Università del Salento
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA E ALGEBRA

22 aprile 2013
SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Se v_1, v_2, v_3 sono vettori linearmente indipendenti e $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ allora

   ■ $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$
   □ $a_1 > 0$ o $a_2 > 0$
   □ $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$
   □ $a_1 \neq 0$ o $a_2 \neq 0$
   □ $a_1 = 1$, $a_2 = -1$

   Soluzione. L'unica combinazione lineare nulla è quella banale, quindi $a_1 = a_2 = 0$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare e siano v_1, v_2, v_3 linearmente indipendenti in $\operatorname{Ker} f$. Allora

   ■ f non è suriettiva
   □ f è suriettiva
   □ $f = 0$
   □ f è iniettiva
   □ f può essere suriettiva

   Soluzione. Se v_1, v_2, v_3 sono vettori linearmente indipendenti in $\operatorname{Ker} f$, $\dim \operatorname{Ker} f \geq 3$. Allora, dalla relazione fondamentale $\dim \operatorname{Im} f \leq 4 - 3 = 1 < 2 = \dim \operatorname{Im} \mathbb{R}^2$. Quindi f non è suriettiva.

3. Se u, v sono vettori ortonormali rispetto al prodotto scalare β allora

   ■ $\beta(u, v) = 0$
   □ $\beta(u, v) = 1$
   □ $\beta(u, v) = -1$
   □ $\beta(u, u) = 0$
   □ $\beta(v, v) = 0$

   Soluzione. Due vettori ortonormali hanno prodotto scalare nullo, cioè $\beta(u, v) = 0$.

4. Siano U, V due sottospazi vettoriali di dimensione 4 di $\mathbb{R}^7$. Allora

   ■ $U \cap V \neq 0$
   □ $U \cap V = 0$
   □ $\dim(U + V) = 8$
   □ $\dim(U \cap V) = 1$
   □ $U + V = \mathbb{R}^7$

   Soluzione. Usando che $U + V \subseteq \mathbb{R}^7$, dalla formula di Grassmann si ha $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) \geq 4 + 4 - 7 = 1$. Cioè $U \cap V \neq 0$.

5. Se A e B sono matrici quadrate e $A \cdot B = \mathrm{Id}$ allora

   ■ $\det A \neq 0$
   □ $\det A = \det B$
   □ $\det A \neq \det B$
   □ $\det B = 1$
   □ $\det(A \cdot B) = -1$

Soluzione. Se $A \cdot B = \mathrm{Id}$ allora A e B sono invertibili, quindi $\det A$ e $\det B$ non sono nulli.

6. Siano S una sfera di centro C e π un piano di $\mathbb{R}^3$ tangente ad S in P.

- ■ $P - C$ è perpendicolare ad π
- □ $P - C$ è parallelo a π
- □ $P - C$ è contenuto in π
- □ $P - C = 0$
- □ $P - C \in S$

Soluzione. Il raggio in P è perpendicolare al piano π tangente in P.

7. Se u e v sono autovettori relativi allo stesso autovalore allora

- ■ $u \neq 0$ e $v \neq 0$
- □ $u = v$
- □ $u = -v$
- □ u e v sono linearmente dipendenti
- □ u e v sono linearmente indipendenti

Soluzione. L'unica cosa che si può dedurre è che, essendo autovettori, u e v non sono nulli.

8. Se i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 di V sono linearmente indipendenti allora

- ■ $\dim V \geq 4$
- □ $\dim V > 4$
- □ $\dim V = 4$
- □ $\dim V < 4$
- □ $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$

Soluzione. La dimensione di uno spazio vettoriale è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti, quindi $\dim V \geq 4$.

Parte 2: Esercizio 1.

1. Determinare per quali valori del parametro reale a l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x-y+az \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è semplice. Trovare, inoltre, una base degli autospazi per $a = 0$.

Soluzione. La matrice associata ad f nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è $(a-t)(t^2-2)$. Ne segue che gli autovalori di f sono $a, \pm\sqrt{2}$. In particolare, se $a \neq \pm\sqrt{2}$, essi sono tutti distinti e quindi f è semplice.

Per $a = \sqrt{2}$, gli autovalori sono $-\sqrt{2}$, di molteplicità algebrica 1, e $\sqrt{2}$ di molteplicità algebrica 2. Per decidere se f è o meno semplice basta quindi calcolare la molteplicità geometrica di $\sqrt{2}$. Occorre, cioè, calcolare la dimensione del nucleo di $A - \sqrt{2}\,\mathrm{Id}$. Abbiamo

$$A - \sqrt{2}\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e tale matrice ha rango 2, quindi la molteplicità geometrica di $\sqrt{2}$ è 1. L'endomorfismo non è quindi semplice per $a = \sqrt{2}$.

In modo analogo si ragiona per $a = -\sqrt{2}$; anche in questo caso f non è semplice.

Per $a = 0$ l'endomorfismo ha i tre autovalori $\lambda_1 \doteq 0$, $\lambda_{2,3} \doteq \pm\sqrt{2}$. Una base sarà quindi data da v_1, v_2, v_3 con v_i autovettore di λ_i per $i = 1, 2, 3$.

Un autovettore per λ_i è una soluzione non nulla del sistema

$$(A - \lambda_i \,\mathrm{Id})X = 0.$$

Con semplici calcoli si trova, ad esempio,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare per quali valori del parametro reale a l'endomorfismo

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ x-y-az \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è semplice. Trovare, inoltre, una base degli autospazi quando $a = 0$.

Soluzione. Simile a quanto visto sopra.

Parte 3: Esercizio 2.

1. Sia $U \doteq \mathcal{L}(u_1, u_2)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da

$$u_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base ortonormale di $U^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione. L'ortogonale $U^\perp$ di U è l'insieme dei vettori $v \doteq {}^t(x, y, z, t)$ tali che $(v, u_1) = 0$, $(v, u_2) = 0$. Bisogna quindi risolvere il sistema $x - t = 0$, $x + y - z = 0$.

Otteniamo che $U^\perp$ è generato da $v_1 \doteq {}^t(0, 1, 1, 0)$ e $v_2 \doteq {}^t(1, -1, 0, 1)$. L'ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, applicata ai vettori v_1, v_2, ci fornisce la base

$$w_1 \doteq \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 \doteq \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$