Esonero di Geometria IV, topologia

5 giugno 2013

1. Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ e $Y = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$. Provare che $X \setminus Y$ è connesso per archi.

   Soluzione. Sia $p = (0, 1/2) \in X$ (o qualsiasi altro punto con seconda coordinata non nulla). Ogni punto x in $X \setminus Y$ con seconda coordinata non negativa può essere collegato a p con il segmento di estremi x, p. Inoltre un punto x con seconda coordinata negativa può essere collegato a $(\sqrt{2}/2, 0)$ (o qualsiasi altro punto con prima coordinata non razionale e seconda coordinata nulla). Quindi ogni punto può essere collegato a p, cioè, $X \setminus Y$ è connesso per archi.

2. (i) Siano Y_1, Y_2 due sottospazi compatti di uno spazio topologico X. Provare che $Y_1 \bigcup Y_2$ è compatto.

   (ii) Provare che se n è un intero positivo e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sono sottospazi compatti allora anche $Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup \cdots \bigcup Y_n$ è compatto.

   (iii) È vero che se $\{Y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ è un famiglia di sottospazi compatti di X allora anche $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ è compatto?

   Soluzione.

   (i) Sia $\{A_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{I}$ un insieme di indici, un ricoprimento aperto di $Y_1 \cup Y_2$. Allora $Y_1 \subseteq Y_1 \cup Y_2 \subseteq \cup_{i\in\mathcal{I}} A_i$ e quindi esiste un sottoinsieme finito $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}$ tale che $Y_1 \subseteq \cup_{i\in\mathcal{I}_1} A_i$; analogamente esiste $\mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I}$ finito con $Y_2 \subseteq \cup_{i\in\mathcal{I}_2} A_i$. Allora $Y_1 \cup Y_2 \subseteq \cup_{i\in\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2} A_i$ e $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ è finito. Ciò prova che ogni ricoprimento aperto di $Y_1 \cup Y_2$ ammette un sottoricoprimento finito. Quindi $Y_1 \cup Y_2$ è compatto.

   (ii) Per induzione su n. Il passo base $n = 1$ è ovvio. Supponiamo allora che $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$ sia compatto; dal punto precedente anche $(Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n) \cup Y_{n+1}$ è compatto.

   (iii) In generale l'unione di infiniti compatti non è compatta: ad esempio si consideri $Y_n = \{n\}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, ogni Y_n è compatto essendo chiuso e limitato ma $\cup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \mathbb{N}$ non è compatto.

3. Sia (X, d) uno spazio metrico, k un intero positivo e sia $d'(x,y) \doteq \sqrt[k]{d(x,y)}$ per $x, y \in X$. Provare che

   (i) d' è una distanza su X,

   (ii) d' è equivalente a d, cioè induce la stessa topologia su X.

   Soluzione.

   (i) Siano $x, y \in X$, abbiamo $d'(x,y) = \sqrt[k]{d(x,y)} \geq 0$ e l'uguaglianza vale se e solo se $d(x,y) = 0$, cioè se e solo se $x = y$ visto che d è una distanza. Inoltre $d'(x,y) = \sqrt[k]{d(x,y)} = \sqrt[k]{d(y,x)} = d'(y,x)$ essendo d simmetrica. Proviamo ora la disuguaglianza triangolare per d': per ogni $x, y, z \in X$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
d'(x,y) &= \sqrt[k]{d(x,y)} \\
&\leq \sqrt[k]{d(x,z) + d(z,y)} \\
&\leq \sqrt[k]{d(x,z)} + \sqrt[k]{d(z,y)} \\
&= d'(x,z) + d'(z,y)
\end{aligned}
$$

dove l'ultima disuguaglianza si prova elevando alla k e usando lo sviluppo di Newton del binomio.

(ii) Ciò è chiaro in quanto $d(x, y) \leq \epsilon$ se e solo se $d'(x, y) \leq \sqrt[k]{\epsilon}$ e questo è un criterio di equivalenza visto a lezione.

4. Siano $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ due applicazioni continue con X spazio topologico di Hausdorff tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Q}^n$. Dimostrare che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

   Soluzione. Sia Δ l'insieme dei punti in cui f e g coincidono. Essendo Y Hausdorff, Δ è chiuso in $\mathbb{R}^n$ (visto a lezione). Quindi l'insieme A degli $x \in X$ per cui $f(x) \neq g(x)$ è aperto. Ma $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ e quindi $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$; allora $\mathbb{Q}^n$ interseca ogni aperto. In particolare interseca l'aperto A se esso è non vuoto.

   Ma per ipotesi $A \cap \mathbb{Q}^n$ è vuoto. Quindi A deve essere vuoto, cioè $\Delta = \mathbb{R}^n$ e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in X$.

Esonero di Geometria IV, algebra lineare

5 giugno 2013

1. Determinare la forma di Jordan e il polinomio minimo del seguente endomorfismo

$$\mathbb{C}^5 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 + x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5.$$

   Soluzione. La matrice associata all'endomorfismo è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Il polinomio caratteristico di A è $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = (1-t)^5$ e quindi abbiamo solo l'autovalore 1. Si calcola subito che $(A - \mathrm{Id})^2 = 0$ e che $A - \mathrm{Id}$ ha rango 2. Quindi il massimo della dimensione dei blocchi è 2 e il loro numero è la molteplicità geometrica, cioè $5 - \mathrm{rk}(A - \mathrm{Id}) = 5 - 2 = 3$. In conclusione la forma di Jordan di A è $J_2(1) \oplus J_2(1) \oplus J_1(1)$.

   In particolare il polinomio minimo è $(1-t)^2$.

2. Esibire due matrici A e B *non* simili tra di loro con lo stesso polinomio minimo, lo stesso polinomio caratteristico e tali che ogni autovalore abbia la stessa molteplicità geometrica per A e B.

   Soluzione. Cerchiamo A e B in forma di Jordan. Così, se le forme sono diverse non solo per l'ordine dei blocchi, allora A e B non sono simili.

   Avendo lo stesso polinomio caratteristico, A e B hanno lo stesso spettro. Inoltre la condizione di avere lo stesso polinomio minimo impone che ogni autovalore deve avere la stessa dimensione massima dei suoi blocchi in A e B. Infine avere la stessa molteplicità geometrica impone che per ogni autovalore il numero dei suoi blocchi sia lo stesso in A e B.

   Allora $A = J_3(0) \oplus J_3(0) \oplus J_1(0)$, $B = J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_2(0)$ verificano tutte le condizioni e non sono coniugate in quanto non differisco solo per l'ordine dei blocchi.

3. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ una matrice con $\Sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e tale che $\mu_A(t) = p_A(t)$. Trovare le possibili forme di Jordan di A.

   Soluzione. Avremo $p_A(t) = (\lambda_1 - t)^h(\lambda_2 - t)^{n-h}$ dove h è la somma delle dimensioni dei λ_1–blocchi (e quindi $n - h$ è la somma delle dimensioni dei λ_2–blocchi). Ma allora da $\mu_A(t) = p_A(t)$ troviamo che h è la dimensione massima dei λ_1–blocchi e $n - h$ è la dimensione massima dei λ_2–blocchi. Quindi vi è un solo λ_1–blocco di dimensione h e un solo λ_2 blocco di dimensione $n - h$.

   Concludiamo che le possibili forme di Jordan per A sono $J_h(\lambda_1) \oplus J_{n-h}(\lambda_2)$ con $h = 1, 2, \ldots, n-1$.

4. Sia $N \in \mathbb{C}^{n,n}$ una matrice nilpotente e sia $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio. Provare che

(i) se $p(0) = 0$ allora $p(N)$ è una matrice nilpotente,

(ii) se $p(0) \neq 0$ allora $p(N)$ è una matrice invertibile.

Soluzione.

(i) Visto che $p(0) = 0$, t divide $p(t)$, cioè $p(t) = tq(t)$ con $q(t) \in \mathbb{C}[t]$. Quindi $p(N) = Nq(N)$. Osserviamo ora che N commuta con $q(N)$ in quanto $q(N)$ è una combinazione lineare di potenze di N. Se $N^h = 0$ allora abbiamo $p(N)^h = (Nq(N))^h = N^h q(N)^h = 0$ e quindi anche $p(N)$ è nilpotente.

(ii) Possiamo scrivere $p(t) = a(1 + tq(t))$ con $a \neq 0$ e $q(t) \in \mathbb{C}[t]$. Allora per quanto visto al punto predendente $M \doteq Nq(N)$ è nilpotente; sia h il suo indice di nilpotenza. Abbiamo $(\mathrm{Id} + M)(\mathrm{Id} - M + M^2 - M^3 + \cdots + (-M)^{h-1}) = \mathrm{Id} - M^h = \mathrm{Id}$ e quindi $\mathrm{Id} + M$ è invertibile. Ma allora anche $p(N) = a(\mathrm{Id} + M)$ è invertibile essendo $a \neq 0$.

Prova scritta di Geometria IV

5 giugno 2013

1. Sia $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $Y = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Q}\}$. Provare che $X \setminus Y$ è connesso per archi.

2. (i) Siano Y_1, Y_2 due sottospazi compatti di uno spazio topologico X. Provare che $Y_1 \bigcup Y_2$ è compatto.

   (ii) Provare che se n è un intero positivo e $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sono sottospazi compatti allora anche $Y_1 \bigcup Y_2 \bigcup \cdots \bigcup Y_n$ è compatto.

   (iii) È vero che se $\{Y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ è un famiglia di sottospazi compatti di X allora anche $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ è compatto?

3. Determinare la forma di Jordan e il polinomio minimo del seguente endomorfismo

$$\mathbb{C}^5 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 + x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5.$$

4. Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ una matrice con $\Sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e tale che $\mu_A(t) = p_A(t)$. Trovare le possibili forme di Jordan di A.