Università del Salento

Corso di Laurea in Ingegneria Industriale

Prova scritta di Geometria e Algebra

23 ottobre 2012

SOLUZIONI

Parte 1: Domande a risposta multipla.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione suriettiva. Allora

   ■ $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

   □ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

   □ esistono due vettori u, v linearmente indipendenti per cui $f(u) = f(v) = 0$.

   □ f è iniettiva.

   □ f è bigettiva.

   Soluzione. Dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$ visto che f è suriettiva.

2. Siano A e B due matrici congruenti e sia $\det A = 2$. Allora

   ■ $\det B > 0$.

   □ $\det B = 2$.

   □ $\det B = \sqrt{2}$.

   □ $\det B < 0$.

   □ $\det B = -\sqrt{2}$.

   Soluzione. Due matrici congruenti hanno determinante dello stesso segno, quindi $\det B > 0$.

3. Una circonferenza nella spazio è definita dall'intersezione di

   ■ un piano ed una sfera.

   □ due piani.

   □ un piano ed una retta.

   □ una sfera ed una retta.

   □ due rette.

   Soluzione. Se tagliamo una sfera con un piano che la interseca otteniamo una circonferenza.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo semplice con due autovalori distinti. Allora

   ■ un autovalore ha molteplicità geometria 2.

   □ un tale f non esiste.

   □ un autovalore ha molteplicità geometria 3.

   □ un autovalore è nullo.

   □ un autovalore ha molteplicità geometrica 0.

   Soluzione. La somma delle molteplicità geometriche è $3 = \dim \mathbb{R}^3$ visto che f è semplice. Quindi uno dei due autovalori deve avere molteplicità geometrica 2, altrimenti tale somma sarebbe 2.

5. Se u e v sono due vettori di $\mathbb{R}^n$ e hanno norma 2 per un prodotto scalare β allora

   ■ $|\beta(u, v)| \leq 4$.

   □ $\beta(u, v) \leq 1$.

   □ $|\beta(u, v)| \leq \sqrt{2}$.

   □ $\beta(u, v) > 2$.

   □ i due vettori sono ortogonali.

Soluzione. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue che $|\beta(u,v)| \leq |u||v| = 2 \cdot 2 = 4$.

Parte 2: Esercizio.

1. Decidere per quali valori del paramentro reale a la seguente forma bilineare è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$

$$\beta(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}) = 2x_1x_2 - x_1y_2 + ax_1z_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2 + az_1x_2 + 2z_1z_2.$$

Soluzione. La matrice associata a β nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = (2-t)((2-t)^2 - 1 - a^2)$. Le sue radici sono 2, $2 \pm \sqrt{1+a^2}$. Visto che A è simmetrica, β è un prodotto scalare se e solo se è definito positivo, cioè se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi. Gli autovalori di A sono le radici di $\det(A - t\,\mathrm{Id})$ e quindi dobbiamo imporre solo $2 - \sqrt{1+a^2} > 0$ in quanto le altre due radici sono sempre positive. Questa disuguaglianza è equivalente a $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$.

Parte 3: Teoria.

1. Dimostrare che se V è uno spazio vettoriale finitamente generato e U, W sono due suoi sottospazi allora vale la seguente formula di Grassmann

$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W).$$

Soluzione. Vista a lezione.