Università del Salento

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta di Geometria e Algebra

19 luglio 2013

Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ ha 0 come autovalore allora

   - ■ la dimensione dell'immagine è minore o uguale a 4
   - ☐ l'endomorfismo è iniettivo
   - ☐ l'endomorfismo è suriettivo
   - ☐ il nucleo è banale
   - ☐ l'endomorfismo è bigettivo

   Soluzione. L'autospazio dell'autovalore 0 è il nucleo di f, esso è quindi non banale. Allora dalla relazione fondamentale si ha che l'immagine avrà dimensione al più 4.

2. Se U e V sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$ e $U \cap V = \{0\}$ allora

   - ■ $\dim(U+V) = \dim U + \dim V$
   - ☐ $\dim(U+V) \leq \dim U + \dim V$
   - ☐ $\dim(U+V) \geq \dim U + \dim V$
   - ☐ $\dim(U+V) < \dim U + \dim V$
   - ☐ $\dim(U+V) > \dim U + \dim V$

   Soluzione. Dalla formula di Grassmann si ha $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V = \dim U + \dim V$. **Per un errore nella preparazione anche gli enunciati con $\leq$ e $\geq$ risultano veri, essi sono stati pertanto considerati come risposte valide.**

3. Se u e v sono autovettori di autovalore λ per l'endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ allora

   - ■ anche $u+v$ è un autovettore di autovalore λ per f
   - ☐ $u+v$ è un autovettore di autovalore 2λ per f
   - ☐ $u-v$ è nel nucleo di f
   - ☐ $u-v$ è un autovettore di autovalore 0 per f
   - ☐ $u-v$ è un autovettore di autovalore 2λ per f

   Soluzione. Si ha $f(u+v) = f(u)+f(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$ e quindi $u+v$ è un autovettore di autovalore λ per f

4. Se u, v sono vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali tra loro e di norma 1 rispetto al prodotto scalare standard allora

   - ■ $|u+v|^2 = 2$
   - ☐ $|u+v|^2 < 2$
   - ☐ $|u+v|^2 > 2$
   - ☐ $|u+v|^2 = 0$
   - ☐ $|u+v|^2 = 4$

   Soluzione. Si ha $|u+v|^2 = (u+v, u+v) = |u|^2 + 2(u,v) + |v|^2 = 1+0+1 = 2$.

5. Se A e B sono matrici invertibili allora

   - ■ anche $A \cdot B$ è invertibile e vale $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
   - ☐ anche $A \cdot B$ è invertibile e vale $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
   - ☐ non è detto che $A \cdot B$ sia invertibile

☐ $A \cdot B$ non è invertibile

☐ $A \cdot B$ ha determinante nullo

Soluzione. Visto che $\det A, \det B \neq 0$ si ha $\det(A \cdot B) = \det A \det B \neq 0$ e quindi $A \cdot B$ è invertibile e, per quanto visto a lezione, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Parte 2: Esercizio 1

1. Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -ax - (1+a)y - (1+a)z \\ (1+a)x + (2+a)y + (3+a)z \\ -z \end{pmatrix}$$

al variare del parametro a in $\mathbb{R}$. Determinare inoltre se f è semplice per $a = 0$ e determinare una base dell'autospazio dell'autovalore 1 per $a = 0$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -a & -(1+a) & -(1+a) \\ 1+a & 2+a & 3+a \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $-(1+t)(1-t)^2$. Ne segue che gli autovalori di f sono -1, con molteplicità algebrica 1, e 1 con molteplicità algebrica 2. In particolare anche la molteplicità geometrica di -1 è 1. L'endomorfismo sarà quindi semplice se e solo se la molteplicità geometrica di 1 è 2.

Per $a = 0$ la matrice $A - t\,\mathrm{Id}$, per $t = 1$, è

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Concludiamo che $\dim V(1) = 3 - 2 = 1$ e quindi l'endomorfismo non è semplice. Inoltre ${}^t(1, -1, 0)$ è una base di $V(1)$ come si trova subito risolvendo il sistema omogeneo che ha la precedente matrice come matrice dei coefficienti.

2. Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax - (1-a)y - (1-a)z \\ (1-a)x + (2-a)y + (3-a)z \\ -z \end{pmatrix}$$

al variare del parametro a in $\mathbb{R}$. Determinare inoltre se f è semplice per $a = 0$ e determinare una base dell'autospazio dell'autovalore 1 per $a = 0$.

Soluzione. Analoga alla precedente.

Parte 3: Esercizio 2

1. Dopo aver verificato che la seguente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$$

è un prodotto scalare, calcolare una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}({}^t(1,1,1))$ rispetto a β.

Soluzione. La matrice associata alla forma bilineare è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $(1-t)(t^2-4t+3)$. Gli autovalori di A sono quindi 1, con molteplicità alegbrica 2, e 3. Essendo gli autovalori tutti positivi la forma bilineare simmetrica β è un prodotto scalare.

Il complemento ortogonale di $\mathcal{L}({}^t(1,1,1))$ è dato dal sottospazio vettoriale dei vettori ${}^t(x,y,z)$ tali che $\beta({}^t(x,y,z), {}^t(1,1,1)) = 0$. Svolgendo i calcoli, si tratta di risolvere il sistema $x+y+z = 0$. Una base delle soluzioni di tale sistema è, ad esempio, ${}^t(-1,1,0)$, ${}^t(-1,0,1)$.

2. Dopo aver verificato che la seguente forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 + 2y_1y_2 - y_1z_2 - z_1y_2 + 2z_1z_2$$

è un prodotto scalare, calcolare una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}({}^t(1,1,1))$ rispetto a β.

Soluzione. Analoga alla precedente.