Università del Salento
Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
Prova scritta di Geometria e Algebra
13 gennaio 2014
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia γ una forma bilineare simmetrica semidefinita positiva su $\mathbb{R}^4$; quale delle seguenti può essere la segnatura di γ?

   - ■ $i_+ = 4$, $i_0 = 0$, $i_- = 0$
   - □ $i_+ = 3$, $i_0 = 0$, $i_- = 0$
   - □ $i_+ = 3$, $i_0 = 0$, $i_- = 1$
   - □ $i_+ = 4$, $i_0 = 1$, $i_- = 0$
   - □ $i_+ = 0$, $i_0 = 3$, $i_- = 1$

   Soluzione. Essendo γ semidefinita positiva abbiamo $i_- = 0$, inoltre $i_+ + i_0 + i_- = 4$. L'unica possibilita tra quelle proposte è quindi $i_+ = 4$, $i_0 = 0$, $i_- = 0$.

2. Se A e B sono due matrici simili quadrate 5×5 e A ha rango 3 allora

   - ■ B ha rango 3
   - □ B ha rango almeno 3
   - □ B ha rango al più 3
   - □ B ha rango 5
   - □ B è invertibile

   Soluzione. Matrici simili hanno lo stesso rango, quindi B ha rango 3.

3. Se $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare suriettiva allora

   - ■ $\dim \ker f = 2$
   - □ f è anche iniettiva
   - □ f è bigettiva
   - □ $\ker f = 0$
   - □ $\dim \operatorname{Im} f = 1$

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \ker f = 2$ in quanto $\dim \operatorname{Im} f = 3$ essendo f suriettiva.

4. Per quali valori del parametro reale α la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile?

   - ■ per ogni α
   - □ solo per $\alpha = 1$
   - □ solo per $\alpha = -1$
   - □ per nessun α
   - □ per $\alpha \neq \pm 1$

   Soluzione. Il determinante della matrice è $1 + \alpha^2$ e quindi la matrice è invertibile per ogni valore reale di α.

5. Se U e V sono due sottospazi di dimensione 3 e 4 in $\mathbb{R}^5$ allora

   - ■ $\dim U \cap V \geq 2$
   - □ $\dim U \cap V \leq 2$
   - □ $\dim U \cap V = 2$

- ☐ $\dim U \cap V = 3$
- ☐ $\dim U \cap V = 4$

Soluzione. Visto che $U + V \subseteq \mathbb{R}^5$ abbiamo $\dim(U+V) \leq 5$ e quindi, usando la formula di Grassmann, troviamo $\dim U \cap V \geq 2$.

6. Per quali valori di h i due piani $x + hy + z = 0$ e $hx - 2y + z = 1$ di $\mathbb{R}^3$ sono perpendicolari?

- ■ $h = 1$
- ☐ $h = 0$
- ☐ $h = -1$
- ☐ $h = 2$
- ☐ $h = -2$

Soluzione. Piani perpendicolari hanno coefficienti di giacitura perpendicolari; cioè $(1, h, 1) \cdot (h, -2, 1) = 0$ da cui $h = 1$.

7. Se la matrice 7×7 A ha rango 3, quante sono le soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$?

- ■ ∞^4
- ☐ ∞^5
- ☐ ∞^6
- ☐ ∞^7
- ☐ una soltanto

Soluzione. Dal teorema di Rouchè–Capelli abbiamo che il sistema ha $\infty^{7-\operatorname{rk} A} = \infty^4$ soluzioni.

8. Siano u, v, w tre vettori linearmente indipendenti, allora

- ■ $u + v + w \neq u - v + w$
- ☐ $u + v + w = u - v + w$
- ☐ $u + v + w = 0$
- ☐ $u + v = 0$
- ☐ $u = 0$

Soluzione. $u + v + w \neq u - v + w$ è equivalente a $v \neq 0$ e ciò è vero visto che u, v, w sono linearmente indipendenti e quindi, in particolare, la combinazione lineare non banale $v = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$ non può essere 0.

9. Quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}_3[t]$ non è un sottospazio vettoriale?

- ■ l'insieme dei polinomi di grado 3
- ☐ l'insieme dei polinomi di grado al più 3
- ☐ l'insieme dei polinomi di grado al più 2
- ☐ l'insieme dei polinomi di grado al più 1
- ☐ l'insieme formato dal solo polinomio nullo.

Soluzione. Non è detto che la somma di due polinomi di grado 3 sia ancora un polinomio di grado 3. Quindi l'insieme dei polinomi di grado 3 non è un sottospazio vettoriale in quanto non è chiuso per somma.

10. Siano r e s due rette di $\mathbb{R}^3$ che si intersecano in (almeno) un punto, allora

- ■ r e s non sono sghembe
- ☐ r e s coincidono
- ☐ r e s sono parallele
- ☐ r e s sono perpendicolari
- ☐ r e s non hanno alcun punto in comune

Soluzione. Due rette sghembe non si intersecano, quindi r e s non possono essere sghembe in quanto hanno almeno un punto in comune.

Parte 2: Esercizio 1

1. Per quali valori del parametro reale β il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ è semplice?

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+t \\ 2y \\ y+\beta z \\ \beta t \end{pmatrix}$$

Per tutti quei valori di β per cui f è semplice calcolare la forma diagonale di f. Trovare inoltre una base per l'autospazio dell'autovalore 2 per $\beta = 0$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^4$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $\det(A - s\,\mathrm{Id}) = (1-s)(2-s)(\beta-s)^2$. L'autovalore β ha molteplicità algebrica maggiore o uguale a 2; dobbiamo quindi calcolare la sua molteplicità geometrica. Tale molteplicità è la dimensione dell'autospazio V_β associato. Visto che V_β è il nucleo dell'applicazione lineare $f - \beta\,\mathrm{Id}$, dobbiamo trovare la dimensione delle soluzione del sistema $(A - \beta\,\mathrm{Id})X = 0$. Abbiamo

$$A - \beta\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1-\beta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portando questa matrice a scala troviamo che essa ha rango 2 per qualsiasi valore di β. Quindi se $\beta \neq 1, 2$ abbiamo gli autovalori $1, 2, \beta$ e tutte le molteplicità geometriche coincidono con quelle algebriche, f è quindi semplice.

Invece per $\beta = 1$ o $\beta = 2$, l'autovalore β ha molteplicità algebrica 3 e geometrica 2 (per quanto visto sopra); f non è quindi semplice.

La forma diagonale di f per $\beta \neq 1, 2$ è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Infine, per trovare una base dell'autospazio di 2 per $\beta = 0$ dobbiamo risolvere il sistema $(A_{|\beta=0} - 2\,\mathrm{Id})X = 0$. Abbiamo

$$A_{|\beta=0} - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema, troviamo le soluzioni $(0, 2k, k, 0)$ e quindi possiamo prendere il vettore $(0, 2, 1, 0)$ come base di V_2.

2. Per quali valori del parametro reale β il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ è semplice?

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+t \\ 2y \\ y-\beta z \\ -\beta t \end{pmatrix}$$

Per tutti quei valori di β per cui f è semplice calcolare la forma diagonale di f. Trovare inoltre una base per l'autospazio dell'autovalore 2 per $\beta = 0$.

Soluzione. Analoga alla precedente.

Parte 3: Esercizio 2

1. Ortonormalizzare i vettori
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

   Soluzione. Usando l'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt troviamo i vettori
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Ortonormalizzare i vettori
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

   Soluzione. Analoga alla precedente.