Università del Salento
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA E ALGEBRA
21 ottobre 2013
Soluzioni

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è un'applicazione lineare suriettiva allora

   ■ $\dim \ker f = 1$
   □ f è anche iniettiva
   □ f è bigettiva
   □ $\ker f = 0$
   □ $\dim \operatorname{Im} f = 1$

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \ker f = 1$ in quanto $\dim \operatorname{Im} f = 3$ essendo f suriettiva.

2. Per quali valori del parametro reale a la matice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ è invertibile?

   ■ per ogni $a \neq 1$
   □ solo per $a = 1$
   □ per ogni a
   □ per nessun a
   □ per $a \neq \pm 1$

   Soluzione. Il determinante della matrice è $1 - a$ e quindi la matrice è invertibile per ogni $a \neq 1$.

3. Se U e V sono due sottospazi di dimensione 2 e 3 in $\mathbb{R}^4$ allora

   ■ $\dim U \cap V \geq 1$
   □ $\dim U \cap V \leq 1$
   □ $\dim U \cap V = 1$
   □ $\dim U \cap V = 4$
   □ $\dim U \cap V = 0$

   Soluzione. Visto che $U + V \subseteq \mathbb{R}^4$ abbiamo $\dim(U + V) \leq 4$ e quindi, usando la formula di Grassmann, troviamo $\dim U \cap V \geq 1$.

4. Se i due piani $x + y + z = 0$ e $2x + ay + 2z = 1$ di $\mathbb{R}^3$ sono paralleli allora

   ■ $a = 2$
   □ $a = 0$
   □ $a = -1$
   □ $a = 1$
   □ $a = -2$

   Soluzione. Piani paralleli devono avere coefficienti di giacitura paralleli e quindi $a = 2$.

5. Se la matrice $n \times n$ A ha rango $n - 2$, quante sono le soluzioni del sistema omogeneo $AX = 0$?

   ■ ∞^2
   □ ∞^{n-2}
   □ ∞^1
   □ ∞^{n-1}

☐ nessuna

Soluzione. Dal teorema di Rouchè–Capelli abbiamo subito che il sistema ha $\infty^{n-(n-2)} = \infty^2$ soluzioni.

Parte 2: Esercizio 1

1. Dopo aver controllato che il seguente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ è semplice

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x + y \\ -3x - y \\ 6x + 4y + z \end{pmatrix}$$

trovare una base degli autospazi e scrivere la forma diagonale di f.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è quindi $t(1-t)(-2+t)$. Ne segue che gli autovalori di f sono 0, 1 e 2. Avendo tre autovalori distinti, f è semplice.

Per trovare una base degli autospazi bisogna risolvere i sistemi omogenei $(A - t\,\mathrm{Id})X = 0$ per $t = 0$, 1 e 2. Troviamo subito che $v_1 \doteq {}^t(1,-3,6)$, $v_2 \doteq {}^t(0,0,1)$ e $v_3 \doteq {}^t(1,-1,2)$ sono basi per gli autospazi di 0, 1 e 2 rispettivamente.

Nella base v_1, v_2, v_3 la matrice associata ad f è quindi diagonale con sulla diagonale gli autovalori, cioè la forma diagonale di f è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Parte 3: Esercizio 2

1. Per quali valori di a la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1x_2 - ax_1y_2 - ay_1x_2 + y_1y_2 + az_1z_2$$

è un prodotto scalare?

Soluzione. La matrice associata a β nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

che ha polinomio caratteristico $(a-t)(1-t-a)(1-t+a)$. Gli autovalori di questa matrice sono quindi a, $1-a$ e $1+a$. Visto che β è simmetrica, essa è un prodotto scalare se e solo se i suoi autovalori sono tutti positivi.

Questo impone il sistema di condizioni $a > 0$, $1 - a > 0$ e $1 + a > 0$ le cui soluzioni sono $0 < a < 1$.