Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Prova scritta di Geometria e Algebra

5 settembre 2012

SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Siano U, V sottospazi di uno spazio vettoriale W. Allora $U \cap V$ è

   ■ il più grande sottospazio di W contenuto in U e V.

   □ il più piccolo sottospazio di W contenuto in U e V.

   □ $\{0\}$.

   □ V.

   □ $U + V$.

   Soluzione. Ogni sottospazio contenuto in U e V è contenuto in $U \cap V$, quindi $U \cap V$ è il più grande sottospazio contenuto in $U \cap V$.

2. Sia A una matrice di rango 3. Allora

   ■ esiste un minore 3×3 di A con determinante non nullo.

   □ ogni minore 3×3 di A ha determinante non nullo.

   □ la matrice A ha 3 righe e 3 colonne.

   □ esiste un minore $n \times n$ con $n > 3$ con determinante non nullo.

   □ la matrice A è la matrice identità.

   Soluzione. Per definizione di rango ogni minore $n \times n$ con $n > 3$ ha determinante nullo mentre esiste un minore 3×3 con determinante non nullo.

3. Siano r, s rette parallele di $\mathbb{R}^3$. Allora

   ■ r, s sono contenute in qualche piano.

   □ r, s sono contenute in un solo piano.

   □ r, s non sono contenute in alcun piano.

   □ r, s s'intersecano.

   □ r, s sono sghembe.

   Soluzione. Essendo parallele r, s sono contenute in qualche piano, ma non è detto che tale piano sia unico in quanto le due rette potrebbero coincidere.

4. Se 0 si scrive in un unico modo come combinazione lineare di alcuni vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ allora

   ■ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

   □ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.

   □ qualche vettore tra $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è nullo.

   □ tutti i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono nulli.

   □ $n > 1$.

   Soluzione. Visto che 0 è la combinazione lineare banale di $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se essa è anche l'unica allora i vettori sono linearmente indipendenti.

5. Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo non suriettivo. Allora

   ■ La dimensione di $\operatorname{Ker} f$ è almeno 2.

   □ La dimensione di $\operatorname{Ker} f$ è 2.

   □ f è nullo.

- ☐ La dimensione dell'immagine di f è 4.
- ☐ La dimensione dell'immagine di f è 5.

Soluzione. Se f non è suriettivo allora $\dim \operatorname{Im} f \leq 3$, inoltre dalla relazione fondamentale $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 5$ e quindi $\dim \operatorname{Ker} f \geq 2$.

6. Sia λ un autovalore di $f : V \longrightarrow V$. Allora

- ■ λ^2 è un autovalore di $f \circ f$.
- ☐ $\lambda \neq 0$.
- ☐ f ha determinante λ.
- ☐ esiste un vettore $v \in V$ per cui $f(v) \neq \lambda v$.
- ☐ per ogni vettore $v \in V$ si ha $f(v) = \lambda v$.

Soluzione. Se λ è un autovalore allora esiste v non nullo per cui $f(v) = \lambda v$ e quindi $(f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v$, cioè λ^2 è un autovalore di $f \circ f$.

7. Siano u e v due vettori di norma 1 in $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare standard. Allora

- ■ $(u, v) \leq 1$.
- ☐ $(u, v) < 1$.
- ☐ $(u, v) = 0$.
- ☐ $(u, v) \geq 1$.
- ☐ $(u, v) > 1$.

Soluzione. Dalla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ha $|(u, v)| \leq |u||v| = 1$ e quindi anche $(u, v) \leq 1$.

8. Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ semidefinita positiva non definita positiva. Allora

- ■ esiste un vettore v in $\mathbb{R}^3$ di norma nulla rispetto a β.
- ☐ l'indice di negatività è positivo.
- ☐ l'indice di positività è positivo.
- ☐ gli indici sono tutti 1.
- ☐ la somma degli indici è 2.

Soluzione. Visto che β è semidefinita positiva si ha $\beta(v, v) \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Inoltre essendo β non definita positiva deve esistere qualche $u \in \mathbb{R}^3$ per cui $\beta(u, u) \leq 0$. Quindi $\beta(u, u) = 0$, cioè esiste un vettore di norma nulla.

9. Siano A, B due matrici quadrate della stessa dimensione e supponiamo che B sia invertibile. Allora $\det B^{-1}AB$ è

- ■ uguale a $\det A$.
- ☐ diverso da $\det A$.
- ☐ diverso da 0.
- ☐ uguale a 0.
- ☐ uguale a $\det B^2 \cdot \det A$.

Soluzione. Le matrici A e $B^{-1}AB$ sono simili, esse hanno quindi lo stesso determinante.

10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo semplice e iniettivo. Allora

- ■ il prodotto degli autovalori di f è diverso da 0.
- ☐ 0 è un autovalore di f.
- ☐ gli autovalori di f sono tutti distinti.
- ☐ il determinante di f è 1.
- ☐ $f = 0$.

Soluzione. Visto che f è iniettivo, il suo nucleo è banale cioè 0 non è un autovalore di f. Allora il prodotto degli autovalori di f non è 0.

Parte 2: Esercizio.

1. Sia β la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ data da

$$\beta((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = ax_1x_2 + x_1z_2 + ay_1y_2 + y_1z_2 + z_1x_2 + z_1y_2 + az_1z_2.$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma β è definita positiva? Quando ciò accade calcolare il coseno dell'angolo tra $(1,-1,1)$ e $(-1,1,1)$ rispetto a β e provare che non dipende da a.

Soluzione. La matrice associata a β rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è quindi $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = (a-t)((a-t)^2-1)-(a-t) = (a-t)((a-t)^2-2)$ con radici $a, a+\sqrt{2}, a-\sqrt{2}$. Quindi β è definita positiva quando $a > \sqrt{2}$. In tale caso β è un prodotto scalare ed è quindi possibile calcolare il coseno dell'angolo θ rispetto a β tra i vettori $u = (1,-1,1)$ e $v = (-1,1,1)$. Abbiamo

$$\cos\theta = \beta(u,v)/|u|_\beta |v|_\beta.$$

Inoltre $\beta(u,v) = {}^t uAv = -a$, $|u|_\beta = \sqrt{\beta(u,u)} = \sqrt{{}^t uAu} = \sqrt{3a}$ e $|v|_\beta = \sqrt{\beta(v,v)} = \sqrt{{}^t vAv} = \sqrt{3a}$ e quindi $\cos\theta = -1/3$. In particolare $\cos\theta$ non dipende da a.

2. Sia β la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ data da

$$\beta((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = -ax_1x_2 + x_1z_2 - ay_1y_2 + y_1z_2 + z_1x_2 + z_1y_2 - az_1z_2.$$

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la forma β è definita positiva? Quando ciò accade calcolare il coseno dell'angolo tra $(1,-1,1)$ e $(-1,1,1)$ rispetto a β e provare che non dipende da a.

Soluzione. Analoga all'esercizio precedente.

Parte 3: Teoria.

1. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che due autovettori di f relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Soluzione. Vista a lezione.

2. Dimostrare che due matrici congruenti hanno determinanti dello stesso segno.

Soluzione. Vista a lezione.