2}}{\lambda_{n,1}} - \cdots - a_m \frac{\lambda_{n,m}}{\lambda_{n,1}}) w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_m w_m = 0$$

e quindi i vettori $w_1, w_2, \ldots, w_m$ sono dipendenti. $\square$

Corollario. Sia V spazio vettoriale finitamente generato. Allora tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V con n e n' elementi rispettivamente. Abbiamo

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}' & \subset & V = \mathcal{L}(\mathcal{B}), \\ \mathcal{B} & \subset & V = \mathcal{L}(\mathcal{B}') \end{array}$$

allora, dal teorema precedente, $n' \leq n$ e $n \leq n'$, cioè $n' = n$. $\square$

Si chiama **dimensione**, $\dim V$, di uno spazio vettoriale V finitamente generato il numero di elementi di una sua (qualsiasi) base. Se V non è finitamente generato si pone $\dim V = \infty$.

Esercizi.

1. Che dimensione ha $\mathbb{R}^n$?

2. Provare che $\mathbb{R}_n[t]$ ha dimensione $n+1$.

3. Provare che $\dim \mathbb{R}^{n,m} = nm$.

4. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Sia V l'insieme delle matrici $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ per cui $A + {}^tA = 0$. Provare che V è un sottospazio vettoriale (matrici antisimmetriche) e calcolarne la dimensione.

Proposizione. Se V ha dimensione n allora:

- il massimo numero di vettori indipendenti in V è n,
- il minimo numero di generatori di V è n.

Dimostrazione. Se X è un insieme con m vettori indipendenti allora X può essere completato ad una base, quindi $m \leq n$.

Se invece Y è un insieme di m generatori allora da Y si può estrarre una base, quindi $m \geq n$. $\square$

1. Perchè i polinomi 1, $1 - t^2$, $2 - 5t - 17t^3$, t e $1 + t^3$ di $\mathbb{R}_3[t]$ sono linearmente dipendenti?

2. Verificare se i seguenti vettori generano $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposizione. Se V è finitamente generato e W è un suo sottospazio, allora $\dim W \leq \dim V$ e, inoltre, vale $\dim W = \dim V$ se e solo se $W = V$.

Dimostrazione. Sia $X = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti in W. In particolare essi sono vettori di V, quindi, per la proposizione precedente, sono al più $\dim V$ in numero, cioè $X = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ per qualche $m \leq \dim V$. Visto che X è massimale ogni altro vettore di W è combinazione lineare di vettori in X, questo prova che X è una base di W e quindi $\dim W = |X| = m \leq \dim V$.

Inoltre X può essere completato ad una base di V aggiungendo $\dim V - \dim W$ vettori opportuni. Allora se $\dim W = \dim V$ si ha che X è anche una base per V, cioè $W = V$. $\square$

Esercizio. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e W il sottospazio generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $\dim U$, $\dim W$, $\dim U \cap W$ e $\dim(U + W)$.

Soluzione. Estraiamo una base dai generatori u_1, u_2, u_3 di U. Il primo vettore è non nullo, il secondo non è multiplo del primo mentre per il terzo si ha $u_3 = 2u_1 - u_2$, quindi u_1, u_2 è una base per U e si ha $\dim U = 2$.

Allo stesso modo, per una base di W, w_1 è non nullo e w_2 non è multiplo di w_1. Inoltre w_3 non è combinazione lineare di w_1 e w_2, in quanto da $aw_1 + bw_2 = w_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} a+b \\ 2a+2b \\ b \\ 2a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che è impossibile. Quindi w_1, w_2, w_3 è una base di W e si ha $\dim W = 3$.

Un sistema di generatori di $U + W$ è dato da $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$. (Perchè?) Possiamo quindi estrarre una base per $U + W$.

Come sopra u_1 e u_2 li prendiamo, u_3 lo scartiamo. Vediamo w_1, è combinazione lineare di u_1 e u_2? No perchè un vettore del tipo $au_1 + bu_2$ ha la prima coordinata uguale alla terza, mentre w_1 non ha questa proprietà. Quindi w_1 lo prendiamo.

Vediamo w_2. Si ha $w_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2$ e quindi w_2 è combinazione lineare dei precedenti e lo scartiamo. Allo stesso modo $w_3 = 2u_1 + u_2$ e quindi anche w_3 viene scartato. Conclusione: u_1, u_2, w_1 è una base di $U + W$ e $\dim(U + W) = 3$.

Ora $U \cap W$. Visto che $U \cap W \subset U$ si ha $\dim U \cap W \leq 2$. Ma abbiamo già visto che i vettori w_2 e w_3 sono combinazioni lineari di u_1 e u_2 ed essi sono linearmente indipendenti (infatti li abbiamo presi entrambi in una base per W), in particolare $\dim U \cap W \geq 2$. Concludiamo $\dim U \cap W = 2$.

Osserviamo che vale

$$\dim U + \dim W = 5 = \dim(U + W) + \dim U \cap W.$$

Teorema. (Formula di Grassmann) Se V è finitamente generato e U, W sono suoi sottospazi allora

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim U \cap W.$$

Dimostrazione. Sia $v_1, v_2, \ldots, v_h$ una base per $U \cap W$. La possiamo completare ad una base $v_1, v_2, \ldots, v_h, u_1, u_2, \ldots, u_p$ di U e ad una base $v_1, v_2, \ldots, v_h, w_1, w_2, \ldots, w_q$ di W. L'insieme

$$v_1, \ldots, v_h, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q$$

è un sistema di generatori per $U + W$. Se proviamo che esso è anche una base per $U + W$ avremo

$$\begin{array}{rcl} \dim(U + W) & = & h + p + q \\ & = & \dim U \cap W + \\ & & (\dim U - \dim U \cap W) + \\ & & (\dim W - \dim U \cap W) \\ & = & \dim U + \dim W - \dim U \cap W, \end{array}$$

cioè la tesi.

Sia allora

$$a_1v_1+\cdots+a_hv_h+b_1u_1+\cdots+b_pu_p+c_1w_1+\cdots+c_qw_q = 0.$$

Vogliamo provare che i coefficienti sono tutti nulli. Se poniamo $w \doteq -c_1w_1 - \cdots - c_qw_q \in W$, visto che

$$w = a_1v_1 + \cdots + a_hv_h + b_1u_1 + \cdots + b_pu_p,$$

abbiamo $w \in U \cap W$ e quindi

$$w = d_1v_1 + \cdots + d_hv_h$$

per opportuni scalari $d_1, d_2, \ldots, d_h$. Cioè

$$d_1v_1 + \cdots + d_hv_h + c_1w_1 + \cdots + c_qw_q = 0$$

per definizione di w. Ma allora $d_1 = d_2 = \cdots = d_h = c_1 = c_2 = \cdots = c_q = 0$ visto che $v_1, v_2, \ldots, w_q$ è una base per W. Quindi ora la combinazione lineare iniziale diventa

$$a_1 v_1 + \cdots + a_h v_h + b_1 u_1 + \cdots + b_p u_p = 0.$$

Ma $v_1, v_2, \ldots, u_p$ è una base per U e quindi $a_1 = a_2 = \cdots = a_h = b_1 = b_2 = \cdots = b_p = 0$. $\Box$

Esercizio. Dati i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2a \\ a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \}$$

$$V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y = z - t = 0 \},$$

verificare la formula di Grassmann. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

è un elemento di $U + V$?

Esercizio. Dati in $\mathbb{R}_2[t]$ i sottospazi $U = \{p \in \mathbb{R}_2[t] \,|\, p(1) = p(4) = 0\}$ e $V = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$ con $p_1(t) = t^2$, $p_2(t) = t + 1$ e $p_3(t) = 2t^2 - 3t - 3$, verificare la formula di Grassmann.

Esercizio. Dati in $\mathbb{R}_2[t]$ i sottospazi $U = \mathcal{L}(p_1, p_2)$ e $V = \mathcal{L}(q_1, q_2)$ con $p_1(t) = t^2 + 2t$, $p_2(t) = t + 1$, $q_1(t) = t+2$ e $q_2(t) = -t^2+1$, calcolare la dimensione di $U \cap V$ e $U + V$.

Esercizio. Dato in $\mathbb{R}_3[t]$ il sottospazio $U = \mathcal{L}(t^2 - 5t + 6)$ trovare un sottospazio V supplementare di U in $\mathbb{R}_3[t]$. Scrivere $t^3 + t^2 + t + 1$ come somma di un vettore in U e di un vettore in V.

Matrici

Una **matrice** a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ è una tabella

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

di elementi di $\mathbb{K}$, n è il numero di righe e m il numero di colonne. L'insieme delle matrici con n righe e m colonne si indica con $\mathbb{K}^{n,m}$. Si scrive anche $A = (a_{i,j})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$.

La matrice è **quadrata** se $m = n$. Una **sottomatrice** si ottiene da una matrice considerando solo alcune righe e alcune colonne, ad esempio se

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

allora B è una sottomatrice di A. In particolare si chiama **minore** una sottomatrice quadrata.

La **trasposta** di $A = (a_{ij})$ è la matrice ${}^tA = (a_{ji})$ che si ottiene scambiando righe e colonne di A. Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pi \\ -2 & \frac{3}{4} & 7 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & \frac{3}{4} \\ \pi & 7 \end{pmatrix}.$$

In particolare se $A \in \mathbb{K}^{n,m}$ allora ${}^tA \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Una matrice $A = (a_{ij})$ si dice

- **simmetrica** se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i e j,
- **antisimmetrica** se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni i e j,
- **triangolare superiore** se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$,
- **triangolare inferiore** se $a_{ij} = 0$ per ogni $i < j$,
- **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$,

- **identità** se quadrata diagonale con tutti 1 sulla diagonale.

- **di permutazione** se in ogni riga ed ogni colonna c'è un solo 1 e tutti 0,

- **nulla** se $a_{ij} = 0$ per ogni i e j.

Due matrici $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,m}$ si possono sommare e si definisce

$$C = A + B, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} \doteq a_{ij} + b_{ij}.$$

Inoltre se $\lambda \in \mathbb{K}$ allora

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}).$$

Così $\mathbb{K}^{n,m}$ è uno spazio vettoriale di dimensione nm su $\mathbb{K}$.

Esercizi.

1. Provare che ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ e ${}^t(\lambda A) = \lambda^t A$.

2. Se A è quadrata provare che

$$A_0 \doteq \frac{1}{2}(A + {}^tA)$$

è simmetrica e

$$A_1 \doteq \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

è antisimmetrica. Inoltre

$$A = A_0 + A_1$$

e quindi ogni matrice è somma di una simmetrica e di una antisimmetrica.

Prodotto di matrici

Date le matrici

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,m} \quad \text{e} \quad B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,h}$$

definiamo

$$C = A \cdot B, \quad C = (c_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n,h}$$

con

$$c_{ij} \doteq \sum_{r=1}^{m} a_{i,r} b_{r,j}.$$

Esempio. Date

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

determinare $A \cdot B$. Ha senso $B \cdot A$?

Proposizione. Valgono le seguenti proprietà

- Per ogni $A \in \mathbb{K}^{n,m}, B \in \mathbb{K}^{m,h}$ e $C \in \mathbb{K}^{h,k}$
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

- Per ogni $A, B \in \mathbb{K}^{n,m}$ e $C \in \mathbb{K}^{m,h}$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

- Per ogni $A \in \mathbb{K}^{n,m}$ e $B, C \in \mathbb{K}^{m,h}$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Se $A \in K^{n,m}$ e $B \in \mathbb{K}^{m,n}$ allora AB e BA hanno entrambe senso ma $AB \in \mathbb{K}^{n,n}$ mentre $BA \in \mathbb{K}^{m,m}$ quindi sono matrici di dimensioni diverse se $m \neq n$. Ma anche se $n = m$ in generale $AB \neq BA$.

Due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ per cui $AB = BA$ si dicono **permutabili** o che **commutano**.

Esercizi.

1. Decidere se le due matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commutano o meno.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare ${}^tA$, $A\,{}^tA$ e ${}^tAA$.

3. Provare che ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

4. Provare che se A e B commutano allora $(AB)^k = A^kB^k$ per ogni $k \geq 1$.

5. Provare che se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $I \in \mathbb{K}^{n,n}$ è la matrice identità allora $AI = A = IA$.

6. Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice **invertibile** se esiste $A' \in \mathbb{K}^{n,n}$ per cui $AA' = I = A'A$; in tal caso A' si dice **inversa** di A e si indica con A^{-1}. Provare che se A e B sono invertibili allora anche AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

7. Stabilire se

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

sono invertibili e, se sì, trovarne l'inversa.

Determinante

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$. Fissato un coefficiente a_{hk}, sia $A_{hk} \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}$ il minore di A ottenuto cancellando la riga h–esima e la colonna k–esima. Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

allora, ad esempio,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vediamo ora una definizione *ricorsiva* di **determinante**

$$\mathbb{K}^{n,n} \ni A \longmapsto \det A \in \mathbb{K}.$$

Definizione. Per $A = (a) \in \mathbb{K}^{1,1}$ definiamo $\det A = a$. Sia ora $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ con $n > 1$ e sia $1 \leq i \leq n$, allora

$$\det A \doteq \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

(Sviluppo per riga di Laplace)

Per una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2,2}$$

abbiamo, ad esempio per $i = 1$, $\det A = a \det A_{11} - b \det A_{12} = ad - bc$.

Teorema. Il determinante **non** dipende dalla riga usata per definirlo. Inoltre il determinante si può definire anche con lo sviluppo secondo la colonna j–esima

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}.$$

Per una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3,3}$$

si ha il seguente sviluppo per la prima riga ($i = 1$),

$$\det A = a \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

Questa è la formula di Sarrus, valida *solo* per $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} =$$

$$+(\text{diagonali discendenti}) - (\text{diagonali ascendenti}) =$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Esercizi.

1. Esempio di calcolo del determinante con Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right. =$$

$$= -3 + 2 + 1 = 0.$$

2. Provare che

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & l \end{pmatrix} = aehl.$$

3. E' vero che se una matrice A ha una riga tutta nulla allora $\det A = 0$? E per una colonna?

Proposizione.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1,j}+a''_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2,j}+a''_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_{n,j}+a''_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} +$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a''_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Se una matrice ha una colonna che è somma di due colonne allora il suo determinante è la somma dei determinanti delle matrici con le singole colonne. Lo stesso risultato si ha se una matrice ha una riga che è somma di due righe.

Dimostrazione. Siano A la matrice data e A' e A'' le matrici con le singole colonne. Sviluppando per la colonna j–esima si ha per il determinante

$$\begin{aligned}\det A &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}(a'_{i,j}+a''_{i,j})\det A_{i,j}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a'_{i,j}\det A_{i,j}\\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a''_{i,j}\det A_{i,j}\\ &= \det A' + \det A''. \quad \square\end{aligned}$$

Proposizione.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1,j} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{21} & \cdots & \lambda a_{2,j} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,j} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix} =$$

$$\lambda\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

Se si moltiplica una colonna o una riga per uno scalare il determinante viene moltiplicato per quello scalare.

Dimostrazione. Sia A la prima matrice e A' la seconda. Dallo sviluppo secondo la colonna j–esima si ha

$$\begin{aligned}\det A &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\lambda a_{i,j}\det A_{i,j}\\ &= \lambda\textstyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\det A_{i,j}\\ &= \lambda\det A'. \quad \square\end{aligned}$$

Corollario. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Teorema. Se si scambiano due righe o due colonne di una matrice il determinante cambia segno.

Corollario. Se una matrice ha due righe uguali o due colonne uguali allora il suo determinante è nullo. *Dimostrazione.* Infatti scambiando le righe il determinante dovrebbe sia cambiare segno che rimanere lo stesso. Lo stesso ragionamento per le colonne.$\square$

Corollario. Se ad una colonna di una matrice si somma una combinazione lineare di altre colonne allora il determinante non cambia. Lo stesso per le righe.

Dimostrazione. Sia $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ la matrice data, dove A_i è la colonna i–esima, e sia A' la matrice

$$(A_1, \ldots, A_j + \lambda_1 A_{j_1} + \lambda_2 A_{j_2} + \cdots + \lambda_r A_{j_r}, \ldots, A_n)$$

ottenuta sommando alla colonna j–esima una combinazione lineare delle colonne A_{j_1}, A_{j_2},…,A_{j_r} con $j_1, j_2, \ldots, j_r \neq j$.

Il determinante rispetta la somma tra colonne e quindi

$$\det A' = \det A + \lambda_1 \det A^{(1)} + \cdots + \lambda_r A^{(r)}$$

dove $A^{(h)}$ è la matrice A con la colonna j–esima sostituita dalla colonna A_{j_h}. Ma $A^{(h)}$ ha due colonne uguali e quindi $\det A^{(h)} = 0$ per $h = 1, \ldots, r$, da cui la tesi. $\square$

Corollario. Se le colonne di una matrice sono linearmente dipendenti (come vettori di $\mathbb{K}^n$) allora il determinante è nullo.

Dimostrazione. Se le colonne di A sono linearmente dipendenti allora una di esse, diciamo A_j, è combinazione lineare delle altre:

$$A_j = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{j-1} A_{j-1} + \lambda_{j+1} A_{j+1} + \cdots + \lambda_n A_n$$

per alcuni scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n$.

Dal corollario precedente $\det A = \det A'$ con A' la matrice A a cui alla colonna j–esima è stata sostituita la colonna nulla. Ma $\det A' = 0$ e quindi la tesi. $\square$

Teorema. [Binet] Se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Si prova facilmente per induzione su n che se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ allora:

Osservazione. $\det A = \det {}^t A$.

Proposizione. Se le colonne di una matrice sono linearmente indipendenti allora il determinante è non nullo.

Dimostrazione. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ i vettori colonna della matrice A. Visto che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base possiamo scrivere i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in termini dei essi:

$$e_h = \sum_{k=1}^{n} u_{h,k} v_k.$$

Consideriamo ora la matrice $B = (u_{h,k}) \in \mathbb{K}^{n,n}$. Abbiamo $BA = I$ e quindi $\det(B)\det(A) = 1$ da cui $\det A \neq 0$. $\square$

Esercizio. Determinare per quali valori del parametro λ sono dipendenti i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proposizione. Se A è una matrice invertibile allora $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Dimostrazione. Se A è invertibile allora esiste A^{-1} e $A \cdot A^{-1} = I$. Allora

$$\det A \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$$

da cui $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = 1/\det A$. $\square$

Chiamiamo **aggiunta** di una matrice $A = (a_{i,j})$ la matrice $\operatorname{Adj} A$ il cui coefficiente h, k è dato da $(-1)^{h+k} \det A_{k,h}$. (Si noti l'indice k, h e non h, k.) Si può dimostrare che

Teorema. Se $\det A \neq 0$ allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A).$$

Esercizi.

1. Calcolare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Data la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificare che $A^2 - A - 2I = 0$. Dedurne che A è invertibile e calcolare A^{-1}.

3. Se A è invertibile esiste un intero h per cui $A^h = 0$?

4. Provare che l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili è un gruppo.

Chiamiamo **rango** di una matrice A il massimo intero r per cui esiste un minore di A di ordine r (cioè con r righe e r colonne) con determinante non nullo. Indichiamo il rango di A con $\mathrm{rg}\, A$.

Se $\mathrm{rg}\, A = r$ allora:

- ogni minore di ordine maggiore di r ha determinante nullo,
- esiste un minore di ordine r con determinante non nullo,
- se $r = 0$ allora la matrice è nulla,
- se la matrice è quadrata di ordine n, allora $\mathrm{rg}\, A = n$ se e solo se A è invertibile.

Esercizi.

1. Calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare, in funzione del parametro λ, il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Data una matrice A diciamo **mossa elementare** per A una delle seguenti:

- scambio di due righe di A,
- moltiplicazione di una riga di A per uno scalare non nullo,
- somma ad una riga di A un'altra riga di A.

Due matrici A e B si dicono **equivalenti per righe** se esiste una successione di mosse elementari che porta A in B.

Esempio. Le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono equivalenti per righe.

Proposizione. Due matrici equivalenti per righe hanno lo stesso rango.

Dimostrazione. Basta dimostrare che una mossa elementare non cambia il rango.

Scambio di righe. Ogni minore di una matrice A è, a meno dello scambio di righe, un minore della matrice A' a cui abbiamo scambiato due righe. Ma l'operazione di scambio di righe cambia *solo* il segno dei determinanti. Questo prova che il rango non cambia per scambio di righe.

Moltiplicazione di una riga per scalare non nullo. I determinanti dei minori vengono moltiplicati per lo stesso scalare non nullo se contengono la riga moltiplicata oppure restano invariati. In ogni caso il rango non cambia.

Somma di una riga ad un'altra. Supponiamo di sommare alla prima riga la seconda riga, per le altre righe la dimostrazione è la stessa. Sia quindi $A = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ e $A' = (R_1 + R_2, R_2, R_3, \ldots, R_n)$ la matrice originaria e la matrice con la riga sommata. Supponiamo che $\operatorname{rg} A = r$ e proviamo che $\operatorname{rg} A' = r$.

Sia M un minore di ordine $h > r$ di A'. Se M non contiene la prima riga di A' allora è anche un minore di A, quindi $\det M = 0$. Se invece M contiene la prima riga di A' allora la prima riga di M è $\bar{R}_1 + \bar{R}_2$ con $\bar{R}_1$ ottenuta dalla prima riga di A e $\bar{R}_2$ ottenuta dalla seconda riga di A.

Allora $\det M = \det M_1 + \det M_2$ dove M_1 ha solo $\bar{R}_1$ nella prima riga e M_2 ha solo $\bar{R}_2$. Ma allora M_1 e M_2 sono entrambi minori di A e quindi $\det M_1 = 0$ e $\det M_2 = 0$ da cui $\det M = 0$. Questo prova che $\operatorname{rg} A' \leq r = \operatorname{rg} A$.

Osserviamo ora che A si ottiene da A' sottraendo alla prima riga la seconda riga. Possiamo quindi ripetere quanto visto ed avere $\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg} A'$. Quindi $\operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$. $\square$

Sia A una matrice. Chiamiamo **pivot** di una riga il primo coefficiente non nullo sulla riga. Diciamo che una matrice è a **scalini per righe** se i pivot sono su colonne successive.

Esempio. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è a scalini. Mentre la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è a scalini.

Proposizione. Ogni matrice è equivalente per righe ad una matrice a scalini.

Dimostrazione / Esempio. [Algoritmo di Gauss] Portiamo a scalini la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Scambio la prima e la seconda riga

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. sottraggo dalla terza riga il doppio della prima

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

3. sottraggo dalla terza riga la seconda moltiplicata per $3/2$ e otteniamo la matrice a scalini

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{2}} & \frac{13}{2} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Osservazione. Il rango di una matrice a scalini è dato dal numero di righe non nulle.

Per la matrice dell'esempio precedente abbiamo $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$ (rango invariante per equivalenza) e $\operatorname{rg} A' = 3$ perchè A' è a scalini e ha tre righe non nulle. Quindi $\operatorname{rg} A = 3$.

Esercizio. Portare a scalini e calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ sia $\mathcal{L}_r(A)$ il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A e sia $\mathcal{L}_c(A)$ il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

Proposizione. Se A e B sono equivalenti per righe allora $\mathcal{L}_r(A) = \mathcal{L}_r(B)$.

Dimostrazione. Basta provare che $\mathcal{L}_r$ è invariante per mosse elementari. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ i vettori riga di A.

Se B si ottiene da A scambiando due righe allora i vettori riga di B sono $v_1, \ldots, v_n$ a meno di uno scambio e quindi $\mathcal{L}_r(B) = \mathcal{L}_r(A)$.

Se B si ottiene moltiplicando la riga i–esima per lo scalare non nullo λ allora i vettori riga di B sono

$$v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$$

e quindi $\mathcal{L}_r(B) = \mathcal{L}_r(A)$.

Se B si ottiene sommando alla riga i–esima la riga j–esima di A allora i suoi vettori riga sono

$$v_1, v_2, \ldots, v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_n$$

e visto che $v_i = (v_i + v_j) - v_j$ otteniamo $\mathcal{L}_r(B) = \mathcal{L}_r(A)$. $\square$

Osservazione. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t\!A$.

Dimostrazione. Ogni minore di ${}^t\!A$ è il trasposto di un minore di A, ma il determinante è invariante per trasposizione e quindi abbiamo la tesi. $\square$

Possiamo ora dimostrare la seguente caratterizzazione del rango di una matrice.

Proposizione. Il rango di una matrice A è il numero dei suoi vettori colonna linearmente indipendenti, cioè $\operatorname{rg} A = \dim \mathcal{L}_c(A)$. Inoltre tale numero è anche il numero di vettori riga linearmente indipendenti, cioè $\operatorname{rg} A = \dim \mathcal{L}_r(A)$.

Dimostrazione. Sia $B = {}^t\!A$ e sia B' la forma a scalini di B. Sappiamo che $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} B'$ e $\operatorname{rg} B'$ è il numero di pivot di B'. Ma $\dim \mathcal{L}_c(A) = \dim \mathcal{L}_r(B) = \dim \mathcal{L}_r(B')$ che è il numero di pivot di B'. Mettendo insieme abbiamo la tesi. $\square$

Esercizio. Trovare una base del sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Consideriamo la matrice con colonne v_1, v_2, v_3 e v_4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Una sua forma a scalini è, ad esempio,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi V ha dimensione 2 e i vettori nella matrice iniziale corrispondenti alle colonne con i pivot, cioè v_1 e v_2, formano una sua base.

Osservazione. L'algoritmo di Gauss è equivalente all'algoritmo per estrarre una base da un insieme di generatori.

Vediamo come l'algoritmo di Gauss può essere usato per calcolare l'inversa di una matrice (invertibile). Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la nuova matrice $\tilde{A} = (A|I)$, cioè

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e portiamo a scala la parte di $\tilde{A}$ relativa ad A, cioè il minore 3×3 a sinistra, operando sulle righe di $\tilde{A}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Visto che il rango è 3 la matrice è invertibile. Procediamo a rendere ogni pivot 1, dividendo ogni riga per il suo pivot. Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 2/9 & 1/9 \end{array}\right).$$

Ora, partendo dall'ultima colonna, annulliamo tutti gli elementi sopra i pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 2/9 & 1/9 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 2/9 & 1/9 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/9 & -2/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 2/9 & 1/9 \end{array}\right).$$

Siamo giunti ad una matrice del tipo $(I|B)$ con

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $A^{-1} = B$.

Dimostrazione (cenno). Facciamo vedere che la procedura sopra utilizzata calcola effettivamente l'inversa.

Siano $(A_0|B_0)$, $(A_1|B_1)$, ..., $(A_r|B_r)$ le varie matrici ottenute con mosse elementari partendo da $(A_0|B_0) = (A|I)$ fino a $(A_r|B_r) = (I|B)$. Proviamo che $B_h = A_h \cdot A^{-1}$ per ogni $h = 0, 1, \ldots, r$. Da ciò si ha $B = B_r = A_r \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} = A^{-1}$, cioè la tesi.

Procediamo per induzione su h. Per $h = 0$ vale $B_0 = I = A \cdot A^{-1} = A_0 \cdot A^{-1}$ e quindi il nostro asserto è vero. Osserviamo che la matrice $(A_{h+1}|B_{h+1})$ si ottiene da una mossa elementare da $(A_h|B_h)$ e che, per induzione, $B_h = A_h \cdot A^{-1}$. Analizzando i tre tipi di mosse elementari concludiamo che usando $B_h = A_h \cdot A^{-1}$ si ricava $B_{h+1} = A_{h+1} \cdot A^{-1}$. $\square$

Applicazioni Lineari

Definizione. Siano U e V due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione

$$f : U \longrightarrow V$$

si dice **lineare** se:

- $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ per ogni $u_1, u_2 \in U$,
- $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in U$.

Esercizi.

1. Provare che l'applicazione

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + 3z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   è lineare.

2. Se $f : U \longrightarrow V$ è lineare, quanto vale $f(0)$?

3. L'applicazione

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è lineare? è iniettiva? è suriettiva?

4. L'applicazione

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

è lineare? è iniettiva? è suriettiva?

5. Quali sono le applicazioni lineari da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$?

Si dice **nucleo**, o **kernel**, di f l'insieme

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in U \mid f(u) = 0\},$$

e si chiama **immagine** di f l'insieme

$$\mathrm{Im}(f) = f(U).$$

Proposizione. $\mathrm{Ker}\, f$ è un sottospazio vettoriale di U e $\mathrm{Im}\, f$ è un sottospazio di V.

Dimostrazione. Siano $u, u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = 0 + 0 = 0$ e quindi $u_1 + u_2 \in \mathrm{Ker}\, f$, allo stesso modo $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda \cdot 0 = 0$ e quindi $\lambda u \in \mathrm{Ker}\, f$. Questo prova che $\mathrm{Ker}\, f$ è un sottospazio vettoriale di U.

Siano ora $v, v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\, f$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora esistono $u_1, u_2 \in U$ per cui $f(u_1) = v_1$ e $f(u_2) = v_2$, quindi $f(u_1+u_2) = f(u_1)+f(u_2) = v_1+v_2$ e quindi $v_1+v_2 \in \mathrm{Im}\, f$. Inoltre esiste $u \in U$ per cui $f(u) = v$, da cui $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda v$, cioè $\lambda v \in \mathrm{Im}\, f$. Quindi $\mathrm{Im}\, f$ è un sottospazio di V. $\square$

Proposizione. Si ha che $0 \in \operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$. Inoltre se $v \in \operatorname{Im} f$ e $u \in f^{-1}(v)$ allora

$$f^{-1}(v) = u + \operatorname{Ker} f = \{u + u_1 \mid u_1 \in \operatorname{Ker} f\}.$$

Dimostrazione. Visto che $f(0) = 0$, è chiaro che $0 \in \operatorname{Im} f$. Inoltre $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ per definizione.

Siano ora u e v come nella tesi. Allora se $u_1 \in \operatorname{Ker} f$ si ha $f(u + u_1) = f(u) + f(u_1) = v + 0 = v$ e quindi $u + u_1 \in f^{-1}(v)$. Questo prova che $u + \operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(v)$.

Viceversa sia $u' \in f^{-1}(v)$, allora $f(u') = v$ e quindi $f(u' - u) = f(u') - f(u) = v - v = 0$, cioè $u' - u \in \operatorname{Ker} f$. Allora $u' = u + (u' - u) \in u + \operatorname{Ker} f$. Quindi vale anche $f^{-1}(v) \subseteq u + \operatorname{Ker} f$.

Concludiamo che vale l'uguaglianza tra insiemi $f^{-1}(v) = u + \operatorname{Ker} f$. $\square$

Corollario. Un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è $\{0\}$.

Esercizio. Provare che la seguente applicazione è lineare e trovare una base del suo nucleo

$$\mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - z \\ x - y \\ 0 \\ y - z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Proposizione. Se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ è un sistema di generatori per U e $f : U \longrightarrow V$ è un'applicazione lineare allora $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ è un sistema di generatori per $\operatorname{Im} f$. In particolare se U è finitamente generato allora anche $\operatorname{Im} f$ è finitamente generato.

Dimostrazione. Se $u \in U$ allora esistono scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ per cui

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

e allora

$$f(u) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n).$$

Questo prova che ogni vettore del tipo $f(u)$, cioè dell'immagine di f in V, è combinazione lineare di $f(u_1), \ldots, f(u_n)$. Quindi la tesi. $\square$

Esercizio. Trovare una base dell'immagine dell'applicazione dell'esercizio precedente.

Teorema. [Relazione fondamentale] Sia $f : U \longrightarrow V$ un'applicazione lineare con U finitamente generato. Allora

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

Dimostrazione. Visto che $\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio di U, esso è finitamente generato. Quindi esiste una base $u_1, u_2, \ldots, u_r$ di $\operatorname{Ker} f$. Inoltre dalla proposizione precedente sappiamo che anche $\operatorname{Im} f$ è finitamente generato, sia quindi $v_1, v_2, ..., v_s$ una base di $\operatorname{Im} f$ e siano $w_1, w_2, \ldots, w_s \in U$ tali che $f(w_i) = v_i$ per $i = 1, 2, \ldots, s$.

Se proviamo che $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_r, w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ è una base per U allora abbiamo la tesi.

Sia ora $u \in U$ qualsiasi. Da $f(u) \in \operatorname{Im} f$ abbiamo che esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ scalari per cui

$$f(u) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = f(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s)$$

da cui $z = u - (\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s) \in \operatorname{Ker} f$. Quindi esistono scalari $\mu_1, \ldots, \mu_r$ per cui

$$z = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_r u_r$$

e mettendo insieme abbiamo

$$u = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_r u_r + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s.$$

Questo prova che $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori per U.

Proviamo ora che i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti. Sia infatti

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_s w_s = 0.$$

Applicando f abbiamo

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = 0$$

ma i vettori $v_1, \dots, v_s$ sono una base per $\operatorname{Im} f$ e quindi $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0$. Allora

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0.$$

Ma i vettori $u_1, \dots, u_r$ sono una base per $\operatorname{Ker} f$ e quindi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Questo finisce la dimostrazione che $\mathcal{B}$ è una base. $\square$

Esercizi.

1. Provare che un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$ ha almeno due vettori linearmente indipendenti che vanno in zero, in particolare non è iniettiva.

2. Se $f : U \longrightarrow V$ è lineare e $\dim U > \dim V$ allora $\dim \operatorname{Ker}(f) \geq \dim U - \dim V$. In particolare f non è iniettiva.

3. Provare che un'applicazione lineare iniettiva da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ è anche suriettiva.

4. Se $f : U \longrightarrow V$ è lineare e $\dim U = \dim V$ allora f è iniettiva se e solo se è suriettiva.

5. Provare che un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ non è suriettiva.

6. Se $f : U \longrightarrow V$ è lineare e $\dim U < \dim V$ allora f non è suriettiva.

7. Sia $f : U \longrightarrow V$ lineare. Se L è un sottospazio vettoriale di U allora $f(L)$ è un sottospazio vettoriale di V. Viceversa se M è un sottospazio vettoriale di V allora $f^{-1}(M)$ è un sottospazio vettoriale di U.

La seguente osservazione ci permette di costruire le applicazione lineari a partire da una base del dominio.

Osservazione. Sia $u_1, u_2, \ldots, u_n$ una base di U e siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vettori (qualsiasi) di V allora esiste ed è unica un'applicazione lineare f per cui $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_2$, …, $f(u_n) = v_n$.

Dimostrazione. Dato $u \in U$ esistono unici $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tali che $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$.

Allora se definiamo $f(u) \doteq \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, otteniamo un'applicazione lineare (verificare!) che ha la proprietà richiesta.

Se $f' : U \longrightarrow V$ è un'applicazione lineare con $f'(u_i) = v_i$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ allora, per u come sopra, si ha

$$\begin{aligned} f'(u) &= f'(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) \\ &= \lambda_1 f'(u_1) + \cdots + \lambda_n f'(u_n) \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \\ &= f(u) \end{aligned}$$

e quindi $f' = f$, cioè f è unica. $\square$

Esercizio. Costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $e_1 - e_2$ e $e_2 - e_3$ nel nucleo e tale che

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Quanto vale $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$?

Esercizio. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ per cui $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_1$ e $e_1 + e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$?

Un'applicazione lineare $f : U \longrightarrow V$ si dice **isomorfismo** se è bigettiva e i due spazi vettoriali U e V si dicono **isomorfi**.

Teorema. Due spazi vettoriali U e V di dimensione finita sono isomorfi se e solo se $\dim U = \dim V$.

Dimostrazione. Se U e V sono isomorfi allora esiste un isomorfismo $f : U \longrightarrow V$. Essendo f suriettiva abbiamo $\mathrm{Im}\, f = \dim V$ ed essendo iniettiva $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Quindi $\dim U = \dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim V + \dim\{0\} = \dim V$.

D'altra parte se $\dim U = \dim V = n$ siano $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_n$ basi di U e V rispettivamente. Per l'osservazione precedente esiste (unica) un'applicazione lineare $f : U \longrightarrow V$ tale che $f(u_i) = v_i$ per $i = 1, \ldots, n$. Allora

$$\mathrm{Im}\, f = \mathcal{L}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) = V$$

e quindi f è suriettiva. Avendo U e V la stessa dimensione, f è anche iniettiva. In conclusione f è un isomorfismo. $\square$

Esercizi.

1. Costruire un isomorfismo tra gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}_2[t]$.

2. Gli spazi vettoriali $\mathbb{R}_3[t]$ e $\mathbb{R}^{2,2}$ sono isomorfi?

3. Se $\mathcal{B}$ è una base di V e $\dim V = n$ allora la funzione coordinate (rispetto a $\mathcal{B}$) $c_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo.

4. Se $f : U \longrightarrow V$ è un isomorfismo allora anche $f^{-1} : V \longrightarrow U$ è un isomorfismo.

5. Se $f : U \longrightarrow V$ è un isomorfismo e $g, h : V \longrightarrow W$ sono applicazioni lineari con $g \circ f = h \circ f$ allora $g = h$.

Matrici e Applicazioni lineari

Siano U e V spazi vettoriali con basi $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rispettivamente e sia $f : U \longrightarrow V$ un'applicazione lineare. Esprimendo ogni $f(u_j)$ in termini della base di V abbiamo

$$f(u_j) = a_{1,j}v_1 + a_{2,j}v_2 + \cdots + a_{n,j}v_n$$

per opportuni scalari $a_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$. Possiamo così costruire la matrice $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \doteq (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n,m}$ che chiamiamo **matrice associata ad** f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Data invece una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ possiamo costruire l'**applicazione lineare associata ad** A $f_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definendo $f(v) = A \cdot v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^m$. (Provare che f_A è lineare!)

Esercizi.

1. Data l'applicazione lineare

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

calcolarne la matrice associata rispetto alle basi standard di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Calcolare inoltre la matrice associata nelle basi

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per } \mathbb{R}^2$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ per } \mathbb{R}^3.$$

2. Data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ quanto vale $f_A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

Osservazione. Sia $f : U \longrightarrow V$ un'applicazione lineare e $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ basi di U e V rispettivamente. Sia $A = \mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$. Allora il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccccc} & U & \stackrel{f}{\longrightarrow} & V & \\ c_{\mathcal{B}} & \downarrow & & \downarrow & c_{\mathcal{C}} \\ & \mathbb{R}^m & \stackrel{f_A}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

dove $m = \dim U$, $n = \dim V$ e $c_{\mathcal{B}}$ e $c_{\mathcal{C}}$ sono le (funzioni) coordinate relative. Cioè $c_{\mathcal{C}}(f(u)) = f_A(c_{\mathcal{B}}(u))$ per ogni $u \in U$.

Dimostrazione. Indichiamo con $e_1, \ldots, e_m$ la base standard di $\mathbb{R}^m$. Per $j = 1, \ldots, m$ abbiamo $f_A(c_{\mathcal{B}}(u_j)) = f_A(e_j) = A \cdot e_j$. Ma $A \cdot e_j$ è la j–esima colonna di A, che è data dal vettore colonna delle coordinate rispetto a $\mathcal{C}$ di $f(u_j)$, cioè $c_{\mathcal{C}}(f(u_j))$. Questo prova che le due applicazioni lineari $f_A \circ c_{\mathcal{B}}$ e

$c_{\mathcal{C}} \circ f$ coincidono sulla base di U, quindi coincidono ovunque. Questa è la tesi. $\square$

Osservazione. Se A è la matrice associata ad $f : U \longrightarrow V$ (rispetto a due basi assegnate) allora $\dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, A$ e $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim U - \mathrm{rg}\, A$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ una base di U e $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Abbiamo

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}\, f &= \dim \mathcal{L}(f(u_1), \ldots, f(u_m)) \\ &= \dim \mathcal{L}(c_{\mathcal{C}}(f(u_1)), \ldots, c_{\mathcal{C}}(f(u_m)) \\ &= \dim \mathcal{L}_c(A) \\ &= \mathrm{rg}\, A \end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato che $c_{\mathcal{C}}$ è un isomorfismo. La formula sulla dimensione del nucleo segue ora subito dalla relazione fondamentale. $\square$

Siano U e V spazi vettoriali e sia $\mathrm{Hom}(U,V)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari da U in V. Allora è facile verificare che $\mathrm{Hom}(U,V)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni:

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u), \text{ per ogni } u \in U$$
$$(\lambda f)(u) = \lambda f(u) \text{ per ogni } u \in U.$$

Proposizione. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ basi di U e V rispettivamente con $\dim U = m$ e $\dim V = n$. L'applicazione

$$\mathrm{Hom}(U,V) \ni f \longmapsto \mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \in \mathbb{R}^{n,m}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Scrivendo M per $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ abbiamo $\mathsf{M}(f+g) = \mathsf{M}(f) + \mathsf{M}(g)$ e $\mathsf{M}(\lambda f) = \lambda \mathsf{M}(f)$. Quindi l'applicazione $f \longmapsto \mathsf{M}(f)$ è lineare. Se $\mathsf{M}(f) = 0$ allora $\mathrm{Ker}\, f = U$ e quindi $f = 0$; questo prova che $f \longmapsto \mathsf{M}(f)$ è iniettiva. Inoltre se $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ allora

$\mathsf{M}(f_A) = A$ per quanto visto in precedenza e quindi $f \longmapsto \mathsf{M}(f)$ è anche suriettiva. $\square$

Corollario. $\dim \mathrm{Hom}(U, V) = \dim U \cdot \dim V$.

Proposizione. Siano U, V e W tre spazi vettoriali e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ loro rispettive basi. Siano inoltre $f : U \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow W$ applicazioni lineari. Allora per l'applicazione lineare composta $g \circ f : U \longrightarrow W$ si ha

$$\mathsf{M}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathsf{M}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(g) \cdot \mathsf{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f).$$

Dimostrazione. Siano $A \doteq \mathsf{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$, $B \doteq \mathsf{M}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(g)$ e $C = \mathsf{M}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$. Per $u \in U$ abbiamo

$$\begin{aligned} f_{BA}(c_{\mathcal{B}}(u)) &= BA \cdot c_{\mathcal{B}}(u) \\ &= f_B(f_A(c_{\mathcal{B}}(u))) \\ &= f_B(c_{\mathcal{C}}(f(u))) \\ &= c_{\mathcal{D}}(g(f(u))) \\ &= c_{\mathcal{D}}((g \circ f)(u)) \\ &= f_C(c_{\mathcal{B}}(u)). \end{aligned}$$

Quindi $f_{BA} \circ c_{\mathcal{B}} = f_C \circ c_{\mathcal{B}}$. Ma $c_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo e quindi $f_{BA} = f_C$. Ma allora $BA = C$ per la proposizione precente. $\square$

Esercizio. Si consideri l'applicazione lineare

$$\mathbb{R}_3[t] \ni p \stackrel{d}{\longmapsto} \frac{d}{dt}(p) \in \mathbb{R}_3[t].$$

Provare che la matrice associata alla base $1, t, t^2, t^3$ in arrivo e in partenza è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si provi inoltre che A è nilpotente.

Sia V una spazio vettoriale di dimensione n e siano $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ due sue basi. Sia ora $\mathrm{Id} : V \longrightarrow V$ l'applicazione (lineare) identità che, per ogni $v \in V$, manda v in v. Se indichiamo con X e X' le coordinate di un vettore v rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} & v & \xmapsto{\mathrm{Id}} & v & \\ c_{\mathcal{B}} & \downarrow & & \downarrow & c_{\mathcal{B}'} \\ & X & \xmapsto{f_B} & X' & \end{array}$$

dove B è la matrice $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id})$ associata all'identità nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Cioè B è la matrice le cui colonne sono i coefficienti delle combinazioni lineari che scrivono i vettori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ in termini dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Dal diagramma abbiamo quindi $X' = BX$. La matrice B si chiama **matrice del cambiamento di base** da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Esercizi.

1. Date le basi

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \mathcal{B}' = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

di $\mathbb{R}^2$, calcolare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

2. Date le basi

$$\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$

$$\mathcal{C}' = \{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

di $\mathbb{R}^3$ calcolare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$.

Siano V e W due spazi vettoriali, siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V e $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ due basi di W e sia f un'applicazione lineare da V in W.

Allora se v è un vettore di V e indichiamo con X, X' le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e con Y, Y' le coordinate di $f(v)$ rispetto alle basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ allora abbiamo $Y = AX$ e $Y' = A'X'$ dove A è la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e A' è la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{C}'$.

Se inoltre B e C sono le matrici di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ abbiamo anche $X' = BX$ e $Y' = CY$. Quindi mettendo insieme $CY = A'BX$ da cui $Y = C^{-1}A'BX$ e quindi

$$A = C^{-1}A'B$$

o, equivalentemente,

$$A' = CAB^{-1}.$$

E' questa la legge di cambiamento di base per le matrici associate alle applicazioni lineari.

Esercizio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}'$,$\mathcal{C}'$ degli esercizi precedenti usando la legge di cambiamento di base appena vista.

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due sue basi. Un'applicazione lineare da V in sè $f : V \longrightarrow V$ si dice **endomorfismo**. Se $A = \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ e $A' = \mathsf{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ (cioè usiamo la stessa base per il dominio e codominio) allora la legge precedente diventa

$$A' = BAB^{-1}.$$

Cioè le matrici A e A' sono **coniugate** o **simili**.

Osservazione. Se A e A' sono simili allora hanno lo stesso determinante.

Dimostrazione. Infatti deve esistere B invertibile per cui $A' = BAB^{-1}$. Ma allora $\det A' = \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B)^{-1} = \det A$. $\square$

Sia ora $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. Allora possiamo definire il **determinante** di f come $\det(f) \doteq \det(A)$ dove A è la matrice associata ad f in una qualche base $\mathcal{B}$ di V, cioè $A = \mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$. Questa definizione **non** dipende dalla base scelta $\mathcal{B}$: infatti la matrice A' associata ad f in un'altra base $\mathcal{B}'$ è simile ad A e quindi $\det A' = \det A$ per l'osservazione precedente.

Sistemi di Equazioni lineari

Un sistema **lineare** di n equazioni in m incognite è un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

dove gli $a_{i,j}$ sono detti **coefficienti** e i b_i **termini noti**.

Sia $A = (a_{i,j})$ la matrice dei coefficienti, $X \in \mathbb{R}^m$ il vettore delle incognite e $B = (b_i) \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei termini noti. Allora il sistema si scrive

$$AX = B.$$

Inoltre se $f_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è l'applicazione lineare associata ad A allora le soluzioni del sistema sono gli elementi di $f_A^{-1}(B)$.

Quindi: se $B \in \operatorname{Im} f_A$ allora il sistema ha soluzioni e si dice **compatibile**, se invece $B \notin \operatorname{Im} f_A$ allora il sistema non ha soluzioni e si dice **incompatibile**.

Se il sistema è compatibile allora le sue soluzioni sono date da $X_0 + \operatorname{Ker} f_A$, dove X_0 è una *qualsiasi* soluzione di $AX = B$, cioè qualsiasi elemento di $f_A^{-1}(B)$. L'insieme delle soluzione è quindi un **sottospazio affine**, cioè il traslato di un sottospazio vettoriale. Si dirà che il sistema ha $\infty^{\dim \operatorname{Ker} f_A} = \infty^{m - \operatorname{rg} A}$ soluzioni.

Osserviamo inoltre che gli elementi di $\operatorname{Ker} f_A$ corrispondono alle soluzioni di $AX = 0$, che è detto **sistema omogeneo associato**.

Quindi, nel caso particolare di un sistema omogeneo abbiamo sempre la soluzione 0, detta **banale**. Se poi il nucleo di f_A ha dimensione positiva allora abbiamo soluzioni non banali, dette **autosoluzioni**.

Teorema. (Rouché–Capelli) Sia $\tilde{A}$ la matrice $(A|B)$ **completa** del sistema. Allora il sistema $AX = B$ è compatibile se e solo se $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}$.

Dimostrazione. Il sistema è compatibile se e solo se $B \in \operatorname{Im} f_A$, ma $\operatorname{Im} f_A = \mathcal{L}_c(A)$. Quindi il sistema è compatibile se e solo se $B \in \mathcal{L}_c(A)$, cioè se aggiungendo B il rango di A non aumenta. □

Teorema. Se $\tilde{A} = (A|B)$ è equivalente per righe a $\tilde{A}' = (A'|B')$ allora i due sistemi $AX = B$ e $A'X = B'$ hanno le stesse soluzioni.

Dimostrazione. Basta provare che la tesi è vera per una mossa elementare e questo è chiaro. (Controllare!)□

Esercizio. Discutere e risolvere quando possibile, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il sistema

$$\begin{cases} x - y & = & 1 \\ \lambda y + z & = & 0 \\ 2x - \lambda z & = & -1 \\ x + y + z & = & 1. \end{cases}$$

Se abbiamo un sistema con m equazioni e m incognite e il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa è m allora possiamo scrivere esplicitamente le soluzioni. Infatti, visto che A è invertibile, da $AX = B$ abbiamo $X = A^{-1}B$. E' possibile inoltre provare

Teorema. (Metodo di Cramer) Le soluzioni di $AX = B$ nel caso $n = m$, $\operatorname{rg} A = m$ sono date da

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, m$$

dove A_j è la matrice ottenuta sostituendo alla colonna j-esima di A la colonna dei termini noti.

Esercizio. Dimostrare il metodo di Cramer per $m = 2$.

Autovettori e Autovalori

Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Diciamo che $v \in V$, $v \neq 0$, è un **autovettore** di **autovalore** λ per f se $f(v) = \lambda v$. In generale diremo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se esiste un autovettore di autovalore λ.

Definiamo inoltre **polinomio caratteristico** di f il polinomio $p_f(t) = \det(f - t\,\mathrm{Id})$ nell'indeterminata t. Ricordiamo che questo determinante può essere calcolato scegliendo una (qualsiasi!) base $\mathcal{B}$ di V e calcolando il determinante di $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - t \cdot I$ dove I è la matrice identità.

Possiamo scrivere la condizione $f(v) = \lambda v$ come $(f - \lambda\,\mathrm{Id})v = 0$, cioè $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda v)$. Visto che $v \neq 0$, ne ricaviamo che λ è un autovalore per f se e solo se il nucleo di $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ non è banale. L'applicazione $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ in particolare non deve essere invertibile, da cui $\det(f - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$. Abbiamo quindi provato

Osservazione. Gli autovalori di f sono le radici del suo polinomio caratteristico.

Esempio. Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Scegliendo la base canonica per $\mathbb{R}^3$ abbiamo la seguente matrice associata ad f

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi per il polinomio caratteristico di f

$$\begin{aligned} p_f(t) &= \det \begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{pmatrix} \\ &= -(t^3+1) \\ &= -(t+1)(t^2-t+1). \end{aligned}$$

E quindi f ha il solo autovalore $\lambda = -1$.

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo l'**autospazio** dell'endomorfismo f relativo a λ come

$$V(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}).$$

Per quanto visto sopra $V(\lambda)$ è l'insieme formato dallo 0 e dagli autovettori di f di autovalore λ. (Quindi, in particolare $V(\lambda) = 0$ se λ non è un autovalore di f.) Si chiama **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ il numero $\mathrm{g}(\lambda) \doteq \dim V(\lambda)$. Ovviamente $g(\lambda) \geq 1$ visto che λ è un autovalore.

Esercizio. Calcolare gli autospazi dell'endomorfismo dell'esercizio precedente.

Definiamo **molteplicità algebrica**, indicata con $\mathrm{a}(\lambda)$, di un autovalore λ l'ordine di λ come radice di $p_f(t)$: se $p_f(t) = (t - \lambda)^a \cdot q(t)$ e $q(t)$ non ha λ come radice, allora la molteplicità algebrica è l'esponente a.

Esempio. Negli esempi precedenti -1 ha molteplicità algebrica 1.

E' possibile provare che $\mathrm{a}(\lambda) \geq \mathrm{g}(\lambda) \geq 1$ per ogni endomorfismo f e ogni autovalore λ di f.

Proposizione. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono autovettori relativi ad autovalori distinti allora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. (Solo per $n = 2$.) Supponiamo per assurdo che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ con $\alpha_2 \neq 0$ (ad esempio) e sia $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Allora abbiamo $0 = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2$. Ma anche $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0$ moltiplicando per λ_1 la relazione di lineare dipendenza.

Allora sottraendo $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$ che è assurdo in quanto $\alpha_2 \neq 0$, $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, visto che v_2 è un autovettore. $\square$

Diciamo che un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ è **semplice** se esiste una base di V formata da autovettori per f.

Quindi se f è semplice esiste una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tale che $f(v_j) = \lambda_j v_j$ con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ autovalori di f (anche ripetuti). Quindi si ha

$$\mathsf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

cioè la matrice associata in una base di autovettori è diagonale.

Diciamo che una matrice A è **diagonalizzabile** se esiste una matrice B simile ad A con B diagonale. Quindi un endomorfismo è semplice se la sua matrice, rispetto ad una base qualsiasi, è diagonalizzabile.

Teorema. Un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ di spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ è semplice se e solo se:

- tutti gli zeri del polinomio caratteristico di f sono in $\mathbb{K}$,
- la molteplicità geometrica è uguale a quella algebrica per ogni autovalori di f.

Esercizio. Se un endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ha n autovalori distinti allora è semplice.

Esercizio. Decidere per quali valori di h è semplice l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x + hz \\ 3x + 2y + z \\ hx + z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Forme Bilineari

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{R}$, un'applicazione $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice **forma bilineare** se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in V$ valgono le seguenti:

- $\beta(u + v, w) = \beta(u, w) + \beta(v, w)$,
- $\beta(\lambda u, w) = \lambda\beta(u, w)$,
- $\beta(u, v + w) = \beta(u, v) + \beta(u, w)$,
- $\beta(u, \lambda v) = \lambda\beta(u, v)$.

Esempi.

1. L'applicazione $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

è una forma bilineare.

2. L'applicazione $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

è una forma bilineare.

Una forma bilineare si dice **simmetrica** se $\beta(u, v) = \beta(v, u)$ per ogni $u, v \in V$. Se invece $\beta(u, v) = -\beta(v, u)$ per ogni $u, v \in V$ allora la forma di dice **antisimmetrica** o **alternante**. Ad esempio le forme dell'esempio precedente sono simmetrica la prima e antisimmetrica la seconda.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è una base di V allora definiamo **matrice associata** a β nella base $\mathcal{B}$ la matrice

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = (\beta(v_i, v_j))_{i,j}.$$

Esempi. (Continua dagli esempi precedenti.)

1. Se $\mathcal{B} = e_1, e_2, e_3$ allora

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\beta) &= \begin{pmatrix} \beta(e_1, e_1) & \beta(e_1, e_2) & \beta(e_1, e_3) \\ \beta(e_2, e_1) & \beta(e_2, e_2) & \beta(e_2, e_3) \\ \beta(e_3, e_1) & \beta(e_3, e_2) & \beta(e_3, e_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ allora

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\beta) &= \begin{pmatrix} \beta(e_1, e_1) & \beta(e_1, e_2) \\ \beta(e_2, e_1) & \beta(e_2, e_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Osservazione. Se $\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = A$ e $c_{\mathcal{B}}(u) = X$, $c_{\mathcal{B}}(v) = Y$ allora

$$\beta(u, v) = {}^t X \cdot A \cdot Y.$$

Dimostrazione. Sia $A = (a_{i,j})$, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rispettivamente le coordinate di u e v nella base $\mathcal{B}$ allora abbiamo

$$\begin{array}{rcl} \beta(u, v) & = & \beta(x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n, y_1 u_1 + \cdots + y_n u_n) \\ & = & \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \beta(u_i, u_j) \\ & = & \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{i,j} \\ & = & {}^t X A Y. \quad \square \end{array}$$

Esercizio. Se la forma bilineare β su $\mathbb{R}^3$ ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica, calcolare $\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix})$.

Proposizione. Se $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sono due basi di V e $C^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ allora

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}'}(\beta) = {}^tC^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\beta)C^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}.$$

Se C è una matrice invertibile allora le matrici A e ${}^tCAC$ si dicono **congruenti**. Quindi le matrici associate ad una forma bilineare nelle varie basi di V sono tutte tra loro congruenti.

Proposizione. Se A ed A' sono congruenti allora il segno di $\det A$ è lo stesso di $\det A'$. (Qui con **segno** intendiamo $+$, 0 o $-$.)

Dimostrazione. Se A ed A' sono congruenti allora esiste C invertibile per cui $A' = {}^tCAC$. Quindi $\det A' = \det({}^tC)\det A \det C = (\det C)^2 \det A$. Quindi se $\det A = 0$ allora $\det A' = 0$, se $\det A > 0$ allora anche $\det A' > 0$ e, infine, se $\det A < 0$ allora anche $\det A' < 0$. $\square$

Esercizio. Calcolare le matrici associate alla forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 - z_1x_2$$

nelle basi $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$ e verificare la formula di cambiamento di base.

Osserviamo che se β è una forma bilineare su V allora si ha $\beta(0, v) = 0$ per ogni $v \in V$. (Dimostrare!) In generale possono però esistere anche $u \neq 0$ per cui $\beta(u, v) = 0$ per ogni $v \in V$. Le forme bilineari per cui questo *non* succede sono particolarmente importanti:

Definizione. Una forma bilineare β su V si dice **non degenere** se $\beta(u, v) = 0$ per ogni $v \in V$ implica che $u = 0$. Altrimenti β si dice **degenere**.

Esercizi.

1. La forma su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1 z_2 - y_1 x_2$$

è degenere.

2. La forma su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 z_2$$

è non degenere.

Osservazione. La forma β è non degenere se e solo se $\det \mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\beta) \neq 0$. (In qualche base $\mathcal{B}$ e quindi in tutte.)

Forma canonica

Definizione. Diciamo che una matrice A è **ortogonale** se ${}^tA \cdot A = \mathrm{Id}$.

E' facile provare che l'insieme $\mathrm{O}(n)$ delle matrici ortogonali $n \times n$ è un gruppo. Come vedremo esse hanno la proprietà di conservare il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. Inoltre vale il seguente fondamentale risultato.

Teorema Spettrale. Una matrice reale simmetrica è diagonalizzabile attraverso una matrice ortogonale.

Corollario. Un endomorfismo la cui matrice sia simmetrica è semplice. In particolare i suoi autovalori sono tutti reali.

Se β è una forma bilineare su V allora diciamo che due vettori $u, v \in V$ sono **ortogonali** se $\beta(u, v) = 0$.

Corollario. Se β è una forma bilineare simmetrica su V allora esiste una base di V formata da vettori ortogonali rispetto a β. Equivalentemente, esiste una base in cui la matrice associata a β è diagonale.

Se la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ è ortogonale per β allora definiamo **indice di positività** di β come il numero i_+ dei vettori u_h della base per cui $\beta(u_h, u_h) > 0$, definiamo **indice di nullità** il numero i_0 di vettori u_h per cui $\beta(u_h, u_h) = 0$ e, infine, **indice di negatività** il numero i_- di vettori u_h per cui $\beta(u_h, u_h) < 0$.

Corollario. Se β è una forma bilineare simmetrica allora gli indici i_+, i_0, i_- dipendono solo da β e non dalla base (ortogonale) scelta per definirli. In particolare essi si possono calcolare dai segni degli autovalori della matrice associata a β.

Corollario. Se β è una forma bilineare simmetrica allora esiste una base $\mathcal{B}$ in cui

$$\mathsf{M}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \cdots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \cdots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

dove gli 1 sono in numero di i_+, i -1 sono in numero di i_- e gli 0 sono in numero di i_0. In particolare β è non degenere se e solo se $i_0 = 0$.

Definizione. Una forma bilineare simmetrica β su V si dice:

- **semidefinita positiva** se $\beta(u,u) \geq 0$ per ogni $u \in V$, (equivalente a $i_- = 0$)
- **definita positiva** se $\beta(u,u) > 0$ per ogni $u \in V$, $u \neq 0$, (equivalente a $i_0 = i_- = 0$, $i_+ = \dim V$)
- **semidefinita negativa** se $\beta(u,u) \leq 0$ per ogni $u \in V$, (equivalente a $i_+ = 0$)
- **definita negativa** se $\beta(u,u) < 0$ per ogni $u \in V$, $u \neq 0$ (equivalente a $i_0 = i_+ = 0$, $i_- = \dim V$).

Esercizi. Determinare gli indici e la forma canonica delle seguenti forme bilineari:

1. su $\mathbb{R}^2$, $\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2$,

2. su $\mathbb{R}^3$, $\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 - y_1z_2 - z_1y_2 + 2z_1z_2$,

3. su $\mathbb{R}^3$, $\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_1z_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 - y_1z_2 - z_1x_1 - z_1y_2 + 2z_1z_2$.

Spazi Euclidei

Una forma bilineare, simmetrica e definita positiva β su uno spazio vettoriale reale V si chiama **prodotto scalare**; V viene detto **spazio vettoriale euclideo**.

Se β è un prodotto scalare definiamo **norma** di un vettore rispetto a β il numero

$$|v|_\beta \doteq \sqrt{\beta(v,v)}.$$

Osservazione. Per ogni coppia di vettori u, v si ha

$$\beta(u,v) = \frac{1}{2}(|u+v|_\beta^2 - |u|_\beta^2 - |v|_\beta^2).$$

Dimostrazione. Facile calcolo. $\square$

In particolare, se u e v sono ortogonali rispetto a β, cioè se $\beta(u,v) = 0$ allora vale il teorema di Pitagora

$$|u+v|_\beta^2 = |u|_\beta^2 + |v|_\beta^2.$$

Definiamo **distanza** tra due vettori u, v il numero $|u-v|_\beta$.

Teorema. (Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz) Se V è uno spazio euclideo con prodotto scalare β allora per ogni $u, v \in V$ si ha

$$|\beta(u,v)| \leq |u|_\beta |v|_\beta.$$

Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se u e v sono allineati.

Dimostrazione. Definiamo il seguente polinomio in λ $p(\lambda) \doteq |u-\lambda v|_\beta^2 = |u|_\beta^2 - 2\lambda\beta(u,v) + \lambda^2|v|_\beta^2 \geq 0$. Se $v = 0$ allora $|\beta(u,v)| = 0 = |u|_\beta |v|_\beta$ e quindi la tesi è vera. Possiamo allora supporre $v \neq 0$, da cui $|v|_\beta \neq 0$.

Visto che $|v|_\beta \neq 0$, $p(\lambda)$ è un polinomio di secondo grado in λ, ed è mai negativo. Ne segue che il discriminante Δ di $p(\lambda)$ deve essere non positivo: $\Delta = \beta(u,v)^2 - |u|_\beta^2 |v|_\beta^2 \leq 0$. Da cui la tesi.

Inoltre l'uguaglianza si ha solo per $\Delta = 0$. In tale caso il polinomio $p(\lambda)$ ha una (sola) radice, cioè esiste un valore λ_0 per cui $p(\lambda_0) = |u - \lambda_0 v|_\beta = 0$. Quindi $u - \lambda_0 v = 0$, da cui $u = \lambda_0 v$ e questo prova che u e v sono allineati.

Se viceversa u e v sono allineati allora esiste λ_0 per cui $u = \lambda_0 v$ da cui $|u|_\beta^2 = \lambda_0^2 |v|_\beta^2$ e $\beta(u, v) = \lambda_0 \beta(v, v) = \lambda_0 |v|_\beta^2$ e quindi vale l'uguaglianza nella tesi. $\square$

Corollario. (Disuguaglianza di Minkowski o triangolare) Per ogni coppia di vettori u, v si ha

$$|u + v|_\beta \leq |u|_\beta + |v|_\beta.$$

Dimostrazione. Usando Cauchy–Schwarz abbiamo

$$\begin{array}{rcl} |u+v|_\beta^2 & = & |u|_\beta^2 + 2\beta(u, v) + |v|_\beta^2 \\ & \leq & |u|_\beta^2 + 2|u|_\beta |v|_\beta + |v|_\beta^2 \\ & = & (|u|_\beta + |v|_\beta)^2 \end{array}$$

da cui la tesi. $\square$

Dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz segue che per ogni coppia di vettori non nulli si ha

$$-1 \leq \frac{\beta(u,v)}{|u|_\beta |v|_\beta} \leq 1.$$

Si può quindi definire l'angolo tra i vettori u e v rispetto a β come

$$\arccos \frac{\beta(u,v)}{|u|_\beta |v|_\beta}.$$

Esercizio. Verificare che la forma bilineare su $\mathbb{R}^n$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

è un prodotto scalare. Esso viene detto prodotto scalare **standard** o **canonico** per $\mathbb{R}^n$. Si provi che esso coincide con

$$u \cdot v = |u||v| cos\theta$$

con θ angolo tra u e v.

Ortonormalizzazione

Se V è uno spazio euclideo diciamo che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono **ortonormali** se sono ortogonali tra loro e hanno norma 1.

Osservazione. Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono ortonormali allora sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Sia $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Per ogni $1 \leq j \leq n$ abbiamo $0 = \beta(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, v_j) = \lambda_j \beta(v_j, v_j) = \lambda_j$. Questo prova che solo la combinazione lineare banale può fare 0. $\square$

Useremo questa osservazione nella dimostrazione dell'importante teorema seguente.

Teorema. (Gram-Schmidt) Ogni spazio euclideo ammette una base ortonormale.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base di

V. Definiamo

$$
\begin{aligned}
w_1 &= u_1 \\
v_1 &= w_1/|w_1|_\beta \\
w_2 &= u_2 - \beta(v_1, u_2)v_1 \\
v_2 &= w_2/|w_2|_\beta \\
w_3 &= u_3 - \beta(v_1, u_3)v_1 - \beta(v_2, u_3)v_2 \\
v_3 &= w_3/|w_3|_\beta \\
&\vdots \\
w_n &= u_n - \beta(v_1, u_n)v_1 - \cdots - \beta(v_{n-1}, u_n)v_{n-1} \\
v_n &= w_n/|w_n|_\beta.
\end{aligned}
$$

E' ora facile provare che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono ortonormali. Essi sono linearmente indipendenti per l'osservazione precedente e sono quindi una base essendo in numero di $n = \dim V$. $\square$

Il processo visto nella dimostrazione del teorema precedente si chiama **ortonormalizzazione** di Gram-Schmidt.

Esercizio. Partendo dalla base

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

costruire una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard.

Complemento Ortogonale

Sia V uno spazio euclideo con prodotto scalare β e sia U un sottospazio di V. Si definisce **complemento ortogonale** di U rispetto a β il sottoinsieme

$$U^\perp \doteq \{v \in V | \beta(v,u) = 0 \text{ per ogni } u \in U\}.$$

Proposizione. L'insieme $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale e si ha

$$U \oplus U^\perp = V,$$

cioè $U^\perp$ è un complemento di U in V.

Dimostrazione. Siano v_1, v_2 in $U^\perp$ allora per ogni $u \in U$ si ha $\beta(v_1 + v_2, u) = \beta(v_1, u) + \beta(v_2, u) = 0$; questo prova che $v_1 + v_2 \in U^\perp$. Inoltre se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in U^\perp$ allora $\beta(\lambda v, u) = \lambda\beta(v, u) = 0$; questo prova che $\lambda v \in U^\perp$. Abbiamo così provato che $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

Sia ora $v \in U \cap U^\perp$. Allora si ha $\beta(v, v) = 0$ e quindi $v = 0$.

Osserviamo che U è uno spazio euclideo con il prodotto scalare β. Sia quindi $u_1, u_2, \ldots, u_r$ una sua base ortonormale, con $r = \dim U$. Completiamo questa base a $u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_n$ base di V. Sia infine $u_1, u_2, \ldots, u_r, u'_{r+1}, \ldots, u'_n$ l'ortonormalizzazione di questa base di V. (Si noti che i primi r vettori non cambiano essendo già una base ortonormale.)

Vogliamo ora provare che $U^\perp = \mathcal{L}(u'_r, \ldots, u'_n)$; da questo segue che $U + U^\perp = V$ e quindi la tesi.

Per costruzione i vettori u'_h sono tutti ortogonali ai vettori u_k. Quindi i vettori u'_h sono ortogonali a tutto U, cioè $u'_h \in U^\perp$. Questo prova che $\mathcal{L}(u'_{r+1}, \ldots, u'_n) \subset U^\perp$.

Sappiamo che $U \cap U^\perp = 0$ e quindi $\dim U + \dim U^\perp \leq n$ da cui $\dim U^\perp \leq n - r$. Ma abbiamo già trovato il sottospazio $\mathcal{L}(u'_{r+1}, \ldots, u'_n)$ di $U^\perp$ di dimensione $n - r$. Concludiamo che $U^\perp = \mathcal{L}(u'_{r+1}, \ldots, u'_n)$.
$\square$

La proposizione ci dice che ogni vettore $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = u + u^\perp$ con $u \in U$ e

$u^\perp \in U^\perp$. E' facile provare che la mappa $p_U(v) \doteq u$ è lineare; essa si chiama **proiezione ortogonale** su U.

Esercizio. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare una base ortonormale del complemento ortogonale di U rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Geometria Analitica nello Spazio

Studiamo ora la geometria di $\mathbb{R}^3$, chiameremo i suoi vettori **punti** (di $\mathbb{R}^3$). Scriveremo le coordinate dei punti rispetto alla base canonica se non indicato diversamente; inoltre scriveremo i punti per riga, come (x, y, z), ma essi saranno da considerarsi sempre come vettori colonna.

Piani di $\mathbb{R}^3$

Definizione. Un **piano** di $\mathbb{R}^3$ è un sottospazio affine di dimensione 2.

Dati 3 punti v_0, v_1, v_2 il piano π da essi determinato è dato da

$$\pi = v_0 + \mathcal{L}(v_1 - v_0, v_2 - v_0).$$

Si noti che, dovendo avere π dimensione 2, i due vettori $v_1 - v_0$ e $v_2 - v_0$ *devono* essere linearmente indipendenti.

Un punto v appartiene a π, quindi, se e solo se esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $v = v_0 + \alpha(v_1 - v_0) + \beta(v_2 - v_0)$. E' questa l'equazione parametrica del piano π.

Equivalentemente $v \in \pi$ se e solo se i vettori $v - v_0$, $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0$ sono linearmente dipendenti. Cioè se è nullo il determinante della matrice le cui colonne sono le coordinate di questi tre vettori. Otteniamo in questo modo l'equazione cartesiana del piano π: un'equazione lineare, in generale non omogenea, nelle coordinate di v.

Viceversa l'insieme dei punti (x, y, z) che verificano un'equazione del tipo $ax + by + cz + d = 0$ determina un piano se e solo se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, a, b, c sono detti coefficienti di giacitura. Il vettore (a, b, c, d) è determinato solo a meno di un multiplo scalare non nullo.

Esercizio. Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana del piano passante per i punti $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Per determinare un piano π possiamo anche assegnare un vettore $v = (a, b, c)$ perpendicolare ad esso e un punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ da cui il piano passa. L'equazione sarà allora $ax + by + cz + d = 0$ con $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Esercizio. Determinare l'equazione parametrica e cartesiana del piano perpendicolare a $(1, 1, 1)$ e passante per $(-1, -1, 0)$.

Dati due piani π_1 e π_2 essi possono essere: paralleli se $\pi_1 = \pi_2$ o $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, oppure incidenti e in tal caso $\pi_1 \cap \pi_2$ è un sottospazio affine di dimensione 1. Per decidere la posizione reciproca di due piani studiamo il sistema dato dalle loro equazioni cartesiane in modo da determinare l'insieme $\pi_1 \cap \pi_2$.

Esercizi.

1. Determinare la posizione reciproca dei piani: π_1 passante per $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, -1)$ e π_2 perpendicolare a $(-1, 0, 0)$ e passante per $(0, 2, 0)$.

2. Scrivere l'equazione del piano che verifica:

   a) passa per $(1, 1, 0)$ e parallelo ai vettori $(1, 0, -1)$, $(0, 2, 3)$,

b) passa per $(0, 1, -1)$ e $(3, 2, 1)$ e parallelo a $(0, 0, 5)$,
c) passa per $(1, 1, -1)$ e ortogonale a $(1, -1, 2)$,
d) passa per $(1, 2, -1)$ e parallelo al piano $2x - y + 3z + 5 = 0$,
e) passa per $(3, 2, 1)$ e contiene la retta $r : y+z-1 = x + 2y - z = 0$.

Rette di $\mathbb{R}^3$

Definizione. Una **retta** è un sottospazio affine di dimensione 1.

Dati due punti v_0, v_1 la retta r da essi determinata è data da

$$v_0 + \mathcal{L}(v_1 - v_0).$$

Un punto v appartiene ad r, quindi, se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $v = v_0 + \alpha(v_1 - v_0)$. In altri termini questa è l'equazione parametrica della retta passante per v_0 e di direzione $v_1 - v_0$. Le coordinate di $v_1 - v_0$, che è un vettore parallelo alla retta, si chiamano parametri direttori. Se inoltre $v_1 - v_0$ ha norma 1 allora essi vengono detti coseni direttori.

Due rette sono quindi parallele se hanno parametri direttori proporzionali. Perpendicolari se i loro parametri direttori lo sono. Due rette si dicono sghembe se non esiste un piano che le contenga entrambe.

Una retta è determinata da un sistema di due equazioni cartesiane. Per trovarle osserviamo che se

$v \in r$ allora i vettori $v - v_0$ e $v_1 - v_0$ sono allineati. Quindi deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $v - v_0 = \lambda(v_1 - v_0)$. Se $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x, y, z)$ allora abbiamo, eliminando λ,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

quando i determinatori sono non nulli.

Esercizi.

1. Trovare forma parametrica e cartesiana della retta passante per $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, -1)$.

2. Data la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z - 1 & = & 0 \\ x + y + z + 3 & = & 0 \end{cases}$$

calcolarne i parametri direttori.

3. Verificare che le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = 2 - t/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 11 - 4s \\ y = 2 \\ z = s \end{cases}$$

rappresentano la stessa retta. Scrivere le equazioni cartesiane per tale retta.

4. Si provi che le rette

$$r : \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

sono sghembe. Si trovi un piano π che sia parallelo ad r e che contenga r'.

Sfere e Circonferenze

Dato un punto $c \in \mathbb{R}^3$ e un numero reale $r \geq 0$, chiamiamo **sfera** di raggio r e centro c l'insieme dei punti v per cui $|v-c| = r$, cioè dei punti distanti r da c.

Se $c = (x_c, y_c, z_c)$ e $v = (x, y, z)$ allora l'equazione $|v-c| = r$ diventa $\sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2} = r$, o, equivalentemente

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 = r^2.$$

E' questa l'equazione cartesiana della sfera di centro c e raggio r.

Viceversa ogni equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

se $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$ rappresenta una sfera di centro $c = -(a, b, c)$ e raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Se π è un piano, S una sfera e $\pi \cap S \neq \varnothing$ allora $\pi \cap S$ è una circonferenza nella spazio. In particolare se π è il piano $z = 0$ allora abbiamo l'equazione $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + d = 0$ di una circonferenza di centro $-(a, b, 0)$ e raggio $\sqrt{a^2 + b^2 - d}$.

Esercizio. Determinare centro e raggio della sfera passante per i punti $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, -1, 1)$ e $(1, 0, 0)$.

Esercizi Risolti.

Esercizio 1. Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + hy_1y_2 - y_1z_2 - y_2z_1 + hz_1z_2$$

definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e ortonormalizzare i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispetto a β per $h = 2$.

Soluzione La matrice associata a β nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}.$$

Essendo A simmetrica, β è una forma simmetrica. Il polinomio caratteristico di A è $(1-t)((h-t)^2-1) =$

$(1-t)(h+1-t)(h-1-t)$ con radici 1, $h-1$ e $h+1$. Gli indici di β sono dati dai segni di queste radici, esse devono quindi essere tutte positive affinchè β sia un prodotto scalare. Si ricava che β è un prodotto scalare se e solo se $h > 1$.

Siano u_1, u_2 e u_3 i vettori da ortonormalizzare del testo. Abbiamo $|u_1|^2_\beta = \beta(u_1, u_1) = 1$ e quindi $v_1 = w_1 = u_1$ (usando le notazioni della proposizione sul processo di Gram-Schmidt).

Poniamo ora $w_2 = u_2 - \beta(u_2, v_1)v_1$, ma $\beta(u_2, u_1) = 1$ e quindi $w_2 = u_2 - u_1 = (0, 1, 0)$. Allora $|w_2|^2_\beta = \beta(w_2, w_2) = 2$, da cui $v_2 = w_2/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0)$.

Per il terzo vettore calcoliamo $\beta(u_3, v_1) = -1$ e $\beta(u_3, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2 - 1) = -3/\sqrt{2}$ e quindi poniamo $w_3 = u_3 - \beta(u_3, v_1)v_1 - \beta(u_3, v_2)v_2 = u_3 + v_1 + 3v_2/\sqrt{2} = (-1, -1, 1) + (1, 0, 0) + 3/2(0, 1, 0) = (0, 1/2, 1)$. Visto che $|w_3|^2_\beta = \beta((0, 1/2, 1), (0, 1/2, 1)) = 3/2$ abbiamo $v_3 = w_3/\sqrt{3/2}$.

Esercizio 2. Trovare una base per il complemento ortogonale del sottospazio $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | y - z = z - 2t = 0\}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare standard.

Soluzione. Per prima cosa calcoliamo una base per U. Gli elementi di U sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} y - z &= 0 \\ z - 2t &= 0 \end{cases}$$

possiamo quindi scegliere x e t come variabili indipendenti e y e z come dipendenti. Ponendo $x = 1$ e $t = 0$ abbiamo il vettore $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ mentre per $x = 0$ e $t = 1$ abbiamo $u_2 = (0, 2, 2, 1)$.

Allora un vettore $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ è in $U^\perp$ se e solo se $v \cdot u_1 = v \cdot u_2 = 0$, cioè $x = 0$ e $2y + 2z + t = 0$. Si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x &= 0 \\ 2y + 2z + t &= 0 \end{cases}$$

per cui possiamo scegliere z e t come indipendenti ed abbiamo $v_1 = (0, -1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, -1/2, 0, 1)$ rispettivamente per $z = 1$, $t = 0$ e $z = 0$, $t = 1$. Una base per $U^\perp$ è quindi v_1, v_2.

Esercizio 3. Decidere per quali valori del parametro reale h il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (h+1)x \\ x+hy \\ 2(1-h)x-2hy-hz \end{pmatrix}$$

è semplice.

Soluzione. Il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ 1 & h & 0 \\ -2h+2 & -2h & -h \end{pmatrix}$$

associata ad f nella base canonica è $(h+1-t)(h-t)(-h-t)$, quindi per $h \neq 0$ e $h \neq -1/2$ le tre radici $h, -h, h+1$ sono distinte e quindi f è semplice.

Invece per $h = 0$ la radice 0 ha molteplicità algebrica 2 e la radice 1 ha molteplicità algebrica 1. Si tratta quindi di controllare se l'autospazio di 0 (cioè il nucleo) ha dimensione 2 o meno. La matrice associata per $h = 0$ diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi il rango di f è 1, da cui $\dim \ker f = 2$. L'endomorfismo è semplice anche per $h = 0$.

Per $h = -1/2$ la radici sono $1/2$ con molteplicità algebrica 2 e $-1/2$ con molteplicità algebrica 1. Dobbiamo quindi calcolare la molteplicità geometrica di $1/2$. La matrice associata ad $f - 1/2\,\mathrm{Id}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2. Quindi la molteplicità geometrica di $1/2$ è 1, l'endomorfismo non è semplice per $h = -1/2$.

Esercizio 4. Data la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2z - 1 & = & 0 \\ x + y + z + 3 & = & 0 \end{cases}$$

calcolarne i parametri direttori.

Soluzione. Il sistema che definisce r ha matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Una possibile forma a scala di tale matrice è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

e quindi, scelta z come variabile indipendente e posto $z = t$, abbiamo la forma parametrica

$$\begin{cases} x & = & -3/2t - 1 \\ y & = & 1/2t - 2 \\ z & = & t. \end{cases}$$

I parametri direttori cercati sono quindi $(-3/2, 1/2, 1)$. (O qualsiasi multiplo di questo vettore, essendo tali parametri definiti a meno di un multipli scalare non nullo.)

Esercizio 5. Verificare che le seguenti equazioni parametriche

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2t \\ y & = & 2 \\ z & = & 2-t/2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 11-4s \\ y & = & 2 \\ z & = & s \end{array}\right.$$

rappresentano la stessa retta. Scrivere le equazioni cartesiane per tale retta.

Soluzione. I parametri direttori delle due rette sono $(2,0,-1/2)$ e $(-4,0,1)$; essi sono proporzionali, quindi le due rette sono paralleli. Ne segue che o coincidono, se hanno un punto in comune (e quindi tutti), o sono parallele distinte, se non hanno alcun punto in comune.

La prima retta passa per $(3,2,2)$ (per $t=0$), controlliamo se anche la seconda retta passa per tale punto. Abbiamo il sistema delle equazioni $11-4s=3$, $2=2$ e $2=s$; che ha soluzione $s=2$. Quindi anche la seconda retta passa per $(3,2,2)$ e le due rette coincidono.

Per scrivere le equazioni cartesiano dobbiamo *eliminare* il parametro dalle equazioni. Per esempio usando la prima forma abbiamo $t = 4 - 2z$ che sostituito nella prima equazione diventa $x = 11 - 4z$. Le equazioni cartesiane della retta sono quindi $x + 4z - 11 = 0$ e $y - 2 = 0$.

Esercizio 6. Si provi che le rette

$$r : \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

sono sghembe. Si trovi un piano π che sia parallelo ad r e che contenga r'.

Soluzione. Proviamo in due modi diversi che le due rette sono sghembe.

Primo modo: usando la definizione di rette sghembe. Sia π un piano di $\mathbb{R}^3$ con equazione cartesiana $ax+by+cz+d = 0$ che contiene r e r'. Il piano è quindi perpendicolare al vettore (a, b, c). Quindi (a, b, c) deve essere perpendicolare ai parametri direttori di r e r'. Dalle equazioni di r e r' troviamo $(1, 1, 1)$ e $(2, -1, 1)$ come parametri direttori delle due rette. Da cui $a + b + c = 0$ e $2a - b + c = 0$. Inoltre π deve contenere un punto di r, diciamo $(0, 0, 0)$, e un punto di r', diciamo $(1, 2, 0)$. Quindi $d = 0$ e $a + 2b = 0$.

Ora, l'unica soluzione delle condizioni scritte per a, b, c, d è $(0, 0, 0, 0)$ che *non* definisce alcun piano di $\mathbb{R}^3$ in quanto (a, b, c) non può essere il vettore nullo.

Secondo modo: osserviamo che due rette sono sghembe se e solo se non si intersecano e non sono parallele. Facendo il sistema delle equazioni che definiscono r e r' vediamo che $r \cap r' = \varnothing$. Inoltre esse non sono parallele in quanto non hanno parametri direttori proporzionali.

Per trovare un piano parallelo ad r e contenente r' procediamo come nel primo modo e troviamo le condizioni $a + b + c = 0$ e $2a - b + c = 0$ in quanto (a, b, c) deve ancora essere perpendicolare ai parametri direttori di r e r'. Però ora imponiamo solo che π contenga un punto di r' (e *non* anche un punto di r). Quindi $a + 2b + d = 0$. Risolvendo il sistema abbiamo, scegliendo d come variabile indipendente, le soluzioni $(a, b, c, d) = (-1/2d, -1/4d, 3/4d, d)$ che per $d = 4$ ci danno il piano $-2x - y + 3z + 4 = 0$. (Qualsiasi valore di $d \neq 0$ va bene per avere l'equazione del piano che, si ricordi, è determinata a meno di uno scalare non nullo. La scelta $d = 4$ è solo per non avere frazioni.)

Esercizio 7. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato da $f(x,y,z) = (y,z,x)$. Quanto vale $f^3(x,y,z)$?

Soluzione. Abbiamo

$$\begin{array}{rcl} f^3(x,y,z) & = & f(f(f(x,y,z))) \\ & = & f(f(y,z,x)) \\ & = & f(z,x,y) \\ & = & (x,y,z). \end{array}$$

Cioè f^3 è l'identità di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 8. Per quali valori di h l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato da $f(x,y,z) = (x, -hx+hy-z, -hx+(h+1)z)$ è un isomorfismo? Per $h = 0$ calcolare una base di $\mathbb{R}^3$ formato da autovettori di f.

Soluzione. Affinchè f sia un isomorfismo esso deve essere bigettivo e ciò è equivalente ad essere suriettivo (essendo un endomorfismo). Quindi la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -h & h & -1 \\ -h & 0 & h+1 \end{pmatrix}$$

associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ deve avere rango massimo. Cioè il suo determinante deve essere non nullo. Tale determinante vale $h(h+1)$ quindi f è un isomorfismo per $h \neq 0, -1$.

Per $h = 0$ il polinomio caratteristico di f è $-t(1-t)^2$. Quindi f ha i due autovalori 0 e 1. Visto che 0 ha molteplicità algebrica 1 essa avrà anche molteplicità geometrica 1, cioè l'autospazio $V(0)$ (che è il nucleo di

f) ha dimensione 1. Risolvendo il sistema omogeneo $AX = 0$ otteniamo che $(0, 1, 0)$ è una base per $V(0)$.

L'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2, ci aspettiamo quindi che anche $V(1)$ abbia dimensione 2 perchè altrimenti non esisterebbe una base di autovettori. Il sistema omogeneo $(A - \mathrm{Id})X = 0$ ha matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi soluzioni $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, -1, 1)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Una sua base è quindi $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$.

Concludiamo che $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ è una base di autovettori per f (quando $h = 0$). In tale base la matrice di f è ovviamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. Calcolare una base degli autospazi dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$

$$f(x, y, z, t) = (2x, x + 2y, t, z).$$

Soluzione. Troviamo per prima cosa gli autovalori di f. La matrice associata nella base canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi il polinomio caratteristico di f è $p(t) = (2 - t)^2(t-1)(t+1)$. Abbiamo quindi gli autovalori 1 e -1 di molteplicità algebrica, e quindi anche geometrica, 1 e l'autovalore 2 di molteplicità algebrica 2.

L'autospazio di 1 è dato da $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ e quindi dalle soluzioni del sistema omogeneo con matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

che, portata a scala, diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi scegliere t come variabile indipendente ed abbiamo, per $t = 1$, la base $(0, 0, 1, 1)$ per tale autospazio.

L'autospazio di -1 è dato da $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ e quindi abbiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi scengliere t come variabile indipendente ed abbiamo la base $(0, 0, -1, 1)$.

L'autospazio di 2 è dato da $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ e quindi la matrice del sistema omogeneo associato diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

di cui una forma a scala è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi la sola y come variabile indipendente. In particolare f non è semplice in quanto la dimensione dell'autospazio di 2 è 1 e non 2 come la molteplicità algebrica. Una sua base è data da $(0, 1, 0, 0)$.

Esercizio 10. Determinare per quali valori del parametro reale α il piano π di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $x+y-z-\alpha=0$ è tangente alla sfera S di equazione cartesiana $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$.

Soluzione. Per prima cosa osserviamo che S ha centro $C=(1,1,1)$ e raggio $r=3$, quindi la sua equazione cartesiana può essere riscritta come $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$.

Sia ora $P=(x_0,y_0,z_0)$ il punto di tangenza di π ad S. Il raggio CP è perpendicolare a π e quindi la retta r per CP di equazione parametrica

$$\begin{array}{rcrcl} r & : & (x,y,z) & = & t(P-C)+C \\ & & & = & t(x_0-1,y_0-1,z_0-1)+(1,1,1) \end{array}$$

ha il vettore dei parametri direttori (x_0-1,y_0-1,z_0-1) parallelo al vettore $(1,1,-1)$ dei coefficienti di giacitura di π.

Esiste quindi $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $(x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1) = \lambda(1, 1, -1)$. Da qui ricaviamo $P = (x_0, y_0, z_0) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 - \lambda)$.

Sappiamo anche che il punto di tangenza P appartiene alla sfera S e al piano π. Da $P \in S$ abbiamo

$$\begin{aligned} (1+\lambda-1)^2 + (1+\lambda-1)^2 + (1-\lambda-1)^2 &= 9 \\ 3\lambda^2 &= 9 \\ \lambda &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

E, infine, da $P \in \pi$ abbiamo

$$(1 \pm \sqrt{3}) + (1 \pm \sqrt{3}) - (1 \mp \sqrt{3}) - \alpha = 0$$

e quindi $\alpha = 1 \pm 3\sqrt{3}$.

Versioni

- Versione 23.09.2012: 158 pagine, base.
- Versione 07.10.2012: 161 pagine, aggiunti numeri complessi, insiemi e applicazioni.
- Versione 11.02.2013: 163 pagine, aggiunto un esercizio su tangenza tra piano e sfera, corretti vari errori di stampa.
- Versione 28.09.2013: 163 pagine, cambiata descrizione esame scritto, cambiato anno di corso.