Primo esonero di Geometria IV

10 maggio 2013

1. Provare che l'iperbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}$ è omeomorfa a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Soluzione. Sia $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ la restrizione della proiezione sul primo fattore da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Tale mappa è continua essendo una restrizione di una funzione continua. Anche la sua inversa $x \longmapsto (x, 1/x)$ è continua avendo componenti continue. Ciò prova che π è un omeomorfismo.

2. Dimostrare che $\mathbb{Z}^n$ è un sottospazio discreto di $\mathbb{R}^n$.

   Soluzione. Sia $u \doteq (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n$, sia $\epsilon \doteq 1/2$ e consideriamo l'aperto

   $$U \doteq (u_1 - \epsilon, u_1 + \epsilon) \times (u_2 - \epsilon, u_2 + \epsilon) \times \cdots \times (u_n - \epsilon, u_n + \epsilon)$$

   di $\mathbb{R}^n$. Allora $U \cap \mathbb{Z}^n = \{u\}$ è un aperto di $\mathbb{Z}^n$ con la topologia di sottospazio. Questo prova che ogni punto è aperto e quindi la topologia su $\mathbb{Z}^n$ è quella discreta.

3. Siano X uno spazio topologico e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione *localmente costante*, cioè tale che per ogni $x \in X$ esista un intorno U di x per cui: $f(y) = f(x)$ per ogni $y \in U$.

   (i) Provare che f è continua e che f è costante sulle componenti connesse di X.

   (ii) Dare un esempio di una funzione localmente costante che assuma infiniti valori distinti.

   Soluzione.

   (i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ qualsiasi e sia $x \in V \doteq f^{-1}(A)$. Visto che f è localmente costante, esiste U intorno di x per cui $f(y) = f(x) \in A$ per ogni $y \in U$; quindi $U \subseteq V$. Questo prova che V è intorno di ogni suo punto, cioè V è aperto. Applicando ora quanto provato a $B \doteq \mathbb{R} \setminus A$ abbiamo che anche $f^{-1}(B) = X \setminus V$ è aperto, cioè V è anche chiuso. Abbiamo cioè provato che la controimmagine di ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è aperta e chiusa in X.

   In particolare f è continua. Se poi C è una componente connessa di X e x è un suo punto allora la controimmagine di $A \doteq \{f(x)\}$ è non vuota, aperta e chiusa e interseca C. Deve quindi coincidere con C, cioè $f(C) \subseteq \{f(x)\}$ e quindi f è costante su C.

   (ii) Basta considerare l'inclusione $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Tale mappa è continua e localmente costante essendo $\mathbb{Z}$ discreto in $\mathbb{R}$; inoltre assume come valori tutti gli interi.

4. Sia $f : \mathsf{S}^1 \longrightarrow \mathsf{S}^n$ un'applicazione per cui la controimmagine di ogni compatto di S^n è compatta in S^1. Dimostrare che f è chiusa.

   Soluzione. Sia C un chiuso di S^n, allora C è compatto essendo S^n compatto. Quindi $f^{-1}(C)$ è compatto in S^1 per l'ipotesi su f. Ma S^1 è $\mathsf{T2}$ essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che è uno spazio $\mathsf{T2}$, in particolare $f^{-1}(C)$ è chiuso essendo compatto in un $\mathsf{T2}$. Questo prova che la controimmagine di un chiuso è chiusa, cioè che f è continua.

   Sia ora K un chiuso di S^1. Essendo S^1 compatto e f continua anche $f(K)$ è compatto. Ma S^n è $\mathsf{T2}$ e quindi $f(K)$ è chiuso. Abbiamo così provato che l'immagine di un chiuso è chiusa, cioè che f è una mappa chiusa.

   (Si noti che le uniche proprietà che usiamo di S^1 e S^n è che essi sono spazi compatti e $\mathsf{T2}$.)