Secondo esonero di Geometria IV

1 giugno 2015

1. Calcolare la forma canonica di Jordan del seguente endomorfismo

$$\mathbb{C}^5 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -2x_2 \\ 2x_3 \\ x_2 - 2x_4 \\ 2x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5$$

Calcolare inoltre, per ogni $k \geq 0$ e ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, la dimensione $n_{\lambda,k} \doteq \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})^k$.

Soluzione. Per prima cosa osserviamo che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, per ogni endomorfismo esiste quindi una base di $\mathbb{C}^5$ in cui la matrice associata è in forma di Jordan. Il polinomio caratteristico di f è $(2-t)^3(2+t)^2$; abbiamo quindi i due autovalori ± 2.

La somma delle dimensioni dei 2–blocchi è la molteplicità algebrica di 2, cioè 3; analogamente quella di -2 è 2. Visto poi che il rango di $f - 2\operatorname{Id}$ è 3 concludiamo che il numero di 2–blocchi di Jordan è $5 - 3 = 2$, mentre quello dei (-2)–blocchi è $5 - \operatorname{rk}(f - 2\operatorname{Id}) = 1$. Queste informazioni sono sufficienti per concludere che, a meno dell'ordine dei blocchi, la forma di Jordan di f è $J = J_2(2) \oplus J_1(2) \oplus J_2(-2)$.

Osserviamo che, indicato con $m_{k,\lambda}$ il numero dei λ–blocchi di dimensione k in J, abbiamo $n_{k,\lambda} = m_{1,\lambda} + 2m_{2,\lambda} + \cdots + (k-1)m_{k-1,\lambda} + k(m_{k,\lambda} + m_{k+1,\lambda} + \cdots)$. Quindi se λ non è un autovalore, cioè se $\lambda \neq \pm 2$, allora $n_{k,\lambda} = 0$ per ogni $k \geq 0$.

Se invece $\lambda = 2$ allora, usando che $m_{0,2} = 0$, $m_{1,2} = m_{2,2} = 1$ e $m_{k,2} = 0$ per ogni $k \geq 3$ otteniamo subito $n_{0,2} = 0$, $n_{1,2} = 2$ e $n_{k,2} = 3$ per ogni $k \geq 2$.

Analogamente per $\lambda = -2$, usando $m_{0,-2} = m_{1,-2} = 0$, $m_{2,-2} = 1$ e $m_{k,-2} = 0$ per ogni $k \geq 3$, abbiamo $n_{0,-2} = 0$, $n_{1,-2} = 1$ e $n_{k,-2} = 2$ per ogni $k \geq 2$.

2. Sia A una matrice quadrata a coefficienti complessi con polinomio caratteristico $(1-t)^3(1+t)^2$ e polinomio minimo $(1-t)^2(1+t)$. Determinare la forma canonica di Jordan di A. Cosa si può dire se la matrice ha coefficienti in un campo di caratterisitica 2?

Soluzione. Essendo $\mathbb{C}$ un campo di caratteristica diversa da 2 abbiamo che $1 \neq -1$. Dal polinomio caratteristico sappiamo quindi che A ammette i due autovalori (distinti) ± 1, la somma delle dimensioni degli 1–blocchi è 3, la somma delle dimensioni dei (-1)–blocchi è 2. Dal polinomio minimo ricaviamo che il massimo della dimensione degli 1–blocchi è 2 mentre quella dei (-1)–blocchi è 1. L'unica forma di Jordan possibile è quindi, a meno dell'ordine dei blocchi, $J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(-1) \oplus J_1(-1)$.

Se invece siamo su un campo di caratteristica 2 allora $1 = -1$ e quindi il polinomio caratteristico è $(1-t)^5$ mentre quello minimo è $(1-t)^3$. Abbiamo il solo autovalore 1 con dimensione massima degli 1–blocchi 3. Sono quindi possibili le due forme di Jordan $J_3(1) \oplus J_2(1)$ e $J_3(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1)$.

3. Trovare la forma canonica di Jordan di un endomorfismo nilpotente di $\mathbb{C}^7$ con polinomio minimo $\mu(t) = t^3$ e dimensione dell'immagine uguale a 3.

Soluzione. L'unico autovalore è 0 con dimensione massima degli 0–blocchi 3. Inoltre la molteplicità geometrica di 0, cioè la dimensione del nucleo, è 4 visto che dimensione dell'immagine è 3. Abbiamo quindi 4 0–blocchi. Ma l'unico modo di scrivere 7 come somma di 4 numeri positivi, usando almeno un 3 e non usando numeri maggiori di 3 è $7 = 3 + 2 + 1 + 1$. La forma canonica di Jordan cercata è quindi $J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$.

4. Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo invertibile dello spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ tale che $f^{-1}(v) = -v - f(v)$ per ogni $v \in V$. Provare che f è semisemplice.

   Soluzione. Applicando f ad ambo i lati dell'uguaglianza $f^{-1}(v) = -v - f(v)$, abbiamo $v = -f(v) - f^2(v)$ per ogni v di V. Ciò è equivalente a $(f^2 + f + \mathrm{Id})(v) = 0$ per ogni $v \in V$; in altri termini, $f^2 + f + \mathrm{Id}$ è l'applicazione lineare nulla.

   Indicando con A la matrice associata ad f in una base (qualsiasi) di V, abbiamo $A^2 + A + \mathrm{Id} = 0$; il polinomio $t^2 + t + 1 \in \mathbb{C}[t]$ si annulla su A. Ma allora il polinomio minimo di A divide tale polinomio.

   Osserviamo ora che t^2+t+1 ha per radici $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$; in particolare esso ha radici distinte. Ricaviamo quindi che anche il polinomio minimo di A ha radici distinte. Siccome una matrice è semisemplice se e solo se il suo polinomio minimo ha radici distinte, A, e quindi anche f, è semisemplice.