Università del Salento

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta di Geometria e Algebra

16 giugno 2014

Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ha due autovalori distinti allora

   ■ f è diagonalizzabile

   □ f non è diagonalizzabile

   □ f è sicuramente l'applicazione nulla

   □ ogni autovalore ha molteplicità algebrica 2

   □ ogni autovalore ha molteplicità geometrica 2

   Soluzione. Se un'applicazione lineare ha tanti autovalori distinti quanta è la dimensione dello spazio vettoriale su cui è definita allora è diagonalizzabile.

2. Siano A e B due matrici 3×3 per cui $AB = -I$ allora

   ■ $-B$ è l'inversa di A

   □ il determinante di A è -1

   □ il determinante di B è -1

   □ B è l'inversa di A

   □ A e B non sono invertibili

   Soluzione. Abbiamo $A \cdot (-B) = -AB = -(-I) = I$ e quindi $-B$ è l'inversa di A.

3. Siano U, $V \subset \mathbb{R}^5$ due sottospazi vettoriali di dimensione 3. Se $U + V = V$ allora

   ■ $U = V$

   □ $U \cap V = 0$

   □ $U = V = \mathbb{R}^5$

   □ $U = V = 0$

   □ $U + V = \mathbb{R}^5$

   Soluzione. Se $U + V = V$ allora $U \subseteq V$ ma allora, avendo U e V la stessa dimensione, $U = V$.

4. Se $u, v, w \in V$ sono linearmente indipendenti allora

   ■ $\dim V \geq 3$

   □ $\dim V = 3$

   □ $\dim V > 3$

   □ $\dim V < 3$

   □ $\dim V \leq 3$

   Soluzione. La dimensione è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti, quindi $\dim V \geq 3$ visto che u, v, w sono vettori linearmente indipendenti di V.

5. Se la forma bilineare simmmetrica β ha segnatura $(1, 1, 1)$ allora è

   ■ indefinita

   □ definita positiva

   □ semidefinita positiva

   □ definita negativa

☐ semidefinita negativa

Soluzione. Per definizione β è indefinita.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + ay \\ y \\ ax + (1-a)z \end{pmatrix}$$

Determinare, inoltre, una base dell'autospazio dell'autovalore $1 - a$ al variare di a in $\mathbb{R}$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $(1-t)^2(1-a-t)$. Ne segue che gli autovalori di f sono 1 e $1-a$.

Se $a = 0$ allora l'endomorfismo è la mappa identità che è diagonale (e ovviamente semplice).

Sia ora $a \neq 0$. Allora l'autovalore $1 - a$ ha molteplicità algebrica 1; esso ha quindi anche molteplicità geometrica 1. Invece l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2. L'endomorfismo f sarà quindi semplice se e solo se 1 ha molteplicità geometrica 2.

Per calcolare tale molteplicità determiniamo il rango della matrice

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Visto che $A - \mathrm{Id}$ ha rango 2 per ogni valore di $a \neq 0$, concludiamo che la molteplicità geometrica di 1 è 1 per ogni $a \neq 0$ e che, quindi, l'endomorfismo non è mai semplice per questi valori.

In conclusione l'endomorfismo è semplice se e solo se $a = 0$.

Per trovare una base dell'autospazio di $1-a$ dobbiamo risolvere il sistema $(A-(1-a)\,\mathrm{Id})X = 0$. Otteniamo che possiamo prendere come base: e_3 se $a \neq 0$ e e_1, e_2, e_3 per $a = 0$.

Parte 3: Esercizio 2

1. Determinare la segnatura della forma bilineare simmetrica

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + ax_1z_2 + y_1y_2 + az_1x_2 + z_1z_2.$$

E determinare, in particolare, per quali valori di a essa risulti semidefinita positiva ma non definita positiva.

Soluzione. La matrice associata a β rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e ha polinomio caratteristico $(1-t)(1-t-a)(1-t+a)$. Gli autovalori risultano quindi essere 1, $1+a$ e $1-a$. Studiando il segno di tali autovalori abbiamo che la segnatura di β è:

- $(2, 0, 1)$ per $a < -1$
- $(2, 1, 0)$ per $a = -1$
- $(3, 0, 0)$ per $-1 < a < 1$
- $(2, 1, 0)$ per $a = 1$ e
- $(2, 0, 1)$ per $a > 1$.

In particolare β è semidefinita positiva ma non definita positiva per $a = \pm 1$.