Primo esonero di Geometria IV

22 maggio 2015

1. Siano X e Y spazi topologici e sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione. Dimostrare che

   (i) se $f^{-1}(A)$ è un aperto di X per ogni aperto A di una base della topologia di Y, allora f è continua,

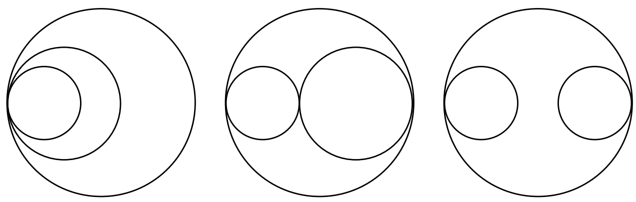
   (ii) se $f(A)$ è un aperto di Y per ogni aperto A di una base della topologia di X, allora f è aperta.

   Soluzione.

   (i) Sia B un qualsiasi aperto di Y. Allora, per definizione di base, B è unione di certi insiemi A_i, $i \in \mathcal{I}$, elementi della base di Y. Ma allora, visto che per ipotesi $f^{-1}(A_i)$ è aperto per ogni $i \in \mathcal{I}$, abbiamo che $f^{-1}(B) = f^{-1}(\cup_{i\in\mathcal{I}} A_i) = \cup_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$ è quindi aperto. Essendo la controimmagine di ogni aperto di Y un aperto in X, la funzione f è continua.

   (ii) Sia B un qualsiasi aperto di X. Allora, per definizione di base, B è unione di certi insiemi A_i, $i \in \mathcal{I}$, elementi della base di X. Ma allora, visto che per ipotesi $f(A_i)$ è aperto per ogni $i \in \mathcal{I}$, abbiamo che $f(B) = f(\cup_{i\in\mathcal{I}} A_i) = \cup_{i\in\mathcal{I}} f(A_i)$ è quindi aperto. Essendo l'immagine di ogni aperto di X un aperto in Y, la funzione f è aperta.

2. Provare che i tre sottospazi di $\mathbb{R}^2$ in figura sono a due a due non omeomorfi tra di loro.

   Soluzione. Contiamo il massimo numero di componenti connesse degli spazi in figura dopo aver rimosso da essi un punto. Per il primo spazio abbiamo al massimo tre componenti connesse quando rimuoviamo il punto di tangenza comune alle tre circonferenze. Il secondo spazio resta invece connesso qualsiasi punto si rimuova da esso e, infine, il terzo spazio si spezza in due componenti connesse se togliamo uno dei due punti di tangenza. Questi numeri sono quindi diversi tra loro.

   D'altra parte, se $f : X \longrightarrow Y$ è un omeomorfismo tra spazi topologici e p è un punto di X, si ha che la restrizione di f a $X \setminus \{p\}$ è ancora un omeomorfismo con $Y \setminus \{f(p)\}$. In particolare il numero di componenti connesse di $X \setminus \{p\}$ e di $Y \setminus \{f(p)\}$ deve essere lo stesso. Concludiamo quindi che nessuna coppia tra gli spazi in figura è omeomorfa.

3. Diciamo che una successione $(x_n)_n$ di numeri reali è *limitata* se esiste $M \geq 0$ per cui $|x_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Date due successioni limitate $x = (x_n)_n$ e $y = (y_n)_n$ definiamo

   $$d(x, y) \doteq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

   Dimostrare che $d(x, y) < \infty$ per ogni x, y e che d definisce una distanza sull'insieme di tutte le successioni limitate di numeri reali.

Soluzione. Se x e y sono successioni limitate, diciamo $|x_n| \leq M$ e $|y_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $d(x, y) = \sup |x_n - y_n| \leq M + L$. In particolare $d(x, y) < \infty$.

Abbiamo poi $d(x, y) \geq 0$ visto che facciamo il sup di numeri non negativi. Inoltre $\sup |x_n - y_n| = 0$ se e solo se $|x_n - y_n| = 0$ per ogni n, cioè se e solo se $x = y$.

Dalla stessa definizione segue poi $d(x, y) = \sup |x_n - y_n| = \sup |y_n - x_n| = d(y, x)$. Infine se z è una terza successione limitata di numeri reali allora abbiamo $d(x, y) = \sup |x_n - y_n| = \sup |x_n - z_n + z_n - y_n| \leq \sup |x_n - z_n| + \sup |z_n - y_n| = d(x, z) + d(z, y)$, cioè la disuguaglianza triangolare. Questo finisce la dimostrazione che d è una distanza sull'insieme di tutte le successioni limitate.

4. Siano X e Y spazi topologici e sia $\Gamma_f \doteq \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subset X \times Y$ il grafico di un'applicazione $f : X \longrightarrow Y$. Provare che

   (i) per ogni sottoinsieme C di Y si ha $f^{-1}(C) = \pi_X(\Gamma_f \cap (X \times C))$,

   (ii) se Y è compatto e di Hausdorff e Γ_f è chiuso in $X \times Y$ allora f è continua.

   Soluzione.

   (i) Sia $x \in f^{-1}(C)$, allora il punto $(x, f(x))$ è in $X \times C$ e anche in Γ_f per definizione di grafico. Quindi $x = \pi_X(x, f(x))$ è un elemento di $\pi_X(\Gamma_f \cap (X \times C))$.
   Viceversa se $x \in \pi_X(\Gamma_f \cap (X \times C))$ allora esiste un $y \in Y$ con $(x, y) \in \Gamma_f \cap (X \times C)$. Ma allora da $(x, y) \in \Gamma_f$ abbiamo $y = f(x)$ e da $(x, y) \in X \times C$ si ha $y = f(x) \in C$, cioè $x \in f^{-1}(C)$. L'uguaglianza tra i due insiemi è quindi provata.

   (ii) Proviamo che f è continua facendo vedere che $f^{-1}(C)$ è un chiuso di X per ogni C chiuso di Y.
   Infatti, se C è un chiuso di Y allora $X \times C$ è un chiuso di $X \times Y$. Ma allora anche $\Gamma_f \cap (X \times C)$ lo è visto che Γ_f è chiuso per ipotesi e intersezione di chiusi è chiusa. Osserviamo ora che $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ è un'applicazione chiusa essendo Y compatto. Possiamo quindi concludere, usando quanto provato nel punto precedente, che $f^{-1}(C) = \pi_X(\Gamma_f \cap (X \times C))$ è un chiuso di X.
   (Si noti che non abbiamo usato l'ipotesi che Y sia Hausdorff.)