Secondo esonero di Geometria IV

31 maggio 2013

1. Calcolare la forma di Jordan e il polinomio minimo dell'endomorfismo

$$\mathbb{K}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y - z + \frac{1}{2}t \\ -t \\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t \\ -y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$$

dove $\mathbb{K}$ è un campo di caratteristica diversa da 2.

Soluzione. La matrice associata all'endomorfismo è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $p_A(t) = \det(A - t\,\mathrm{Id}) = (1-t)^2(1+t)^2$. Quindi $\Sigma(A) = \{\pm 1\}$ e per il polinomio minimo si ha $\mu_A(t) = (t-1)^{m_1}(t+1)^{m_{-1}}$ con $m_1 \leq 2$ e $m_{-1} \leq 2$ visto che $\mu_A(t)$ divide $p_A(t)$. In particolare la forma di Jordan di A avrà 1–blocchi e (-1)–blocchi grandi al massimo 2.

Calcolando il rango di $A - \mathrm{Id}$ si trova 3 e quindi l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 1. Questo basta per concludere che vi è un solo 1–blocco 2×2.

Invece il rango di $A + \mathrm{Id}$ è 2 e quindi l'autovalore -1 ha molteplcità geometrica 2. Allora avremo due (-1)–blocchi 1×1. In conclusione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

è la forma di Jordan dell'endomorfismo (a meno dell'ordine dei blocchi). In particolare il polinomio minimo è $(t-1)^2(t+1)$.

2. Decidere quali tra le seguenti matrici di $\mathbb{Q}^{3,3}$ sono simili tra loro

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. La seconda e quarta matrice sono in forma di Jordan e differiscono solo per l'ordine dei blocchi, esse sono quindi simili. La terza matrice è in forma di Jordan se passiamo alla base e_1, e_3, e_2 e ha la stessa forma di Jordan della seconda a cui è quindi simile.

Indichiamo con A la quinta matrica. Il polinomio caratteristico è $(1+t)(1-t)^2$ (è una matrice triangolare); quindi i suoi autovalori sono ± 1. Bisogna solo decidere se 1 ha molteplicità geometrica 1 o 2, ma il rango di $A - \mathrm{Id}$ è 2 e quindi la molteplicità cercata è 1.

Concludiamo che tutte le matrici sono simili tra loro tranne la prima (che è già in forma di Jordan).

3. Provare che l'insieme delle matrici nilpotenti in $\mathbb{C}^{5,5}$ è unione di classi di similitudine e trovare il numero di tali classi.

   Soluzione. Se A è nilpotente, diciamo $A^h = 0$, e $C \in \mathsf{GL}_5(\mathbb{C})$ allora $(CAC^{-1})^h = CA^hC^{-1} = 0$. Questo prova che l'insieme delle matrici nilpotenti è stabile per similitudine, esso è quindi unione di classe di similitudine.

   Sappiamo che una matrice nilpotente ha polinomio minimo t^h per qualche h intero positivo. In particolare l'unico suo autovalore è 0. Quindi ammette una forma di Jordan (su ogni campo, l'ipotesi che il campo sia $\mathbb{C}$ è superflua) e tale forma è somma di 0–blocchi di varie dimensioni: diciamo $n_1, n_2, \ldots, n_r$. Ma $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = 5$ e quindi, a meno dell'ordine dei blocchi, abbiamo le sette possibilità seguenti

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 \\ &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

   Visto che le forme di Jordan a meno dell'ordine dei blocchi sono in bigezione con le classi di similitudine, concludiamo che l'insieme delle matrici nilpotenti di $\mathbb{C}^{5,5}$ è unione di 7 classi.

4. Dimostrare che se una matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ verifica $A^5 = A$ allora è semisemplice.

   Soluzione. La matrice annulla il polinomio $p(t) = t^5 - t = t(t-1)(t+1)(t-i)(t+i)$, quindi $\mu_A(t)$ è un divisore di $p(t)$. Ma $p(t)$ non ha radici multiple, allora neanche $\mu_A(t)$ ha radici multiple. Quindi A è semisemplice.