Università del Salento
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di Geometria e Algebra
3 settembre 2014
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia f un endomorfismo suriettivo dello spazio vettoriale V, allora

   - ■ 0 non è un autovalore di f
   - □ 0 è un autovalore di f
   - □ f ha $\dim V$ autovalori distinti
   - □ f non è iniettiva
   - □ ogni autovalore di f ha molteplicità algebrica 1

   Soluzione. L'endomorfismo f è iniettivo essendo suriettivo. Quindi il nucleo è banale, cioè 0 non è un autovalore di f.

2. Siano π_1, π_2 due piani di $\mathbb{R}^3$ con giacitura rispettivamente v_1 e v_2. Quale tra le seguenti è vera?

   - ■ se π_1 e π_2 sono paralleli allora v_1 e v_2 sono allineati
   - □ se π_1 e π_2 sono paralleli allora $v_1 = v_2$
   - □ se π_1 passa da 0 allora $v_1 = 0$
   - □ se π_1 e π_2 sono perpendicolari allora $v_1 = -v_2$
   - □ se π_1 e π_2 coincidono allora $v_1 = v_2$

   Soluzione. Il vettore giacitura di un piano è perpendicolare al piano. Quindi, se π_1 e π_2 sono paralleli, v_1 e v_2 sono allineati in quanto perpendicolari a piani paralleli.

3. Se A e B sono matrici 3×3 e C è una matrice 3×3 invertibile per cui $B = CAC^{-1}$ allora

   - ■ A e B hanno gli stessi autovalori
   - □ A e B hanno autovalori opposti
   - □ A e B sono congruenti
   - □ A e B hanno sicuramente rango diverso
   - □ 0 è un autovalore di C

   Soluzione. Nelle ipotesi date A e B sono simili, esse hanno quindi gli stessi autovalori.

4. Se U e V sono sottospazi distinti di dimensione 4 di $\mathbb{R}^5$ allora

   - ■ $\dim U \cap V = 3$
   - □ $\dim U + V = 4$
   - □ $\dim U \cap V = 4$
   - □ $\dim U + \dim V = 7$
   - □ $U = V$

   Soluzione. Osserviamo che $U + V = \mathbb{R}^5$ visto che $U + V$ contiene, ad esempio, U che ha dimensione 4 ma è più grande di U contenendo V che è distinto da U. Allora dalla relazione fondamentale troviamo $\dim U \cap V = 3$.

5. Sia f un endomorfismo semplice di $\mathbb{R}^3$. Allora è vero che

   - ■ f può avere un autovalore di molteplicità geometrica 3
   - □ f ha autovalori distinti
   - □ f non ha autovalori distinti

- ☐ f ha sicuramente l'autovalore 0
- ☐ f non ha autovalori reali

Soluzione. Un endomorfismo semplice può avere un autovalore di molteplicità pari alla dimensione dello spazio; in tale caso f è un multiplo dell'identità.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax - y + 3z \\ -x + ay + 3z \\ (a+1)z \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di a l'endomorfismo f non è iniettivo?

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ -1 & a & 3 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $(a-1-t)(a+1-t)^2$. Ne segue che gli autovalori di f sono $a-1$, con molteplici algebrica e geometrica 1, e $a+1$ con molteplicità algebrica 2.

Ne segue che f è semplice se e solo se $a+1$ ha molteplicità geometrica 2. Per calcolare tale molteplicità calcoliamo il rango di $A-(a+1)\,\mathrm{Id}$. Con ovvi calcoli abbiamo che il rango cercato è 1, indipendentemente da a. Quindi la molteplicità geometrica di $a+1$ è $3-1=2$; l'endomorfismo è quindi semplice per ogni valore di a.

La mappa f è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}\, f$ è banale, cioè se e solo se 0 non è autovalore di f. Quindi f non è iniettivo solo per $a=-1$ e $a=1$.

Parte 3: Esercizio 2

1. Determinare la segnatura della forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = \alpha x_1 y_2 + \alpha y_1 x_2 - y_1 z_2 - z_1 y_2$$

al variare di α in $\mathbb{R}$.

Soluzione. La matrice associata a β nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $t(-t^2+1+\alpha^2)$. Gli autovalori di A sono qundi $0, \pm\sqrt{1+\alpha^2}$. Concludiamo che la segnatura di β è $(1,1,1)$ indipendentemente da α.