Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Prova scritta di Geometria e Algebra

4 marzo 2013

SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare non suriettiva. Allora

   ■ $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$

   □ $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

   □ $\dim \operatorname{Im} f = 2$

   □ $\dim \operatorname{Im} f \geq 2$

   □ $\operatorname{Ker} f = 0$

   Soluzione. L'applicazione non è suriettiva, quindi $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$. Allora dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$.

2. Se le due matrici A e B sono congruenti e $\det A = -1$ allora

   ■ $\det B < 0$

   □ $\det B > 0$

   □ $\det B = 0$

   □ $\det B = -1$

   □ $\det B = 1$

   Soluzione. Due matrici congruenti hanno determinanti dello stesso segno, quindi $\det B < 0$.

3. Supponiamo che i due piani $x + y + z - 3 = 0$ e $2x - ay + 2z + a = 0$ siano paralleli. Allora

   ■ $a = -2$

   □ $a = 2$

   □ $a = -3$

   □ $a = 3$

   □ $a = 0$

   Soluzione. Piani paralleli hanno coefficienti di giacitura multipli uno dell'altro. Quindi ${}^t(1, 1, 1)$ e ${}^t(2, -a, 2)$ sono allineati; ne ricaviamo $a = -2$.

4. Siano U, V due sottospazi vettoriali di dimensione rispettivamente 2 e 3 di $\mathbb{R}^4$. Allora

   ■ $\dim(U \cap V) \geq 1$

   □ $\dim(U \cap V) = 1$

   □ $\dim(U \cap V) \leq 1$

   □ $\dim(U \cap V) = 2$

   □ $\dim(U \cap V) = 3$

   Soluzione. Dalla formula di Grassmann abbiamo $5 = \dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U + V)$ e, usando $U + V \subseteq \mathbb{R}^4$ da cui $\dim(U + V) \leq 4$, abbiamo $\dim(U \cap V) \geq 1$.

5. Se lo spazio vettoriale V ha dimensione 7 allora

   ■ un sistema di generatori per V ha almeno 7 elementi

   □ un sistema di generatori per V ha al più 7 elementi

   □ un insieme di vettori linearmente indipendenti ha più di 7 elementi

   □ una base ha più di 7 elementi

☐ una base ha meno di 7 elementi

Soluzione. Per generare uno spazio vettoriale di dimensione 7 servono almeno 7 vettori.

Parte 2: Esercizio.

1. Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1-a)x + ay \\ -ax + (1+a)y \\ -ax + (2+a)y - z \end{pmatrix}$$

al variare del parametro a in $\mathbb{R}$. Determinare inoltre se f è semplice per $a = 0$ e $a = 1$ e calcolare una base dell'autospazio dell'autovalore 1 per questi valori di a.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ -a & 1+a & 0 \\ -a & 2+a & -1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $-(1+t)(1-t)^2$. Ne segue che gli autovalori di f sono -1, con molteplicità algebrica 1, e 1 con molteplicità algebrica 2. In particolare anche la molteplicità geometrica di -1 è 1. L'endomorfismo sarà quindi semplice se e solo se la molteplicità geometrica di 1 è 2.

Per $a = 0$ la matrice $A - t\,\mathrm{Id}$, per $t = 1$, è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1. Concludiamo che $\dim V(1) = 3 - 1 = 2$ e quindi l'endomorfismo è semplice. Inoltre le soluzioni del sistema omogeneo associato a quest'ultima matrice danno $V(1)$; così ${}^t(1,0,0)$, ${}^t(0,1,1)$ è una base per $V(1)$.

Per $a = 1$ la matrice $A - t\,\mathrm{Id}$, per $t = 1$, è

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Quindi la molteplicità geometrica di 1 è 1 e l'endomorfismo non è semplice. Inoltre ${}^t(1,1,1)$ è una base di $V(1)$ come si trova subito risolvendo il sistema omogeneo che ha la precedente matrice come matrice dei coefficienti.

Parte 3: Teoria.

1. Dimostrare che due spazi vettoriali finitamente generati U e V sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Soluzione. Vista a lezione.