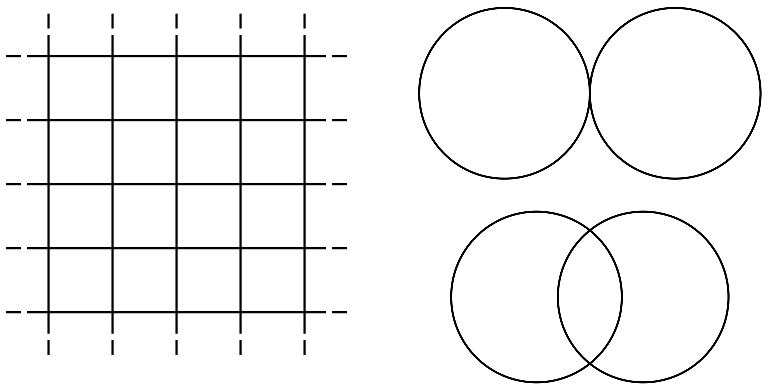
Esercitazione di Geometria IV

3 maggio 2013

1. (a) Dimostrare che il sottospazio topologico $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ oppure } y \in \mathbb{Z}\}$ di $\mathbb{R}^2$ a sinistra nella figura è connesso per archi.

   (b) Decidere, motivando la risposta, se i due sottospazi topologici di $\mathbb{R}^2$ a destra nella figura sono omeomorfi.



Soluzione.

(a) Sia X lo spazio topologico $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \text{ oppure } y \in \mathbb{Z}\}$. Per provare che X è connesso per archi basta costruire un arco che collega un qualsiasi suo punto (x, y) al punto $(0, 0) \in X$. Per definizione di X la coordinate x o la coordinata y sono intere, possiamo supporre $x \in \mathbb{Z}$, l'altro caso è perfettamente analogo. La mappa $[0, 1] \ni t \longmapsto (x, ty) \in X$ è un arco che collega (x, y) e $(x, 0)$ e la mappa $[0, 1] \ni t \longmapsto (tx, 0) \in X$ è un arco che collega $(x, 0)$ e $(0, 0)$.

(b) Sia X lo spazio dato dalle due circonferenze tangenti e Y lo spazio dato dalle due circonferenze secanti. Proviamo che X e Y non sono omeomorfi.

Sia per assurdo $\varphi : X \longmapsto Y$ un omemomorfismo e sia, inoltre, $p \in X$ il punto di tangenza delle due circonferenze. Allora $\varphi : X \setminus \{p\} \longmapsto Y \setminus \{f(p)\}$ è ancora un omeomorfismo. Ma questo è impossibile in quanto $X \setminus \{p\}$ ha due componenti connesse mentre, qualsiasi sia il punto $f(p)$ di Y, lo spazio $Y \setminus \{f(p)\}$ è connesso.

2. Descrivere le componenti connesse di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

   Soluzione. Sia C una componente connessa di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e siano (a, b), $(c, d) \in C$ due suoi punti. Essendo C connesso anche $\pi_1(C)$ è connesso, dove con $\pi_1 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longmapsto \mathbb{Q}$ abbiamo indicato la proiezione sul primo fattore. Ma $\mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso, quindi $a = c$. Allo stesso modo, proiettando sul secondo fattore, abbiamo $b = d$.

   Concludiamo che C ha un solo punto. Cioè $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso.

3. Sia $\mathsf{D}^2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco unitario di $\mathbb{R}^2$. Provare che se $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di chiusi di D^2 tali che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha

$$\bigcap_{n=0}^{h} C_n \neq \varnothing$$

allora vale anche

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \neq \varnothing.$$

Soluzione. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di aperti $\{\mathsf{D}^2 \setminus C_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ di D^2. Se fosse $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \varnothing$ allora si avrebbe

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathsf{D}^2 \setminus C_n) = \mathsf{D}^2 \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \mathsf{D}^2,$$

cioè $\mathcal{F}$ sarebbe un ricoprimento aperto di D^2. Ma D^2 è compatto e quindi dovrebbe esistere un sottoricoprimento finito $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$. Indicato che N il massino indice n per cui $X \setminus C_n$ è un elemento di $\mathcal{G}$ si avrebbe

$$\mathsf{D}^2 = \bigcup_{n=0}^{N} (\mathsf{D}^2 \setminus C_n) = \mathsf{D}^2 \setminus \bigcap_{n=0}^{N} C_h$$

e quindi $\bigcap_{n=0}^{N} C_n = \varnothing$ contro l'ipotesi. (Si noti che l'unica proprietà di D^2 che abbiamo usato è la sua compattezza.)

4. Sia X un spazio compatto, Y uno spazio metrico con distanza d e sia $\mathsf{C}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue da X in Y.

   Date $f, g \in \mathsf{C}(X, Y)$ poniamo

   $$\delta(f, g) \doteq \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

   (a) Dimostrare che $\delta(f, g) < \infty$ per ogni coppia di funzioni continue f e g.

   (b) Dimostrare che δ è una distanza su $\mathsf{C}(X, Y)$.

   Soluzione.

   (a) Siano f, $g \in \mathsf{C}(X, Y)$ fissate. Osserviamo che la mappa

   $$X \ni x \longmapsto (f(x), g(x)) \in Y \times Y$$

   è continua essendo f e g continue. Anche la mappa

   $$Y \times Y \ni (y_1, y_2) \longmapsto d(y_1, y_2) \in \mathbb{R}$$

   è continua in quanto la topologia su Y è indotta dalla distanza d. Allora la mappa composta $X \ni x \longmapsto d(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}$ è continua. Quindi essa assume massimo visto che X è compatto: possiamo concludere

   $$\delta(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)) < \infty.$$

   (b) È chiaro che $\delta(f, g) \geq 0$ visto che d è non negativa essendo una distanza su Y. Siano ora f, $g \in \mathsf{C}(X, Y)$ tali che $\delta(f, g) = 0$. Allora, dalla definizione di $\delta(f, g)$, abbiamo $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) = 0$ e quindi $d(f(x), g(x)) = 0$ per ogni $x \in X$. Ne segue che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$, cioè $f = g$.
   Che si abbia $\delta(f, g) = \delta(g, f)$ deriva subita dall'analoga proprietà di d, vista la definizione di δ.

Proviamo infine che δ verifica la disuguaglianza triangolare. Infatti dati f, g e h elementi di $\mathsf{C}(X, Y)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\delta(f, h) &= \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)) \\
&\leq \sup_{x \in X} (d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \\
&\leq \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) + \sup_{x \in X} d(g(x), h(x)) \\
&= \delta(f, g) + \delta(g, h).
\end{aligned}$$

Dove per la prima disuguaglianza abbiamo usato che d è una distanza e nella seconda una proprietà del sup.