Università del Salento
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Prova scritta di Geometria e Algebra

3 dicembre 2012
SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se 0 è un autovalore di un endomorfismo f allora

   ■ f non è iniettivo
   □ f è suriettivo
   □ f è iniettivo
   □ il nucleo di f è banale
   □ l'unico elemento del nucleo di f è il vettore nullo

   Soluzione. Il nucleo di f è l'autospazio di 0, esso ha dimensione positiva essendo 0 un autovalore. L'endomorfismo non è quindi iniettivo.

2. Se il sistema $AX = B$ ha ∞^r soluzioni allora il sistema $AX = 0$ ha ∞^s soluzioni con

   ■ $s = r$
   □ $s > r$
   □ $s < r$
   □ $s = 0$
   □ $s = 1$

   Soluzione. Le soluzioni di $AX = B$ si ottengono da quelle di $AX = 0$ sommando una soluzione particolare di $AX = B$, è quindi chiaro che deve essere $s = r$.

3. Se β è una forma bilineare simmetrica semidefinita positiva su V e $u \in V$ è tale che $\beta(u, u) \leq 0$ allora

   ■ $\beta(u, u) = 0$
   □ $\beta(u, u) < 0$
   □ $\beta(u, u) > 0$
   □ non esiste un tale u
   □ $u = 0$

   Soluzione. La forma β è semidefinita positiva, quindi $\beta(u, u) \geq 0$. Insieme a $\beta(u, u) \leq 0$ otteniamo $\beta(u, u) = 0$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ allora

   ■ $\dim \ker f \geq 3$
   □ $\dim \ker f = 3$
   □ $\dim \ker f = 0$
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 2$
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 0$

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \ker f = 5 - \dim \operatorname{Im} f$, ma $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^2$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f \leq 2$. Troviamo $\dim \ker f \geq 3$.

5. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare, se $u, v \in V$ sono vettori non nulli per cui $f(u) = u$ e $f(v) = -v$ allora

   ■ u e v sono linearmente indipendenti
   □ u e v sono linearmente dipendenti

- ☐ $u = v$
- ☐ $u = -v$
- ☐ $f(u) = f(v)$

Soluzione. I due vettori u e v sono linearmente indipendenti in quanto autovettori relativi ad autovalori distinti.

6. Siano π_1, π_2 due piani di $\mathbb{R}^3$ e sia $p \in \pi_1 \cap \pi_2$, allora

- ■ esiste almeno una retta $r \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$
- ☐ esiste esattamente una retta r con $r \subseteq \pi_1 \cap \pi_2$
- ☐ i due piani sono perpendicolari
- ☐ i due piani si intersecano solo in p
- ☐ ogni retta per p è contenuta nell'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2$

Soluzione. I due piani si intersecano nel punto p, quindi non sono paralleli e distinti. Allora avranno almeno una retta in comune. Non è però detto che tale retta sia unica, i piani potrebbero infatti coincidere.

7. Se B è una matrice $n \times n$ invertibile allora il rango di B^2 è

- ■ n
- ☐ $2n$
- ☐ 0
- ☐ minore di n
- ☐ 2

Soluzione. Anche B^2 è invertibile visto che $\det B^2 = (\det B)^2 \neq 0$. Allora B^2 ha rango massimo, cioè n.

8. Se f è un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ con autovalori 0 e 1 allora

- ■ f è semplice
- ☐ f è iniettivo
- ☐ f non è semplice
- ☐ f è suriettivo
- ☐ 0 è un autovettore

Soluzione. Avendo due autovalori distinti, l'endomorfismo è semplice.

9. Se u e v hanno norma a per un prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ allora $u + v$ ha norma

- ■ minore o uguale a $2a$
- ☐ uguale a $2a$
- ☐ maggiore di $2a$
- ☐ 0
- ☐ a

Soluzione. Indicato con β il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$, abbiamo $|u+v|_\beta \leq |u|_\beta + |v|_\beta = 2a$ dalla disuguaglianza triangolare.

Parte 2: Esercizio.

1. Determinare una base degli autospazi di

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} hx - y \\ -x + hy - z \\ -y + hz \end{pmatrix}$$

al variare di h in $\mathbb{R}$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} h & -1 & 0 \\ -1 & h & -1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = (h-t)((h-t)^2 - 2)$. Gli autovalori, cioè le radici di questo polinomio, sono h, $h+\sqrt{2}$, $h-\sqrt{2}$. Per ogni valore di h gli autovalori sono distinti, essi hanno quindi molteplicità algebrica 1. In particolare anche le loro molteplicità geometriche sono tutte 1, cioè $\dim V(h) = 1$, $\dim V(h-\sqrt{2}) = 1$ e $\dim V(h+\sqrt{2}) = 1$. Le basi che cerchiamo saranno quindi formate da un solo autovettore per ogni autovalore.

Per l'autovalore h dobbiamo risolvere il sistema omogeneo $(A - h\,\mathrm{Id})X = 0$. Si trova subito che ${}^t(-1,0,1)$ è una soluzione, cioè un autovettore per h. Analogamente i vettori ${}^t(1,\sqrt{2},1)$ e ${}^t(1,-\sqrt{2},1)$ sono autovettori per $h-\sqrt{2}$ e $h+\sqrt{2}$ rispettivamente. Abbiamo così calcolato le basi richieste.

2. Determinare una base degli autospazi di

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -hx - y \\ -x - hy - z \\ -y - hz \end{pmatrix} \end{array}$$

al variare di h in $\mathbb{R}$.

Soluzione. Come l'esercizio precedente.

Parte 3: Teoria.

1. Dimostrare che se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e U, W sono due suoi sottospazi allora vale la seguente formula di Grassmann

$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W).$$

Soluzione. Vista a lezione.

2. Dimostrare che se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e $f : V \longrightarrow U$ è un'applicazione lineare allora

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

Soluzione. Vista a lezione.