Università del Salento
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Prova scritta di Geometria e Algebra

16 gennaio 2013
SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V sono linearmente indipendenti, allora

   ■ $\dim V \geq n$
   □ $\dim V = n$
   □ $\dim V \leq n$
   □ $\dim V < n$
   □ $\dim V > n$

   Soluzione. La dimensione è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti, quindi se abbiamo n vettori linearmente indipendenti la dimensione di V sarà almeno n. Cioè $\dim V \geq n$.

2. Se A e B sono due matrici simili allora

   ■ $\det A = \det B$
   □ $A \cdot B = \mathrm{Id}$
   □ $A \cdot B^{-1} = \mathrm{Id}$
   □ $\det A = \det B^{-1}$
   □ $B \cdot A \cdot B^{-1} = A$.

   Soluzione. Matrici simili hanno lo stesso determinante.

3. Se $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare iniettiva allora

   ■ $n \geq 3$
   □ $n = 3$
   □ $n \leq 3$
   □ $n < 3$
   □ una tale f non esiste.

   Soluzione. L'applicazione lineare f è iniettiva, essa ha quindi nucleo banale. La relazione fondamentale diventa $\dim \mathrm{Im} f = 3$. Ma $\mathrm{Im} f \subseteq \mathbb{R}^n$ e quindi $n \geq 3$.

4. Se $f : U \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow W$ sono applicazioni lineari e $g \circ f$ è suriettiva allora

   ■ g è suriettiva
   □ f è suriettiva
   □ g e f sono suriettive
   □ g è iniettiva
   □ f è iniettiva

   Soluzione. Da $g \circ f$ suriettiva abbiamo $W = \mathrm{Im}(g \circ f) = g(f(U)) \subseteq g(V)$ e quindi anche $g(V) = W$, cioè g è suriettiva.

5. Se u e v sono vettori di $\mathbb{R}^3$ di norma a rispetto al prodotto scalare standard allora

   ■ $|u + v| \leq 2a$
   □ $|u + v| \geq 2a$
   □ $|u + v| = 2a$
   □ $|u + v| = |u| + |v|$

☐ $|u+v| = 0$

Soluzione. Dalla disuguaglianza di Minkowski abbiamo $|u+v| \leq |u| + |v| = 2a$.

Parte 2: Esercizio.

1. Provare che la seguente forma bilineare

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2 - y_1z_2 - z_1y_2 + 2z_1z_2$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e ortonormalizzare e_1, e_2, e_3 rispetto a β.

Soluzione. La matrice associata ad β nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = (2-t)((2-t)^2 - 2) = (2-t)(2+\sqrt{2}-t)(2-\sqrt{2}-t)$. Gli autovalori, cioè le radici di questo polinomio, sono quindi 2, $2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$. Essendo essi tutti positivi, β è un prodotto scalare visto anche che A è una matrice simmetrica.

Per ortonormalizzare e_1, e_2, e_3 usiamo il processo di Gram-Schmidt. Nel primo passo definiamo $v_1 = w_1 = e_1/|e_1|_\beta$ e, visto che $|e_1|_\beta^2 = \beta(e_1, e_1) = 2$, abbiamo $v_1 = w_1 = 1/\sqrt{2}(1,0,0)$.

Nel secondo passo abbiamo $w_2 = e_2 - \beta(e_2, v_1)v_1$. Calcoliamo prima $\beta(e_2, v_1) = -1/\sqrt{2}$ e quindi $w_2 = (1/2, 1, 0)$. Allora poniamo $v_2 = w_2/|w_2|_\beta$ e, visto che $|w_2|_\beta^2 = \beta((1/2,1,0),(1/2,1,0)) = 3/2$, otteniamo $v_2 = \sqrt{2/3}(1/2,1,0)$.

Infine al terzo passo abbiamo $w_3 = e_3 - \beta(e_3, v_1)v_1 - \beta(e_3, v_2)v_2$. Visto che $\beta(e_3, v_1) = 0$ e $\beta(e_3, v_2) = -\sqrt{2/3}$, otteniamo $w_3 = (1/3, 2/3, 1)$. Infine da $\beta(w_3, w_3) = 4/3$ abbiamo $v_3 = \sqrt{3}/2(1/3, 2/3, 1)$.

Concludiamo che normalizzando e_1, e_2, e_3 otteniamo i vettori

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parte 3: Teoria.

1. Dimostrare che se V è uno spazio vettoriale con prodotto scalare β allora per ogni coppia di vettori $u, v \in V$ si ha $|\beta(u,v)| \leq |u|_\beta |v|_\beta$.

Soluzione. Vista a lezione.