Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Prova scritta di Geometria e Algebra

2 luglio 2012

SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se v_1, v_2, v_3 sono tre vettori linearmente indipendenti, in quanti modi posso scrivere 0 come loro combinazione lineare?

   - ■ In un solo modo.
   - □ In nessun modo.
   - □ In infiniti modi.
   - □ In esattamente tre modi.
   - □ In almento tre modi.

   Soluzione. Per definizione di lineare indipendenza solo la combinazione lineare banale può fare 0. Quindi 0 si può scrivere in un solo modo.

2. Se una matrice $n \times n$ ha determinante non nullo allora il suo rango è:

   - ■ n.
   - □ Almeno 1.
   - □ Al più n.
   - □ Almeno n.
   - □ Non si può decidere.

   Soluzione. Il minore dato da tutta la matrice ha determinante non nullo, per definizione il rango risulta quindi essere n.

3. Siano r e s due rette contenute nel piano π di $\mathbb{R}^3$. Allora esse sono sghembe se

   - ■ In nessun caso.
   - □ Non si intersecano.
   - □ Non sono parallele.
   - □ Si intersecano.
   - □ Sono perpendicolari.

   Soluzione. Due rette si dicono sghembe se non sono contenute in un qualche piano, ma allora le due rette r, s, non sono sghembe essendo contenute nel piano π.

4. Siano U e V due sottospazi vettoriali di W. Allora $U + V$ è:

   - ■ Il più piccolo sottospazio che contiene sia U che V.
   - □ Il più grande sottospazio che contiene sia U che V.
   - □ L'unione di U e V.
   - □ Tutto lo spazio W.
   - □ Solo un sottoinsieme, non un sottospazio.

   Soluzione. La somma tra i sottospazi U e V è il sottospazio di tutte le somme $u + v$ con $u \in U$ e $v \in V$, esso è quindi il più piccolo sottospazio che contiene U e V.

5. Se A è una matrice con n righe e m colonne quando è possibile calcolare A^2?

   - ■ Solo se $n = m$.
   - □ Sempre.

- ☐ Mai.
- ☐ Solo se $n > m$.
- ☐ Solo se $n < m$.

Soluzione. Per calcolare $A^2 = A \cdot A$ bisogna che il numero delle colonna di A sia uguale al numero di righe di A, quindi $n = m$.

6. Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ e sia (i_+, i_0, i_-) la sua segnatura. Allora vale

- ■ $i_+ + i_0 + i_- = 3$.
- ☐ $i_+ = 3$, $i_0 = 0$ e $i_- = 0$.
- ☐ $i_+ = 1$, $i_0 = 1$ e $i_- = 1$.
- ☐ $i_+ = 0$, $i_0 = 0$ e $i_- = 3$.
- ☐ $i_+ + i_0 + i_- < 3$.

Soluzione. L'unica cosa che si può dedurre è che la somma degli indici è la dimensione dello spazio.

7. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$. Allora vale

- ■ $n \geq 4$.
- ☐ $n \leq 4$.
- ☐ $n = 4$.
- ☐ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
- ☐ I vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono diversi da zero.

Soluzione. La dimensione di $\mathbb{R}^4$, cioè 4, è il numero minimo di generatori, quindi, $n \geq 4$.

8. Sia f un endomorfismo semplice di V e sia A la sua matrice associata in una base di V. Allora

- ■ A è diagonalizzabile.
- ☐ A è diagonale.
- ☐ A ha determinante non nullo.
- ☐ A è invertibile.
- ☐ Gli autovalori di f sono tutti distinti.

Soluzione. Essendo f semplice esiste una base in cui la sua matrice associata è diagonale, cioè A è diagonalizzabile.

9. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con autovalori $-h, 0, h+1$ per $h \in \mathbb{R}$. Allora

- ■ f è semplice per $h \neq -1, 0, -1/2$.
- ☐ f è semplice solo per $h \neq -1, 0, -1/2$
- ☐ f è semplice per $h \neq -1, 0, 1/2$.
- ☐ f è semplice solo per $h \neq -1, 0, 1/2$
- ☐ f è sempre semplice.

Soluzione. Se $h \neq -1, 0, -1/2$ allora gli autovalori sono tutti distinti e quindi f è semplice. Per $h = -1, 0, -1/2$ non possiamo dire nulla.

10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare non nulla che si annulla su due vettori linearmente indipendenti. Allora

- ■ La dimensione dell'immagine di f è 1.
- ☐ La dimensione del nucleo è maggiore di 2.
- ☐ La dimensione del nucleo è minore di 2.
- ☐ f è suriettiva.
- ☐ f è iniettiva.

Soluzione. Essendo f non nulla si ha $\dim \operatorname{Ker} f < 3$, mentre dall'annullarsi di f su due vettori linearmente indipendenti abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$. Risulta quindi $\dim \ker f = 2$, da cui $\dim \operatorname{Im} f = 1$.

Parte 2: Esercizio.

1. Sia h un numero reale e sia f il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} hx + y + z \\ x - hy + z \\ z \end{pmatrix}.$$
Determinare per quali valori di h esso risulta semplice e trovare una base per gli autospazi di f quando $h = 0$.

   Soluzione. La matrice associata ad $f - t\,\mathrm{Id}$ è
$$\begin{pmatrix} h-t & 1 & 1 \\ 1 & -h-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$
e quindi il polinomio caratteristico di f è $(1-t)(t^2-h^2-1)$. Pertanto gli autovalori di f sono $1, \pm\sqrt{1+h^2}$, in particolare essi sono reali per ogni valori di h. Inoltre per $h \neq 0$ essi sono tutti distinti, f è allora semplice.

   Se invece $h = 0$ allora l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 mentre l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 1. Il rango della matrice associata a $f - \mathrm{Id}$ è 2 e quindi la molteplicità geometrica di 1 è 1. Concludiamo che f non è semplice per $h = 0$.

   Per trovare la base degli autospazi di f per $h = 0$, usando quanto detto sopra, dobbiamo trovare un vettore non nullo u per cui $f(u) = u$, base dell'autospazio di 1, e un vettore non nullo v per cui $f(v) = -v$, base dell'autospazio di -1. Ricordando che l'autospazio di un autovalore λ è dato dal nucleo di $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ otteniamo, risolvendo i sistemi omogenei associati, che si può prendere $u = (1, 1, 0)$ e $v = (-1, 1, 0)$.

2. Sia h un numero reale e sia f il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -hx + y + z \\ x + hy + z \\ -z \end{pmatrix}.$$
Determinare per quali valori di h esso risulta semplice e trovare una base per gli autospazi di f quando $h = 0$.

   Soluzione. La matrice associata ad $f - t\,\mathrm{Id}$ è
$$\begin{pmatrix} -h-t & 1 & 1 \\ 1 & h-t & 1 \\ 0 & 0 & -1-t \end{pmatrix}$$
e quindi il polinomio caratteristico di f è $-(1+t)(t^2 - h^2 - 1)$. Pertanto gli autovalori di f sono $-1, \pm\sqrt{1+h^2}$, in particolare essi sono reali per ogni valori di h. Inoltre per $h \neq 0$ essi sono tutti distinti, f è allora semplice.

   Se invece $h = 0$ allora l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 2 mentre l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 1. Il rango della matrice associata a $f + \mathrm{Id}$ è 1 e quindi la molteplicità geometrica di -1 è 2. Concludiamo che f è semplice anche per $h = 0$.

   Per trovare la base degli autospazi di f per $h = 0$, usando quanto detto sopra, dobbiamo trovare un vettore non nullo u per cui $f(u) = u$, base dell'autospazio di 1, e due vettori linearmente indipendenti v_1, v_2 per cui $f(v_1) = -v_1$ e $f(v_2) = -v_2$, base dell'autospazio di -1. Ricordando che l'autospazio di un autovalore λ è dato dal nucleo di $f - \lambda\,\mathrm{Id}$ otteniamo, risolvendo i sistemi omogenei associati, che si può prendere $u = (1, 1, 0)$, $v_1 = (-1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 1)$.

Parte 3: Teoria.

1. Dimostrare che se U e V sono due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale finitamente generato W allora
$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

   Soluzione. Vista a lezione.

2. Dimostrare che se $f : U \longrightarrow V$ è un'applicazione lineare e U è uno spazio vettoriale finitamente generato allora

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

Soluzione. Vista a lezione.