Università del Salento
Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Prova scritta di Geometria e Algebra

16 luglio 2012
SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ con $\dim \operatorname{Im} f = 3$. Allora

   ■ Esiste $v \in \mathbb{R}^4$, $v \neq 0$ con $f(v) = 0$.
   □ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
   □ f è suriettiva.
   □ $\dim \operatorname{Ker} f = 3$.
   □ $f(v) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

   Soluzione. Visto che $\dim \operatorname{Im} f = 3$, f non è suriettiva e quindi, essendo un endomorfismo, non è neanche iniettiva. Cioè $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, esisterà quindi un vettore $v \neq 0$ con $f(v) = 0$.

2. Sia β una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ con indici $i_+ = 2$, $i_0 = 0$, $i_- = 2$ e sia A la sua matrice associata rispetto ad una base di $\mathbb{R}^4$. Possiamo dedurre che

   ■ $\det A > 0$.
   □ $\det A = 0$.
   □ $\det A < 0$.
   □ $\det A = 1$.
   □ $\det A = -1$.

   Soluzione. Essendo β simmetrica reale, esiste una base rispetto a cui la matrice associata a β è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

   In particolare $\det B = 1$. Ma allora $\det A > 0$ visto che il segno del determinante di una matrice associata a β è invariante per cambio di base.

3. Siano $u_1, u_2, \ldots, u_r$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$. Allora

   ■ $r \leq 3$.
   □ $r = 3$.
   □ $r \geq 3$.
   □ $r \leq 2$.
   □ $r \geq 2$.

   Soluzione. Visto che $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e che la dimensione è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti abbiamo $r \leq 3$.

4. Se A e B sono due matrici quadrate $n \times n$ allora

   ■ $\det(AB) = \det(BA)$.
   □ $\det(A + B) = \det A + \det B$.
   □ $\det A = \det B$.
   □ $AB = BA$.
   □ Il prodotto AB non ha senso.

Soluzione. Essendo A e B quadrate dello stesso ordine ha senso sia AB che BA. Inoltre per il teorema di Binet $\det(AB) = \det A \det B = \det B \det A = \det(BA)$.

5. Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ due vettori ortogonali per il prodotto scalare standard. Allora $|u+v|^2$ vale

■ $|u|^2 + |v|^2$.
□ $|u|^2|v|^2$.
□ $|u|^2 - |v|^2$.
□ $|u|^2/|v|^2$.
□ $||u| - |v||$.

Soluzione. Abbiamo $|u+v|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) = |u|^2 + |v|^2$.

6. Sia V un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[t]$ dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nell'indeterminata t. Allora $\dim V$ è

■ Minore o uguale a 4.
□ Uguale a 4.
□ Minore o uguale a 3.
□ Uguale a 3.
□ Minore o uguale a 2.

Soluzione. $\mathbb{R}_3[t]$ ha dimensione 4, quindi ogni suo sottospazio ha dimensione minore o uguale a 4.

7. Siano U, V due sottospazi di dimensione 2 di $\mathbb{R}^5$. Allora vale

■ $U + V \neq \mathbb{R}^5$.
□ $\dim(U+V) = 5$.
□ $U \cap V = \{0\}$.
□ $U = V$.
□ $U + V = \mathbb{R}^5$.

Soluzione. Dalla formula di Grassmann si ha $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \leq \dim U + \dim V = 4$. Quindi $U + V \neq \mathbb{R}^5$, visto che $\dim \mathbb{R}^5 = 5$.

8. Sian π un piano di $\mathbb{R}^3$ e siano r, s due rette con $r \subset \pi$ e $r \cap s \neq \varnothing$.

■ r e s non sono sghembe.
□ $s \subset \pi$.
□ s è perpendicolare π.
□ r e s sono perpendicolari.
□ r è perpendicolare ad π.

Soluzione. Visto che r e s si intersecano esse non possono essere sghembe.

9. Siano u, v vettori di $\mathbb{R}^7$. Allora

■ $\mathcal{L}(u, v, u+v) = \mathcal{L}(u, v)$.
□ $\mathcal{L}(u, v, u+v)$ contiene $\mathcal{L}(u, v)$ ma è diverso da $\mathcal{L}(u, v)$.
□ $\mathcal{L}(u, v, u+v)$ è contenuto in $\mathcal{L}(u, v)$ ma è diverso da $\mathcal{L}(u, v)$.
□ $u - v \notin \mathcal{L}(u, v)$.
□ $0 \notin \mathcal{L}(u, v)$.

Soluzione. E' chiaro che ogni combinazione lineare di u, v è anche una combinazione lineare di $u, v, u+v$, cioè $\mathcal{L}(u, v) \subset \mathcal{L}(u, v, u+v)$. Ma $u+v$ è una combinazione lineare di u e v, quindi vale anche $\mathcal{L}(u, v, u+v) \subset \mathcal{L}(u, v)$. In conclusione $\mathcal{L}(u, v, u+v) = \mathcal{L}(u, v)$.

10. Sia λ un autovalore di un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$. Allora

■ La molteplicità algebrica e geometrica di λ sono positive.

□ $\lambda \neq 0$.

□ 2λ non è un autovalore di f.

□ $\lambda^3 = 1$.

□ Anche 2λ è un autovalore di f.

Soluzione. Se λ è un autovalore esso è una radice del polinomio caratteristico, quindi la sua molteplicità algebrica non è zero. Inoltre l'autospazio di λ non può essere $\{0\}$, quindi anche la sua molteplicità geometrica è positiva.

Parte 2: Esercizio.

1. Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la seguente forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = hx_1x_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + hy_1y_2 + hz_1z_2$$

è un prodotto scalare. Inoltre ortonormalizzare la base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ rispetto a β quando $h = 4$.

Soluzione. La matrice associata a β rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} h & 2 & 0 \\ 2 & h & 0 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è quindi $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = ((h-t)^2 - 4)(h-t) = (h-t-2)(h-t+2)(h-t)$ con radici $h-2, h+2, h$. Sappiamo che β è un prodotto scalare se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi, abbiamo quindi $h+2, h-2, h > 0$. Concludiamo che β è un prodotto scalare se e solo se $h > 2$.

Poniamo ora $h = 4$, siano $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$ e usiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per ortonormalizzare la base u_1, u_2, u_3.

Visto che $|u_1|^2_\beta = \beta(u_1, u_1) = 4$, poniamo quindi $v_1 = u_1/2 = (1/2, 0, 0)$.

Sia ora $w_2 = u_2 - \beta(u_2, v_1)v_1 = (0, 1, 0) - \beta((0, 1, 0), (1/2, 0, 0))(1/2, 0, 0) = (-1/2, 1, 0)$. Visto che $|w_2|^2_\beta = \beta(w_2, w_2) = 3$, poniamo $v_2 = w_2/|w_2|_\beta = (-1/2, 1, 0)/\sqrt{3}$.

Infine sia $w_3 = u_3 - \beta(u_3, v_1)v_1 - \beta(u_3, v_2)v_2 = u_3 = (0, 0, 1)$. Visto che $|w_3|^2_\beta = \beta(w_3, w_3) = 4$, poniamo $v_3 = w_3/2 = (0, 0, 1/2)$.

2. Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la seguente forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = -hx_1x_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 - hy_1y_2 - hz_1z_2$$

è un prodotto scalare. Inoltre ortonormalizzare la base $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ rispetto a β quando $h = -4$.

Soluzione. La matrice associata a β rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -h & 2 & 0 \\ 2 & -h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è quindi $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = ((-h-t)^2 - 4)(-h-t) = (-h-t-2)(-h-t+2)(-h-t)$ con radici $-h-2, -h+2, -h$. Sappiamo che β è un prodotto scalare se e solo se tutti i suoi autovalori sono positivi, abbiamo quindi $-h+2, -h-2, -h > 0$. Concludiamo che β è un prodotto scalare se e solo se $h < -2$.

Poniamo ora $h = -4$, siano $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$ e usiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per ortonormalizzare la base u_1, u_2, u_3.

Visto che $|u_1|^2_\beta = \beta(u_1, u_1) = 4$, poniamo quindi $v_1 = u_1/2 = (1/2, 0, 0)$.

Sia ora $w_2 = u_2 - \beta(u_2, v_1)v_1 = (0, 1, 0) - \beta((0, 1, 0), (1/2, 0, 0))(1/2, 0, 0) = (-1/2, 1, 0)$. Visto che $|w_2|^2_\beta = \beta(w_2, w_2) = 3$, poniamo $v_2 = w_2/|w_2|_\beta = (-1/2, 1, 0)/\sqrt{3}$.

Infine sia $w_3 = u_3 - \beta(u_3, v_1)v_1 - \beta(u_3, v_2)v_2 = u_3 = (0, 0, 1)$. Visto che $|w_3|^2_\beta = \beta(w_3, w_3) = 4$, poniamo $v_3 = w_3/2 = (0, 0, 1/2)$.

Parte 3: Teoria.

1. Sia V uno spazio euclideo con prodotto scalare β. Provare che per ogni $u, v \in V$ si ha $|\beta(u, v)| \leq |u|_\beta |v|_\beta$.

   Soluzione. Vista a lezione.

2. Dimostrare che due spazi vettoriali U e V di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

   Soluzione. Vista a lezione.