Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Prova scritta di Geometria e Algebra

20 settembre 2012

SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Siano v_1, v_2, v_3 vettori linearmente dipendenti e sia $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ una loro combinazione lineare con $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Allora

   ■ v può essere 0.

   □ $v = 0$.

   □ $v \neq 0$.

   □ v è v_1 o v_2 o v_3.

   □ $-v = 0$.

   Soluzione. Essendo i vettori linearmente dipendenti esiste una loro combinazione lineare non banale che fa 0 e questa potrebbe avere tutti i coefficienti non nulli.

2. Sia A una matrice quadrata con $\det A = -1$. Allora $\det A^2$ vale

   ■ 1.

   □ -1.

   □ 2.

   □ -2.

   □ 0.

   Soluzione. Si ha $\det A^2 = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = (-1)^2 = 1$.

3. Sia A una matrice quadrata invertibile allora ${}^tA \cdot A$ ha determinante

   ■ positivo.

   □ nullo.

   □ negativo.

   □ 1.

   □ -1.

   Soluzione. Si ha $\det({}^tA \cdot A) = \det {}^tA \det A = (\det A)^2$ e quindi un numero positivo in quanto $\det A \neq 0$ essendo A invertibile.

4. Siano u, v due vettori di norma unitaria in $\mathbb{R}^3$ allora il vettore $u + v$ ha norma

   ■ minore o uguale a 2.

   □ 2.

   □ maggiore di 2.

   □ minore di 1.

   □ 1.

   Soluzione. Dalla disuguaglianza di Minkowski abbiamo $|u + v| \leq |u| + |v| = 2$.

5. Se β è una forma bilineare simmetrica semidefinitiva positiva su $\mathbb{R}^n$ allora la forma β' definita da $\beta'(u, v) = -\beta(u, v)$ per ogni u, v in $\mathbb{R}^n$ è

   ■ semidefinita negativa.

   □ definita negativa.

   □ semidefinita positiva.

☐ definita positiva.

☐ nulla.

Soluzione. Risulta $\beta'(u,u) = -\beta(u,u) \leq 0$ visto che β è semidefinita positiva. Quindi β' è semidefinita negativa.

6. Sia A una matrice quadrata di rango massimo. Allora

■ il determinante di A non è zero.

☐ il determinante di ogni minore di A non è zero.

☐ il determinante di ogni minore di A è zero.

☐ il determinante di A è zero.

☐ il determinante di A può essere zero.

Soluzione. Una matrice quadrata di rango massimo è invertibile e quindi ha determinante diverso da zero.

7. Sia $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare con $\dim \operatorname{Ker} f = 3$. Allora

■ f non è suriettiva.

☐ f è suriettiva.

☐ f è iniettiva.

☐ f può essere iniettiva.

☐ f è l'applicazione lineare nulla.

Soluzione. Dalla relazione fondamentale abbiamo $5 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 3 + \dim \operatorname{Im} f$ e quindi $\dim \operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$. L'applicazione non è quindi suriettiva.

8. Se il sistema $Ax = y$ ha ∞^k soluzioni allora il sistema $Ax = 0$ ha ∞^h soluzioni con

■ h uguale a k.

☐ h strettamente minore di k.

☐ h minore o uguale a k.

☐ h strettamente maggiore a k.

☐ h maggiore o uguale a k.

Soluzione. Le soluzioni di $Ax = y$ sono del tipo $x_0 + u$ con x_0 soluzione particolare di $Ax = y$ e u soluzione di $Ax = 0$. Quindi $h = k$.

9. Siano r, s due rette di $\mathbb{R}^3$ incidenti nel punto p. Allora

■ esiste un'unica retta perpendicolare ad r e ad s passante per p.

☐ non esiste alcuna retta perpendicolare ad r e ad s.

☐ esistono infinite rette perpendicolari ad r e ad s.

☐ non esiste alcuna retta passante per p.

☐ tutte le rette per p sono parallele ad r e ad s.

Soluzione. Le rette r e s generano un piano π visto che sono incidenti. Allora l'unica retta perpendicolare a π e passante per p è anche l'unica perpendicolare ad r e ad s.

10. Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo semplice con esattamente due autovalori distinti λ_1,λ_2. Allora

■ la dimensione di V è la somma delle molteplicità algebriche di λ_1 e λ_2.

☐ λ_1 e λ_2 sono entrambi non nulli.

☐ la dimensione di V è la molteplicità geometrica di λ_1.

☐ uno tra λ_1 e λ_2 è nullo.

☐ la dimensione di V è minore della molteplicità geometrica di λ_1.

Soluzione. Essendo f semplice esiste una base in cui la sua matrice è diagonale con sulla diagonale a_1 volte λ_1 e a_2 volte λ_2, dove a_1 e a_2 sono le molteplicità di λ_1 e λ_2. Quindi $a_1 + a_2 = \dim V$.

Parte 2: Esercizio.

1. Decidere per quali valori del paramentro reale a l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a)x + (1-a)y \\ (1-a)x + (1+a)y \\ -z \end{pmatrix}$$

è semplice.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1-a & 0 \\ 1-a & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi il suo polinomio caratteristico è $-(1+t)(2a-t)(2-t)$. Allora f ha per autovalori $-1, 2, 2a$ ed essi sono tutti distinti per $a \neq 1, -1/2$. Concludiamo subito che f è semplice per $a \neq 1, -1/2$.

Per $a = 1$ il polinomio caratteristico è $-(1+t)(2-t)^2$ e quindi l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2 e -1 molteplicità algebrica 1. L'endomorfismo sarà quindi semplice se e solo se la molteplicità geometrica di 2 è 2. Tale molteplicità è la dimensione del nucleo di $f - 2\,\mathrm{Id}$. La matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 1 e quindi f è semplice.

Per $a = -1/2$ il polinomio caratteristico è $(1+t)^2(2-t)$ e quindi solo l'autovalore -1 ha molteplicità algebrica maggiore di 1. L'endomorfismo sarà quindi semplice se e solo se $A + \mathrm{Id}$ ha rango 1. Abbiamo

$$A + \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente a scala alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

di rango 1. In conclusione f è semplice anche per $a = -1/2$. L'endomorfismo è quindi semplice per qualsiasi valore di a.

Altra soluzione: la matrice associata ad f è simmetrica reale per ogni valore di a. In particolare essa è diagonalizzabile, l'endomorfismo f è quindi semplice per ogni valore di a.

2. Decidere per quali valori del paramentro reale a l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)x + (1+a)y \\ (1+a)x + (1-a)y \\ -z \end{pmatrix}$$

è semplice.

Soluzione. Analoga all'esercizio precedente.

Parte 3: Teoria.

1. Dimostrare che due spazi vettoriali sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Soluzione. Vista a lezione.

2. Dimostrare che due matrici simili hanno lo stesso determinante.

Soluzione. Vista a lezione.