Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta di Geometria e Algebra

18 febbraio 2013

SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Possono le due matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ essere associate ad uno stesso endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ in due basi diverse?

   ■ no
   □ dipende dall'endomorfismo
   □ sì
   □ su $\mathbb{R}$ no, su $\mathbb{C}$ sì
   □ su $\mathbb{Q}$ no, su $\mathbb{R}$ sì

   Soluzione. Matrici associate ad uno stesso endomorfismo in basi diverse hanno tutte lo stesso determinante. Le due matrici, invece, hanno determinante 1 e 0 e quindi non possono essere associate ad uno stesso endomorfismo.

2. Se $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ è un'applicazione lineare suriettiva allora

   ■ $\dim \operatorname{Ker} f = 1$
   □ f è anche iniettiva
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 5$
   □ $\dim \operatorname{Ker} f = 0$
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 1$

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ in quanto, essendo f suriettiva, $\dim \operatorname{Im} f = 4$.

3. Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ due sottospazi di dimensione 3, allora

   ■ $\dim U \cap V \geq 2$
   □ $\dim U \cap V = 2$
   □ $\dim U \cap V = 3$
   □ $\dim U \cap V \geq 3$
   □ $\dim U \cap V = 0$

   Soluzione. Basta usare la formula di Grassmann e $\dim(U + V) \leq 4$ in quanto $U + V \subseteq \mathbb{R}^4$.

4. Se A e B sono matrici congruenti e $\det A = 7$, quale tra i seguenti può essere $\det B$?

   ■ $1/7$
   □ 0
   □ -7
   □ $-1/7$
   □ -1

   Soluzione. Matrici congruenti hanno determinanti dello stesso segno.

5. Se A è una matrice quadrata e $A^3 = 0$, allora l'inversa di $\operatorname{Id} - A$ è

   ■ $\operatorname{Id} + A + A^2$
   □ $\operatorname{Id} - A + A^2$
   □ $-A^3$

- ☐ Id
- ☐ A^3

Soluzione. Abbiamo $(\mathrm{Id} - A)(\mathrm{Id} + A + A^2) = \mathrm{Id} + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = \mathrm{Id} - A^3 = \mathrm{Id}$ e quindi l'inversa cercata è $\mathrm{Id} + A + A^2$.

6. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono un insieme di generatori per $\mathbb{R}^{11}$ allora

- ■ $n \geq 11$
- ☐ $n = 11$
- ☐ $n \leq 11$
- ☐ $n < 11$
- ☐ $n > 11$

Soluzione. Un sistema di generatori ha almeno $\dim \mathbb{R}^{11} = 11$ elementi.

7. Se $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^5$ sono linearmente indipendenti allora

- ■ $n \leq 5$
- ☐ $n = 5$
- ☐ $n \geq 5$
- ☐ $n < 5$
- ☐ $n > 5$

Soluzione. Il numero massimo di vettori linearmente indipendenti è $\dim \mathbb{R}^5 = 5$.

8. Se l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ ha polinomio caratteristico $t(1-t)(2-t)(a-t)$ con $a \in R$, allora

- ■ f è semplice per $a \neq 0, 1, 2$
- ☐ f è semplice solo per $a \neq 0, 1, 2$
- ☐ f è semplice solo per $a \neq 1, 2$
- ☐ f non è mai semplice
- ☐ f è semplice per ogni $a \in \mathbb{R}$

Soluzione. Se $a \neq 0, 1, 2$ allora f ha tutti gli autovalori distinti e quindi è semplice, nulla si può dire per $a = 0, 1, 2$.

9. Se X_1 e X_2 sono soluzioni del sistema $AX = Y$ allora $X_1 - X_2$ è soluzione di

- ■ $AX = 0$
- ☐ $AX = 2Y$
- ☐ $AX = X_1$
- ☐ $AX = X_2$
- ☐ $X = 0$

Soluzione. Abbiamo $A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = Y - Y = 0$ e quindi $X_1 - X_2$ è soluzione del sistema omogeneo $AX = 0$.

10. Se i piani $2x + y + z - 1$ e $x - ay + z = 0$ sono perpendicolari allora

- ■ $a = 3$
- ☐ $a = -3$
- ☐ $a = 2$
- ☐ $a = -2$
- ☐ $a = 1$

Soluzione. I due piani hanno coefficienti di giacitura rispettivamente $(2, 1, 1)$ e $(1, -a, 1)$. I piani sono perpendicolari se e solo se i coefficienti di giacitura sono perpendicolari. Quindi $2 - a + 1 = 0$, cioè $a = 3$.

Parte 2: Esercizio 1.

1. Determinare per quali valori del parametro reale h l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} (1+2h)x - 3hy + 6hz \\ hx + (1-2h)y + 4hz \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è semplice. Trovare, inoltre, una base degli autospazi quando $h = 1$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1+2h & -3h & 6h \\ h & 1-2h & 4h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $(1-t)(1-t-h)(1-t+h)$. Ne segue che gli autovalori di f sono $1-h, 1, 1+h$. In particolare, se $h \neq 0$, essi sono tutti distinti e quindi f è semplice. Inoltre, quando $h = 0$, l'endomorfismo f è l'identità di $\mathbb{R}^3$; e quindi semplice anche in questo caso. Concludiamo che f è semplice per ogni $h \in \mathbb{R}$.

Quando $h = 1$ gli autovalori sono $0, 1, 2$, tutti di molteplicità algebrica, e quindi anche geometrica, 1. Per trovare gli autospazi di f dobbiamo risolvere, rispettivamente, i sistemi omogenei $AX = 0$, $(A - \mathrm{Id})X = 0$ e $(A - 2\,\mathrm{Id})X = 0$. Troviamo subito che, ad esempio, i seguenti vettori

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono tali che v_0 è una base dell'autospazio per 0, v_1 per 1 e v_2 per l'autovalore 2.

2. Determinare per quali valori del parametro reale h l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} (1-2h)x + 3hy - 6hz \\ -hx + (1+2h)y - 4hz \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è semplice. Trovare, inoltre, una base degli autospazi quando $h = -1$.

Soluzione. Simile a quanto appena visto.

3. Determinare per quali valori del parametro reale h l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} (1+2h)x + hy \\ -3hx + (1-2h)y \\ 6hx + 4hy + z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è semplice. Trovare, inoltre, una base degli autospazi quando $h = 1$.

Soluzione. Simile all'esercizio visto sopra.

4. Determinare per quali valori del parametro reale h l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} (1-2h)x - hy \\ 3hx + (1+2h)y \\ -6hx - 4hy + z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è semplice. Trovare, inoltre, una base degli autospazi quando $h = -1$.

Soluzione. Simile all'esercizio visto sopra.

Parte 3: Esercizio 2.

1. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + \alpha x_1y_2 + \alpha y_1x_2 + y_1y_2 + \alpha z_1z_2$$

è un prodotto scalare? Inoltre ortonormalizzare i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispetto a β quando $\alpha = 1/2$.

Soluzione. La matrice associata a β rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $(\alpha - t)(1 - t - \alpha)(1 - t + \alpha)$. Allora β è un prodotto scalare se e solo se le radici di questo polinomio, cioè α, $1 - \alpha$ e $1 + \alpha$ sono tutte positive. Otteniamo le disuguaglianze $\alpha > 0$, $\alpha < 1$ e $\alpha > -1$. Quindi β è un prodotto scalare se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Per ortonormalizzare i vettori e_1, e_2, e_3 rispetto a β con $\alpha = 1/2$, usiamo il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Abbiamo $|e_1|_\beta = 1$ e quindi $v_1 = w_1 = e_1$. Nel secondo passo, abbiamo

$$\begin{aligned} w_2 &= e_2 - \beta(e_2, v_1)v_1 \\ &= e_2 - \beta(e_2, e_1)e_1 \\ &= e_2 - 1/2e_1 \\ &= {}^t(-1/2, 1, 0). \end{aligned}$$

Visto che $|w_2|^2_\beta = 1/4 - 2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1 + 1 = 3/4$, otteniamo $v_2 = w_2/|w_2|_\beta = 2\sqrt{3}{}^t(-1/2, 1, 0)$. Infine, poniamo $w_3 = e_3 - \beta(e_3, v_1)v_1 - \beta(e_3, v_2)v_2$ e abbiamo $w_3 = e_3$ in quanto $\beta(e_3, v_1) = \beta(e_3, v_2) = 0$. Poi $|w_3|^2_\beta = 1/2$ e definiamo quindi $v_3 = \sqrt{2}e_3$.

In conclusione il processo di Gram-Schmidt restituisce i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

se applicato alla lista di vettori e_1, e_2, e_3.

2. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 - \alpha x_1y_2 - \alpha y_1x_2 + y_1y_2 - \alpha z_1z_2$$

è un prodotto scalare? Inoltre ortonormalizzare i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispetto a β quando $\alpha = -1/2$.

Soluzione. Simile al precedente.