Università del Salento

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta di Geometria e Algebra

9 settembre 2013

Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. In quanti modi si può scrivere il vettore nullo come combinazione lineare di due vettori linearmente indipendenti

   ■ un solo modo
   □ due modi
   □ nessun modo
   □ infiniti modi
   □ dipende dai vettori

   Soluzione. Se due vettori sono linearmente indipendenti il vettore nullo si ottiene solo con la combinazione lineare banale.

2. Se una matrice 4×4 ha determinante 1 allora il suo rango è

   ■ 4
   □ 3
   □ 2
   □ 1
   □ 0

   Soluzione. Se il determinante dell'intera matrice è non nullo allora il rango è massimo, cioè 4.

3. In quanti piani sono contenute due rette sghembe di $\mathbb{R}^3$?

   ■ nessuno
   □ uno
   □ due
   □ infiniti
   □ dipende dalle rette

   Soluzione. Per definizione due rette sono sghembe se non sono contenute in nessun piano.

4. Se U e V sono due sottospazi vettoriali di dimensione 4 di $\mathbb{R}^6$ allora l'intersezione $U \cap V$

   ■ ha dimensione almeno 2
   □ ha dimensione 4
   □ ha dimensione 2
   □ ha dimensione al più 2
   □ è banale

   Soluzione. Dalla formula di Grassmann si ha che la dimensione dell'intersezione è maggiore o uguale a 2 visto che $U + V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$ e quindi ha dimensione al più 6.

5. Sia β è una forma bilineare simmetrica semidefinita positiva su $\mathbb{R}^5$. Quali tra i seguenti possono essere gli indici di β?

   ■ $i_+ = 3$, $i_0 = 2$, $i_- = 0$
   □ $i_+ = 0$, $i_0 = 2$, $i_- = 3$
   □ $i_+ = 1$, $i_0 = 1$, $i_- = 1$

☐ $i_+ = 3$, $i_0 = 1$, $i_- = 1$

☐ $i_+ = 4$, $i_0 = 2$, $i_- = 0$

Soluzione. Essendo β semidefinita positiva $i_- = 0$. Inoltre la somma degli indici deve dare la dimensione dello spazio, cioè 5.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -ax - z \\ x + ay + z \\ az \end{pmatrix}.$$

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $(t-a)^2(t+a)$. Ne segue che gli autovalori di f sono $\pm a$.

Se $a = 0$ abbiamo il solo autovalore 0 di molteplicità algebrica 3. La sua molteplicità geometrica è data da 3 meno il rango della matrice $A - 0 \cdot \mathrm{Id}$, per $a = 0$, cioè della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Visto che tale matrice ha rango 2, l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica 1. Concludiamo che, per $a = 0$, l'endomorfismo non è semplice.

Sia ora $a \neq 0$. Allora abbiamo i due autovalori (distinti) a e $-a$. Il secondo di essi ha molteplicità algebrica 1, quindi anche la sua molteplicità geometrica è 1. L'endomorfismo sarà quindi semplice se e solo se la molteplicità geometrica dell'autovalore -1 sarà uguale a quella algebrica, cioè 2.

Per calcolare tale molteplicità geometrica determiniamo il rango di

$$A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2a & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $a \neq 1/2$ questa matrica ha rango 2 e quindi la molteplicità geometrica è 1 e l'endomorfismo non è semplice. Se invece $a = 1/2$ il rango è 1, la molteplicità geometrica 2 e l'endomorfismo è semplice.

In conclusione l'endomorfismo è semplice se e solo se $a = 1/2$.

Parte 3: Esercizio 2

1. Ortonormalizzare la base canonica $e_1,\ e_2,\ e_3$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + 2y_1y_2 - y_1z_2 - z_1y_2 + 2z_1z_2.$$

Soluzione. Abbiamo $|e_1|^2_\beta = \beta(e_1, e_1) = 1$ e quindi prendiamo $v_1 \doteq e_1$ come primo vettore della base ortonormalizzata.

Visto poi che $\beta(e_2, v_1) = \beta(e_2, e_1) = 0$ abbiamo

$$w_2 \doteq e_2 - \beta(e_2, v_1)v_1 = e_2,$$

inoltre $|w_2|^2_\beta = |e_2|^2_\beta = \beta(e_2, e_2) = 2$, poniamo quindi $v_2 \doteq e_2/\sqrt{2}$.

Infine poniamo

$$w_3 \doteq e_3 - \beta(e_3, v_1)v_1 - \beta(e_3, v_2)v_2.$$

Essendo $\beta(e_3, v_1) = 0$ e $\beta(e_3, v_2) = \beta(e_3, e_2/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$ otteniamo

$$w_3 = e_3 + e_2/2.$$

Da $|w_3|_\beta^2 = |e_3 + e_2/2|_\beta^2 = 3/2$ abbiamo quindi $v_3 \doteq (e_3 + e_2/2)/\sqrt{3/2}$.
In conclusione la base ortonomalizzata è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$