Università del Salento
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA E ALGEBRA
17 settembre 2014
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ è un'applicazione lineare iniettiva allora

   ■ $\dim \operatorname{Im} f = 3$
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 5$
   □ $\dim \ker f = 3$
   □ $\dim \ker f = 5$
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 0$

   Soluzione. Essendo f iniettiva abbiamo $\dim \ker f = 0$, dalla relazione fondamentale segue subito che $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

2. Se β è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ quale tra le seguenti può essere la sua segnatura?

   ■ $(0, 0, 4)$
   □ $(1, 1, 1)$
   □ $(1, 0, -1)$
   □ $(-1, 0, 1)$
   □ $(-4, 0, 4)$

   Soluzione. La segnatura è data da tre interi non negativi con somma 4, l'unica possibilità è quindi $(0, 0, 4)$.

3. Se A e B sono due matrici simili e A è semplice allora

   ■ B è semplice
   □ B non è semplice
   □ $A = B$
   □ $A = -B$
   □ A non è semplice

   Soluzione. Matrici simili sono associate allo stesso endomorfismo in basi diverse, quindi se A è semplice lo è anche B.

4. Se $U \neq V$ sono due sottospazi di $\mathbb{R}^7$ e $\dim U = \dim V = 6$ allora

   ■ $\dim U \cap V = 5$
   □ $\dim(U + V) = 6$
   □ $\dim(U + V) = 0$
   □ $\dim U \cap V = 0$
   □ $\dim U + \dim V = 7$

   Soluzione. Visto che U e V hanno dimensione 6 e sono diversi, si ha $U + V = \mathbb{R}^7$. Allora dalla relazione fondamentale si ha subito $\dim U \cap V = 5$.

5. Se una sfera è tangente a due piani in punti diametralmente apposti allora

   ■ i piani sono paralleli
   □ i piani coincidono
   □ la sfera ha raggio nullo
   □ questa situazione è impossibile

☐ i piani sono ortogonali

Soluzione. Un piano tangente ad una sfera è perpendicolare al raggio. Allora i due piani sono perpendicolari allo stesso diametro, quindi sono paralleli tra loro.

Parte 2: Esercizio 1

1. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ ax + y \\ -ay + z \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di a l'endomorfismo è suriettivo?

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $(1-t)^3$. Ne segue che l'unico autovalore di f è 1 con molteplicità algebrica 3.

L'endomorfismo f è semplice se e solo se 1 ha molteplicità geometrica 3. Per calcolare tale molteplicità calcoliamo il rango di $A - \mathrm{Id}$. Con ovvi calcoli abbiamo che il rango cercato è 2 per ogni valore di a diverso da 0 mentre è 0 per $a = 0$. Quindi la molteplicità geometrica di 1 è 1 se $a \neq 0$ mentre è 3 per $a = 0$. Concludiamo che l'endomorfismo è semplice se e solo se $a = 0$.

La mappa f è suriettiva se e solo se è iniettiva visto che è un endomorfismo. Ma allora f è sempre suriettiva in quanto 0 non è mai un autovalore.

Parte 3: Esercizio 2

1. Determinare la segnatura della forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = ax_1x_2 - ax_1z_2 - az_1x_2 + az_1z_2 + y_1y_2$$

al variare di a in $\mathbb{R}$.

Soluzione. La matrice associata a β nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $-t(2a-t)(1-t)$. Gli autovalori di A sono qundi $0, 2a, 1$. Concludiamo che la segnatura di β è $(2, 1, 0)$ se $a > 0$, $(1, 2, 0)$ se $a = 0$ e $(1, 1, 1)$ se $a < 0$.