Università del Salento

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA E ALGEBRA

3 febbraio 2014

Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. In quanti modi si può scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di tre vettori linearmente indipendenti

   ■ un solo modo
   □ due modi
   □ nessun modo
   □ infiniti modi
   □ dipende dai vettori

   Soluzione. Se tre vettori sono linearmente indipendenti il vettore nullo si ottiene solo con la combinazione lineare banale.

2. Se una matrice 3×3 ha determinante 4 allora il suo rango è

   ■ 3
   □ 4
   □ 2
   □ 1
   □ 0

   Soluzione. Se il determinante dell'intera matrice è non nullo allora il rango è massimo, cioè 3.

3. In quanti piani sono contenute due rette parallele distinte di $\mathbb{R}^3$?

   ■ uno
   □ nessuno
   □ due
   □ infiniti
   □ dipende dalle rette

   Soluzione. Due rette parallele distinte sono contenute in un solo piano.

4. Se U e V sono due sottospazi vettoriali di dimensione 5 di $\mathbb{R}^6$ allora l'intersezione $U \cap V$

   ■ ha dimensione almeno 4
   □ ha dimensione non più di 3
   □ ha dimensione 2
   □ ha dimensione al più 1
   □ è banale

   Soluzione. Dalla formula di Grassmann si ha che la dimensione dell'intersezione è maggiore o uguale a 4 visto che $U + V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$ e quindi ha dimensione al più 6.

5. Sia β è una forma bilineare simmetrica semidefinita negativa su $\mathbb{R}^4$. Quali tra i seguenti possono essere gli indici di β?

   ■ $i_+ = 0$, $i_0 = 2$, $i_- = 2$
   □ $i_+ = 3$, $i_0 = 1$, $i_- = 0$
   □ $i_+ = 1$, $i_0 = 1$, $i_- = 1$

- ☐ $i_+ = 1$, $i_0 = 1$, $i_- = 2$
- ☐ $i_+ = 0$, $i_0 = 2$, $i_- = 3$

Soluzione. Essendo β semidefinita negativa $i_+ = 0$. Inoltre la somma degli indici deve dare la dimensione dello spazio, cioè 4.

6. Se $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare non suriettiva allora

- ■ il nucleo ha dimensione più di 1
- ☐ il nucleo ha dimensione 1
- ☐ il nucleo ha dimensione 2
- ☐ il nucleo ha dimensione 0
- ☐ l'applicazione è iniettiva

Soluzione. Dalla relazione fondamentale, $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 4$. Ma $\dim \operatorname{Im} f < 3$ essendo f non suriettiva, quindi $\dim \operatorname{Ker} f > 4 - 3 = 1$.

7. Siano A e B due matrici simili con $\det A = 0$ allora

- ■ B non è invertbile
- ☐ $A = B$
- ☐ B ha rango massimo
- ☐ B è invertibile
- ☐ $AB = \mathrm{Id}$

Soluzione. B ha lo stesso determinante di A, cioè 0. Quindi non è invertibile.

8. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, le due matrici $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ possono essere congruenti?

- ■ $a > 0$
- ☐ $a > -1$
- ☐ $a < 0$
- ☐ $a = \pm 1$
- ☐ nessun valore di a

Soluzione. La prima matrice ha determinante a, mentre la seconda ha determinante 1. Quindi necessariamente $a > 0$ visto che matrici congruenti hanno determinante dello stesso segno.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1+a)x + ay \\ -ax + (1-a)y \\ -2x - 2y - z \end{pmatrix}$$

Determinare inoltre una base degli autospazi di f per $a = 0$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & a & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $-(1+t)(1-t)^2$. Ne segue che gli autovalori di f sono 1 con molteplicità algebrica 2 e -1 con molteplicità algebrica 1. Allora che f è semplice se e solo se la molteplicità geometrica di 1 è 2.

Per calcolare questa molteplicità geometrica determiniamo il rango della matrice $A - \mathrm{Id}$. Portando a scala tale matrice abbiamo che il rango è 2 per $a \neq 0$ e 1 per $a = 0$. Quindi l'endomorfismo è semplice se e solo se $a = 0$.

Per trovare le basi degli autospazi per $a = 0$ dobbiamo risolvere i sistemi $(A_{|a=0} - \mathrm{Id})X = 0$ e $(A_{|a=0} + \mathrm{Id})X = 0$. Otteniamo che possiamo prendere come basi: $(-1, 0, 1)$ e $(0, -1, 1)$ per l'autospazio di 1 e $(0, 1, 0)$ per l'autospazio di -1.

2. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1+a)x - ay - 2z \\ ax + (1-a)y - 2z \\ -z \end{pmatrix}$$

Determinare inoltre una base degli autospazi di f per $a = 0$.

Soluzione. Analoga alla precedente.

Parte 3: Esercizio 2

1. Data la seguente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

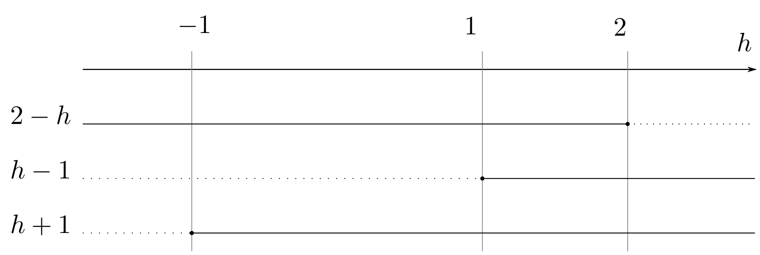
$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = hx_1x_2 + x_1z_2 + z_1x_2 + (2-h)y_1y_2 + hz_1z_2$$

determinare per quali valori di h la forma è definita positiva, semidefinita positiva o indefinita.

Soluzione. La matrice associata ad α rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} h & 0 & 1 \\ 0 & 2-h & 0 \\ 1 & 0 & h \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $h-1$, $h+1$ e $2-h$. La segnatura di α è quindi data dei segni di $h-1$, $h+1$ e $2-h$. Il seguente schema ci permette di concludere che: α è indefinita per $h < 1$ e $h > 2$, semidefinita positiva per $1 \leq h \leq 2$ e definita positiva per $1 < h < 2$.



i_+	1	1	2	2	3	2	2
i_0	0	1	0	1	0	1	0
i_-	2	1	1	0	0	0	1

2. Data la seguente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = -hx_1x_2 + x_1z_2 + z_1x_2 + (2+h)y_1y_2 - hz_1z_2$$

determinare per quali valori di h la forma è definita positiva, semidefinita positiva o indefinita.

Soluzione. Analoga alla precedente.