Università del Salento

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta di Geometria e Algebra

11 luglio 2014

Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare suriettiva allora

   - ■ $\dim \operatorname{Ker} f = 2$
   - □ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
   - □ f è iniettiva
   - □ f è bigettiva
   - □ esistono tre vettori u, v e w, linearmente indipendenti, per cui $f(u) = f(v) = f(w) = 0$

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale si ha $\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f = 4 - 2 = 2$, visto che f è suriettiva e quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

2. Se una matrice 3×3 ha determinante 2 allora il suo rango è

   - ■ 3
   - □ 2
   - □ -2
   - □ minore di 2
   - □ minore di -2

   Soluzione. Se una matrice quadrata ha determinante diverso da zero allora ha rango massimo; in questo caso 3.

3. Se r e s sono due rette sghembe di $\mathbb{R}^3$ allora

   - ■ non esiste alcun piano che contenga r e s
   - □ esistono infiniti piani che contengono r e s
   - □ esiste un solo piano che contiene r e s
   - □ in $\mathbb{R}^3$ non esistono rette sghembe
   - □ r e s sono parallele

   Soluzione. Per definizione di rette sghembe non esiste alcun piano che contenga r e s.

4. Se due vettori u e v di $\mathbb{R}^4$ hanno norma 3 per un prodotto scalare γ allora

   - ■ $|\gamma(u, v)| \leq 9$
   - □ $|\gamma(u, v)| \leq 4$
   - □ $|\gamma(u, v)| \leq 1$
   - □ $|\gamma(u, v)| \leq -1$
   - □ $|\gamma(u, v)| = 0$

   Soluzione. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha $|\gamma(u, v)| \leq |u||v| = 9$.

5. Possono le due matrici $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ essere congruenti?

   - ■ no
   - □ sì
   - □ dipende da a
   - □ solo per un valore di a

☐ solo per $a = 0$

Soluzione. Le due matrici non sono congruenti in quanto hanno determinanti di segno diverso, indipendentemente da a.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale k il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -kx + y \\ ky \\ -x + y + kz \end{pmatrix}.$$

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $(t - k)^2(t + k)$. Ne segue che gli autovalori di f sono $\pm k$.

Se $k = 0$ abbiamo il solo autovalore 0 di molteplicità algebrica 3. La sua molteplicità geometrica è data da 3 meno il rango della matrice $A - 0 \cdot \mathrm{Id}$, per $k = 0$, cioè della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Visto che tale matrice ha rango 2, l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica 1. Concludiamo che, per $k = 0$, l'endomorfismo non è semplice.

Sia ora $k \neq 0$. Allora abbiamo i due autovalori (distinti) k e $-k$. Il secondo di essi ha molteplicità algebrica 1, quindi anche la sua molteplicità geometrica è 1. L'endomorfismo sarà quindi semplice se e solo se la molteplicità geometrica dell'autovalore k sarà uguale a quella algebrica, cioè 2.

Per calcolare tale molteplicità geometrica determiniamo il rango di

$$A - k\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -2k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 1/2$ questa matrica ha rango 2 e quindi la molteplicità geometrica è 1 e l'endomorfismo non è semplice. Se invece $k = 1/2$ il rango è 1, la molteplicità geometrica 2 e l'endomorfismo è semplice.

In conclusione l'endomorfismo è semplice se e solo se $k = 1/2$.

Parte 3: Esercizio 2

1. Ortonormalizzare i vettori e_1, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + 2y_1y_2 - y_1z_2 - z_1y_2 + 2z_1z_2.$$

Soluzione. Abbiamo $|e_1|^2_\beta = \beta(e_1, e_1) = 1$ e quindi prendiamo $v_1 \doteq e_1$ come primo vettore della base ortonormalizzata.

Visto poi che $\beta(e_1 + e_2, v_1) = 1$ abbiamo

$$w_2 \doteq e_1 + e_2 - \beta(e_1 + e_2, v_1)v_1 = e_1 + e_2 - e_1 = e_2,$$

inoltre $|w_2|^2_\beta = |e_2|^2_\beta = \beta(e_2, e_2) = 2$, poniamo quindi $v_2 \doteq e_2/\sqrt{2}$.

Infine poniamo

$$w_3 \doteq e_1 + e_2 + e_3 - \beta(e_1 + e_2 + e_3, v_1)v_1 - \beta(e_1 + e_2 + e_3, v_2)v_2.$$

Essendo $\beta(e_1+e_2+e_3,v_1)=1$ e $\beta(e_1+e_2+e_3,v_2)=\beta(e_1+e_2+e_3,e_2/\sqrt{2})=1/\sqrt{2}$ otteniamo

$$w_3 = e_1+e_2+e_3-e_1-e_2/2 = e_2/2+e_3.$$

Da $|w_3|^2_\beta = |e_2/2+e_3|^2_\beta = 3/2$ abbiamo quindi $v_3 \doteq (e_2/2+e_3)/\sqrt{3/2}$.
In conclusione la base ortonomalizzata è

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$