Università del Salento

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta di Geometria e Algebra

17 febbraio 2014

Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Quali tra le seguenti triple di vettori può essere il risultato dell'ortonormalizzazione di una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare standard?

   ■ $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,-1)$.

   □ $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$.

   □ $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,1)$.

   □ $(1,1,1)$, $(0,1,-1)$, $(1,-1,0)$.

   □ $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(0,0,1)$.

   Soluzione. Solo la tripla di vettori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,-1)$ è formata da vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare standard.

2. Se $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ è iniettiva allora $\dim \operatorname{Im} f$ vale

   ■ 4

   □ 3

   □ 7

   □ 0

   □ 1

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale si ha subito $\dim \operatorname{Im} f = 4$.

3. Se la matrice quadrata A ha determinante -1 allora il determinante di A^{-1} è

   ■ -1

   □ 1

   □ 0

   □ 2

   □ -2

   Soluzione. Si ha $\det A^{-1} = 1/\det A = -1$.

4. Sapendo che la forma bilineare simmetrica β su $\mathbb{R}^n$ non è un prodotto scalare, quale può essere la sua segnatura?

   ■ $i_+ = n-1$, $i_0 = 0$, $i_- = 1$

   □ $i_+ = n$, $i_0 = 0$, $i_- = 0$

   □ $i_+ = n-3$, $i_0 = 1$, $i_- = 1$

   □ $i_+ = 1$, $i_0 = 1$, $i_- = 1$

   □ $i_+ = 3$, $i_0 = 0$, $i_- = 0$

   Soluzione. La forma β non è definita positiva, quindi $i_0 > 0$ o $i_- > 0$, e deve valere $i_+ + i_0 + i_- = n$. L'unica possibilità è $i_+ = n-1$, $i_0 = 0$, $i_- = 1$.

5. Se $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $\det A = -1$ allora A^{-1} è

   ■ $\left(\begin{smallmatrix} -d & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$

   □ $\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$

   □ $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$

☐ $\begin{pmatrix} -a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Soluzione. La formula per l'inversa di una matrice 2×2 fornisce subito il risultato $\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax + y - z \\ 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix}$$

Determinare inoltre una base degli autospazi di f per $a = 1$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $(a - t)(1 - t)(3 - t)$. Ne segue che gli autovalori di f sono a, 1 e 3. Quindi se $a \neq 1, 3$ l'endomorfismo ha tre autovalori distinti ed è quindi semplice.

Se invece $a = 1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 3 ha molteplicità algebrica 1. Per decidere se l'endomorfismo è semplice dobbiamo calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 quando $a = 1$. Calcolando il rango di $A_{|a=1} - \mathrm{Id}$ troviamo 1; la molteplicità geometrica di 1 è quindi $3 - 1 = 2$ e l'endomorfismo è semplice anche per $a = 1$.

Per $a = 3$ la situazione è rovesciata, bisogna controllare la molteplicità geometrica di 3. Calcolando il rango di $A_{|a=3} - 3\,\mathrm{Id}$ troviamo questa volta 2 e l'endomorfismo non è quindi semplice.

In conclusione f è semplice se e solo se $a \neq 3$.

Per trovare le basi degli autospazi per $a = 1$ dobbiamo risolvere i sistemi $(A_{|a=1} - \mathrm{Id})X = 0$ e $(A_{|a=1} - 3\,\mathrm{Id})X = 0$. Otteniamo che possiamo prendere come basi: $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ per l'autospazio di 1 e $(-1, -1, 1)$ per l'autospazio di 3.

Parte 3: Esercizio 2

1. Sia U il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y + z + t = 0,\ x - t = 0\}.$$

   (i) Determinare una base di U.

   (ii) Trovare una base del complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^4$ rispetto al prodotto scalare standard.

   Soluzione.

   (i) Lo spazio vettoriale U è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t & = & 0 \\ x - t & = & 0 \end{cases}$$

   Risolvendolo troviamo che un vettore generico di U è

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha - \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

   dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Quindi una base di U è $u_1 \doteq {}^t(1, -2, 0, 1)$, $u_2 \doteq {}^t(0, -1, 1, 0)$.

(ii) Un vettore $v = (a, b, c, d) \in U^{\perp}$ se e solo se $(v, u_1) = (v, u_2) = 0$. Otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} a - 2b + d & = & 0 \\ -b + c & = & 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono l'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta \\ \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Quindi una possibile base per $U^{\perp}$ è ${}^t(-1, 0, 0, 1)$, ${}^t(2, 1, 1, 0)$.