Università del Salento
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA E ALGEBRA
2 luglio 2013
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se la matrice A è congruente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ il suo determinante può essere

■ 4
□ 0
□ -1
□ -2
□ -3

Soluzione. La matrice data ha determinante 3. Quindi anche A avrà determinante positivo, l'unica possibilità è 4.

2. Se U e V sono sottospazi dello spazio vettoriale W allora

■ $\dim(U+V) \leq \dim U + \dim V$
□ $\dim(U+V) = \dim U + \dim V$
□ $\dim(U+V) \geq \dim U + \dim V$
□ $\dim(U+V) < \dim U + \dim V$
□ $\dim(U+V) > \dim U + \dim V$

Soluzione. Dalla formula di Grassmann la dimensione di $U+V$ non può superare $\dim U + \dim V$.

3. Se $f : V \longrightarrow V$ è un endomorfismo semplice con un solo autovalore λ, allora

■ la molteplicità geometrica di λ è uguale a $\dim V$
□ la molteplicità geometrica di λ è minore di $\dim V$
□ la molteplicità geometrica di λ è maggiore di $\dim V$
□ la molteplicità algebrica di λ è minore di $\dim V$
□ la molteplicità algebrica di λ è maggiore di $\dim V$

Soluzione. Essendo f semplice, la molteplicità geometrica è uguale a quella algebrica. Quindi è anche uguale a $\dim V$ visto che, essendo f semplice, tutte le radici del suo polinomio caratteristico sono nel campo considerato e, quindi, in particolare tale polinomio è $(t-\lambda)^{\dim V}$.

4. Se u, v e w sono vettori di $\mathbb{R}^3$ di norma 1 rispetto al prodotto scalare standard allora

■ $|u+v+w| \leq 3$
□ $|u+v+w| < 3$
□ $|u+v+w| > 3$
□ $|u+v+w| = 0$
□ $|u+v+w| = -3$

Soluzione. Dalla disuguaglianza triangolare si ha $|u+v+w| = |(u+v)+w| \leq |u+v|+|w| \leq |u|+|v|+|w| = 3$.

5. Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare e $f(1,0) = (1,0,1)$, $f(0,1) = (1,-1,-1)$ allora $f(1,-1)$ vale

■ $(0,1,2)$
□ $(0,-1,-2)$
□ $(2,-1,0)$
□ $(-2,1,0)$

☐ $(0,0,0)$

Soluzione. Essendo f lineare abbiamo $f(1,-1) = f(1,0) - f(0,1) = (1,0,1) - (1,-1,-1) = (0,1,2)$.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale a l'endomorfismo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1-a)x + ay \\ -ax + (1+a)y \\ -ax + y + az \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^3$ è semplice. Calcolare inoltre una base dell'autospazio di 1 quando $a = 1$.

Soluzione. La matrice associata all'endomorfismo è

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ -a & 1+a & 0 \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $p(t) = (a-t)(1-t)^2$. Quindi, se $a \neq 1$, abbiamo i due autovalori a, con molteplicità algebrica 1, e 1 con molteplicità algebrica 2. Se invece $a = 1$ allora abbiamo il solo autovalore 1 di molteplicità algebrica 3.

Consideriamo prima il caso $a \neq 1$. Per decidere se l'endomorfismo è semplice basta calcolare la molteplicità geometrica di 1, visto che necessariamente quella di a sarà 1 e quindi uguale a quella algebrica. La molteplicità geometrica di 1 è data da 3 meno il rango della matrice

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -a & a & 0 \\ -a & 1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

Portando a scala tale matrice si trova che essa ha rango 2 se $a \neq 0$ mentre ha rango 1 se $a = 0$. Concludiamo quindi che, per $a \neq 1$, l'endomorfismo è semplice se e solo se $a = 0$.

Vediamo ora il caso $a = 1$. Dobbiamo calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1. Quindi sostituiamo $a = 1$ e calcoliamo il rango della matrice

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale rango è 1 e la molteplicità geometrica cercata 2. L'endomorfismo non è semplice per $a = 1$.

L'esercizio chiede di calcolare una base dell'autospazio di 1 per $a = 1$. Si tratta quindi di trovare una base del nucleo di $A - \mathrm{Id}$ o, equivalentemente, di risolvere il sistema $(A - \mathrm{Id})X = 0$. Avendo già calcolato $A - \mathrm{Id}$, per $a = 1$, il sistema da risolvere è semplicemente $-x + y = 0$. Una base è allora $(1,1,0)$, $(0,0,1)$.

2. Determinare per quali valori del parametro reale a l'endomorfismo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1-a)x - ay - az \\ ax + (1+a)y + z \\ az \end{pmatrix}$$

di $\mathbb{R}^3$ è semplice. Calcolare inoltre una base dell'autospazio di 1 quando $a = 1$.

Soluzione. Analoga alla precedente.

Parte 3: Esercizio 2

1. Determinare la segnatura della seguente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

$$\beta\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_1z_2 + y_1x_2 - z_1x_2$$

Soluzione. La matrice associata alla forma bilineare è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $p(t) = -t(t^2 - 2)$. Gli autovalori di A sono quindi 0, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. Essi sono uno positivo, uno nullo e uno negativo. L'indice di positività è quindi 1, l'indice di nullità è 1 e l'indice di negatività è 1.

2. Determinare la segnatura della seguente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = -x_1 z_2 + y_1 z_2 - z_1 x_2 + z_1 y_2$$

Soluzione. Analoga alla precedente.