Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale
Prova scritta di Geometria e Algebra

18 aprile 2013

SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare non suriettiva. Allora

   ■ $\dim \operatorname{Ker} f \geq 4$
   □ $\dim \operatorname{Ker} f = 4$
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 2$
   □ $\dim \operatorname{Im} f \geq 2$
   □ $\operatorname{Ker} f = 0$

   Soluzione. L'applicazione non è suriettiva, quindi $\dim \operatorname{Im} f \leq 1$. Allora dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f \geq 4$.

2. Se le due matrici A e B sono simili e $\det A = 0$ allora

   ■ B non è invertibile
   □ $\det B > 0$
   □ B è invertibile
   □ $\det B = -1$
   □ $\det B = 1$

   Soluzione. Due matrici simili hanno lo stesso determinante, quindi $\det B = 0$, cioè B non è invertibile.

3. Supponiamo che una retta con parametri direttori $(1, 1, 1)$ e il piano $ax+y+z-3 = 0$ siano perpendicolari. Allora

   ■ $a = 1$
   □ $a = -1$
   □ $a = 2$
   □ $a = -2$
   □ $a = 0$

   Soluzione. Se un piano e una retta sono perpendicolari allora i parametri direttori della retta sono paralleli ai coefficienti di giacitura del piano.

4. Siano U, V due sottospazi vettoriali di dimensione rispettivamente 3 e 4 di $\mathbb{R}^5$. Allora

   ■ $\dim(U \cap V) \geq 2$
   □ $\dim(U \cap V) = 2$
   □ $\dim(U \cap V) < 2$
   □ $\dim(U \cap V) = 3$
   □ $\dim(U \cap V) = 4$

   Soluzione. Dalla formula di Grassmann abbiamo $7 = \dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U + V)$ e, usando $U + V \subseteq \mathbb{R}^5$ da cui $\dim(U + V) \leq 5$, abbiamo $\dim(U \cap V) \geq 2$.

5. Se due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione finita allora

   ■ sono isomorfi
   □ sono uguali
   □ non sono isomorfi

☐ non sono uguali

☐ hanno una base in comune

Soluzione. Spazi vettoriali della stessa dimensione finita sono isomorfi.

Parte 2: Esercizio.

1. Calcolare gli autovalori e le relative molteplicità algebriche e geometriche dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \\ -x + 2y - z \end{pmatrix}$$

Calcolare inoltre la dimensione dell'immagine di f.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $(1+t)t(2-t)^2$. Ne segue che gli autovalori di f sono -1, 0 e 2; tutti di molteplicità algebrica, e quindi anche geometrica, 1.

Visto che il nucleo di f è l'autospazio di 0, esso ha dimensione 1. Dalla relazione fondamentale segue quindi che $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$.

Parte 3: Teoria.

1. Sia $f : U \longrightarrow V$ un'applicazione lineare con U finitamente generato. Provare che

$$\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Soluzione. Vista a lezione.