Università del Salento
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Prova scritta di Geometria e Algebra

12 febbraio 2013
SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia $f : U \longrightarrow V$ un'applicazione lineare iniettiva, allora

   ■ $\dim U \leq \dim V$
   □ $\dim U > \dim V$
   □ $\dim U = \dim V$
   □ $\dim U < \dim V$
   □ $\dim U \geq \dim V$

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$ in quanto $\operatorname{Ker} f = 0$ essendo f iniettiva.

2. Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ ha autovalori $1, -1$ e $1 + a$ allora

   ■ è semplice per $a \neq 0$ e $a \neq -2$
   □ è semplice solo per $a \neq 0$ e $a \neq -2$
   □ è semplice per ogni valore di a
   □ è semplice per $a \neq 1$ e $a \neq -1$
   □ è semplice solo per $a \neq 1$ e $a \neq -1$

   Soluzione. Se $a \neq 0$ e $a \neq -2$, l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ ha tre autovalori distinti, esso è quindi semplice. Ma nulla si può dire per $a = 0$ e $a = -2$.

3. Se un piano π è tangente ad una sfera S di centro O nel punto P allora il raggio OP è

   ■ perpendicolare a π
   □ contenuto in π
   □ parallelo a π
   □ non interseca π
   □ interseca π in O

   Soluzione. Un piano tangente è sempre perpendicolare al raggio nel punto di tangenza.

4. Se β è una forma bilineare simmetrica su V, $u, v \in V$ e $|u|^2_\beta = 2$, $|v|^2_\beta = 3$ e $|u + v|^2_\beta = 9$ allora

   ■ $\beta(u, v) = 2$
   □ $\beta(u, v) = 3$
   □ $\beta(u, v) = 1$
   □ $\beta(u, v) = 0$
   □ $\beta(u, v) = -1$

   Soluzione. Abbiamo $\beta(u, v) = (|u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2)/2 = (9 - 2 - 3)/2 = 2$.

5. Se A è una matrice quadrata e $A^2 = 0$ allora l'inversa di $\operatorname{Id} + A$ è

   ■ $\operatorname{Id} - A$
   □ $\operatorname{Id} + A$
   □ A
   □ $-A$
   □ Id

Soluzione. Si ha $(\mathrm{Id}+A)(\mathrm{Id}-A) = \mathrm{Id}-A^2 = \mathrm{Id}$ e quindi $\mathrm{Id}-A$ è l'inversa di $\mathrm{Id}+A$.

Parte 2: Esercizio.

1. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ ax+y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è semplice? Trovare una base dell'autospazio di 1 quando $a = 0$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $p(t) = \det(A - t\,\mathrm{Id}) = (1-t)((1-t)^2 - a)$. Se $a < 0$, $p(t)$ non ha tutte le radici reali e quindi f non è semplice. Se invece $a \geq 0$, le radici di $p(t)$ sono $1, 1+\sqrt{a}, 1-\sqrt{a}$. Quindi se $a > 0$ le radici sono tutte distinte ed f è, di conseguenza, semplice. Nel caso $a = 0$ abbiamo invece il solo autovalore 1 di molteplicità algebrica 3, dobbiamo quindi calcolarne la molteplicità geometrica.

L'autospazio di 1 è $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$; si tratta quindi di risolvere il sistema omogeneo associato a $A-t\,\mathrm{Id}$ quando $a = 0$ e $t = 1$. Otteniamo la sola equazione $y = 0$. Quindi l'autospazio ha dimensione 2: l'endomorfismo non è semplice per $a = 0$. Inoltre una base per tale autospazio è data, ad esempio, da $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Parte 3: Teoria.

1. Dimostrare che se U e V sono sottospazi dello spazio vettoriale W allora

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

Soluzione. Vista a lezione.

2. Siano U e V spazi vettoriali e sia $f : U \longrightarrow V$ un'applicazione lineare. Dimostrare che

$$\dim U = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f.$$

Soluzione. Vista a lezione.