Geometria IV
Soluzioni dell'Esonero di Topologia
10 maggio 2016

1. Siano $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\}$, $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\}$ e $X = \{(0, 0)\} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus H)$, $Y = \{(0, 0)\} \cup (\mathbb{R}^2 \setminus (H \cup V))$. Provare che

   (i) X e Y sono connessi per archi,

   (ii) X e Y non sono omeomorfi.

   Soluzione. Proviamo che X è connesso per archi, la stessa dimostrazione funziona anche per Y. Sia $p = (x, y)$ un punto di X, abbiamo $y \neq 0$. Consideriamo il segmento S che congiunge $(0, 0) \in X$ a p. Tranne il punto iniziale, tutti gli altri suoi punti hanno seconda coordinata diversa da 0; cioè $S \subseteq X$. Questo prova che ogni punto di X può essere collegato a $(0, 0)$; ne segue che X è connesso per archi.

   Ora, se X, Y fossero omeomorfi allora dovrebbe esistere un punto q di Y per cui il numero di componenti connesse di $X \setminus \{(0, 0)\}$ è uguale a quello di $Y \setminus \{q\}$. Ma il primo spazio ha 2 componenti connesse mentre il secondo ne ha 4, nel caso $q = (0, 0)$, oppure 1 per ogni altro punto q. È quindi dimostrato che X e Y non sono omeomorfi.

2. Dati due spazi topologici X e Y dimostrare che le componenti connesse di $X \times Y$ sono tutti e soli i sottoinsiemi $C \times D$ con C componente connessa di X e D componente connessa di Y.

   Soluzione. Sia $(x, y) \in X \times Y$ e sia U un connesso di $X \times Y$ che contiene (x, y). Essendo le proiezioni continue, avremo che $\pi_X(U)$ è un connesso di X che contiene x e $\pi_Y(U)$ è un connesso di Y che contiene y. Ma allora, indicate con C e D le componenti connesse di x e y rispettivamente, abbiamo $\pi_X(U) \subseteq C$ e $\pi_Y(U) \subseteq D$; cioè $U \subseteq C \times D$. Quindi la componente connessa di (x, y) è $C \times D$, essendo questo insieme un connesso in quanto prodotto di spazi connessi.

3. Siano n e m due naturali e $f : \mathsf{S}^n \longrightarrow \mathsf{S}^m$ un'applicazione continua. Provare che f è chiusa e che f può essere non aperta.

   Soluzione. Sia C un chiuso di S^n. Essendo S^n un compatto, anche C è compatto e quindi anche $f(C)$ visto che f è continua. Ma S^m è un sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$ ed è quindi T_2; da ciò segue che un compatto deve essere chiuso in S^m. In particolare il compatto $f(C)$ è chiuso. L'applicazione è allora chiusa.

   Per mostrare che f può non essere aperta prendiamo $n = 0$, $m = 1$ e f la restrizione dell'inclusione di $\mathbb{R}^1$ in $\mathbb{R}^2$: f manda il punto ± 1 di S^0 in $(\pm 1, 0)$ di S^1. È chiaro che l'aperto $\{1\}$ non ha per immagine un aperto in quanto i punti non sono aperti in S^1: ogni intorno di $(1, 0)$ conterrà anche infiniti altri punti di S^1. (In generale l'inclusione $\mathsf{S}^n \longrightarrow \mathsf{S}^m$ è non aperta per ogni $n < m$.)

4. Dato uno spazio metrico (X, d), sia X^∞ l'insieme di tutte le applicazioni $\mathbb{N} \longrightarrow X$. Dimostrare che

$$(f, g) \xmapsto{\delta} \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f(n), g(n))$$

   definisce una distanza su X^∞.

   Soluzione. È chiaro che δ è non negativa, assume il valore 0 solo se $f = g$ ed è simmetrica. Proviamo che vale la disuguaglianza triangolare. Siano f, g, h tre applicazioni da $\mathbb{N}$ in X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$d(f(n), g(n)) \leq d(f(n), h(n)) + d(h(n), g(n) \leq \sup d(f(n), h(n)) + \sup d(h(n), g(n)) = \delta(f, h) + \delta(h, g)$$

dove la prima disuguaglianza vale in quanto d è una distanza su X. Ma allora, per le proprietà del sup, vale anche

$$\delta(f,g) = \sup d(f(n), g(n) \leq \delta(f,h) + \delta(h,g)$$

che è la disuaglianza triangolare da dimostrare.