Esonero di Geometria IV, topologia

5 luglio 2013

1. Sia $\Gamma \doteq \{(x, \sin x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ il grafico della funzione $x \longmapsto \sin x$. Provare che Γ è omeomorfo ad $\mathbb{R}$.

   Soluzione. La mappa di proiezione $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \stackrel{\pi}{\longmapsto} x \in \mathbb{R}$ è un'applicazione continua. Essa è una bigezione ristretta a Γ e l'inversa $\mathbb{R} \ni x \longmapsto (x, \sin x) \in \Gamma$ di questa restrizione è continua in quanto le sue due componenti sono continue. Quindi $\pi_{|\Gamma}$ è un omeomorfismo da Γ ad $\mathbb{R}$.

2. Dimostrare che il complementare della circonferenza $C \doteq \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$ ha due compomenti connesse. Provare inoltre che tali componenti connesse sono connesse per archi.

   Soluzione. Sia $X_1 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ e $X_2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 1\}$. È chiaro che il complementare X di C in $\mathbb{R}^2$ è l'unione disgiunta di X_1 e X_2.

   Consideriamo la funzione continua $X \ni (x, y) \stackrel{f}{\longmapsto} x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. Abbiamo $X_1 = f^{-1}((-\infty, 1)) = f^{-1}([0, 1])$ e quindi X_1 è aperto e chiuso in X. Allo stesso modo $X_2 = f^{-1}((1, +\infty)) = f^{-1}([1, +\infty))$ e quindi anche X_2 è aperto e chiuso.

   Inoltre X_1, l'interno della circonferenza C, è un convesso; in particolare X_1 è connesso per archi. Mentre X_2 è il complementare di $C \cup X_1$ e quindi anche X_2 è connesso per archi essendo $C \cup X_1$ ancora convesso.

   Abbiamo quindi provato che X_1 e X_2 sono le componenti connesse di X ed esse sono inoltre connesse per archi.

3. Sia X uno spazio topologico connesso e sia Y un insieme dotato della topologia discreta. Provare che ogni funzione continua da X in Y è costante.

   Soluzione. L'immagine di un connesso attraverso una funzione continua è un connesso. Quindi $f(X)$ è un connesso per la topologia discreta di Y. Ma gli insiemi connessi per la topologia discreta sono solo quelli formati da un solo punto. Cioè $f(X) = \{y\}$ per qualche $y \in Y$; come dire $f(x) = y$ per ogni $x \in X$, cioè f è costante.

4. Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $C \subseteq X$ un suo sottospazio compatto. Dato $x \in X \setminus C$ provare che esiste un intorno U di x e un aperto V che contiene C per cui $U \cap V = \varnothing$.

   Soluzione. Se $y \in C$ allora $y \neq x$ visto che $x \notin C$. Quindi, essendo X di Hausdorff, esiste un aperto U_y contenente x e un aperto V_y contenente y con $V_y \cap U_y = \varnothing$.

   In particolare la famiglia $\{V_y \,|\, y \in C\}$ è un ricoprimento aperto di C. Ma C è compatto, esiste quindi un sottoricoprimento finito, esistono cioè $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C$ per cui $C \subseteq V \doteq V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Si noti inoltre che V è aperto.

   Sia ora U l'aperto $U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Abbiamo $x \in U$ visto che $x \in U_{y_h}$ per ogni $h = 1, 2, \ldots, n$. Se proviamo che $U \cap V = \varnothing$ abbiamo concluso. Sia allora $z \in U \cap V$ per assurdo.

   Dalla definizione di V, esiste $1 \leq k \leq n$ per cui $z \in V_{y_k}$. Ma da $z \in U$ abbiamo $z \in U_{y_k}$ e allora si dovrebbe avere $z \in U_{y_k} \cap V_{y_k} = \varnothing$ che è impossibile.

Esonero di Geometria IV, algebra lineare

5 luglio 2013

1. Calcolare la forma di Jordan del seguente endomorfismo di $\mathbb{Q}^5$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ x+y+t \\ -y+t+u \\ -x-t-u \end{pmatrix}$$

Soluzione. La matrice associata all'endomorfismo nella base canonica $e_1, e_2, \dots, e_5$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è $p(t) = \det(A - t\,\mathrm{Id}) = -t^3(1-t)^2$. Quindi f ha spettro $\{0,1\}$; in particolare f ammette una forma di Jordan su $\mathbb{Q}$ visto che tale spettro è contenuto in $\mathbb{Q}$ (in realtà la forma di Jordan esiste sempre, 0 e 1 sono in ogni campo). Visto che il polinomio minimo di A divide $p(t)$, si ha che il massimo della dimensione degli 1–blocchi è 2 e il massimo della dimensione degli 0–blocchi è 3.

Calcoliamo ora la molteplicità geometrica $\mathrm{mg}(0)$ dell'autovalore 0. Visto che $\mathrm{rk}\,A = 4$ si ha $\mathrm{mg}(0) = 5 - 4 = 1$. C'è quindi un solo 0–blocco; indichiamo con n la sua dimensione.

Analogamente $\mathrm{mg}(1) = 5 - \mathrm{rk}(A - \mathrm{Id}) = 5 - 4 = 1$ è quindi anche per l'autovalore 1 c'è un solo blocco; sia m la sua dimensione.

Per quanto abbiamo provato: $1 \le n \le 3$, $1 \le m \le 2$ e $n + m = 5$. L'unica possibilità è $n = 3$ e $m = 2$. La forma di Jordan dell'endomorfismo è quindi $J_3(0) \oplus J_2(1)$.

2. Se un endomorfismo f di uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ è tale che $f^3 = \mathrm{Id}$, allora f è semisemplice.

Soluzione. Sia $f : V \longrightarrow V$ l'endomorfismo considerato e sia A la matrice associata ad f rispetto ad una qualche base di V. Allora $A^3 - \mathrm{Id} = 0$, cioè $t^3 - 1 \in \ker v_A$.

Visto che il polinomio minimo $\mu_A(t)$ di A è il generatore monico di $\ker v_A$, abbiamo che $\mu_A(t)$ divide $t^3 - 1 = (t-1)(t-\omega_1)(t-\omega_2)$ con $\omega_{1/2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Allora $\mu_A(t)$ ha radici distinte visto che $t^3 - 1$ ha radici distinte.

In particolare la massima dimensione di un blocco di Jordan relativo ad un autovalore $\lambda \in \Sigma(f) \subseteq \{0, \omega_1, \omega_2\}$ è 1. Quindi f è semisemplice.

3. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{C}^7$ con un solo autovalore λ. Trovare le possibili forme di Jordan di f sapendo che il suo polinomio minimo ha grado 3 e che λ ha molteplicità geometrica 3.

Soluzione. Visto che λ è l'unico autovalore, il polinomio minimo di f è $\mu_A(t) = (t-\lambda)^3$. Allora il massimo di un λ–blocco di Jordan è 3. Inoltre vi sono tre λ–blocchi in quanto 3 è la molteplicità geometrica di λ.

Sia allora $J_a(\lambda) \oplus J_b(\lambda) \oplus J_c(\lambda)$ la forma di Jordan considerata, in cui possiamo supporre $a \ge b \ge c \ge 1$ visto che la forma di Jordan è definita a meno dell'ordine dei blocchi.

Abbiamo, per quanto provato, $a = 3$ e inoltre $a + b + c = 7 = \dim \mathbb{C}^7$. Le possibilità sono quindi $b = 3$, $c = 1$ e $b = 2$, $c = 2$. Le forma di Jordan possibili sono quindi $J_3(\lambda) \oplus J_3(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$ e $J_3(\lambda) \oplus J_2(\lambda) \oplus J_2(\lambda)$.

4. Sia A un matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ e sia $A = S + N$ la sua decomposizione di Wedderburn, con S semisemplice e N nilpotente. Dimostrare che un sottospazio $V \subseteq \mathbb{C}^n$ è A–invariante se e solo se è S–invariante e N–invariante.

   Soluzione. Sia V un sottospazio A–invariante. Se $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{C}[t]$, allora per ogni $v \in V$ si ha $f(A)v = a_0 v + a_1 Av + \cdots + a_n A^n v \in V$ visto che $A^h v \in V$ essendo V invariante.

   Ricordiamo ora che esistono polinomi $p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]$ tali che $S = p(A)$ e $N = q(A)$. Allora per ogni $v \in V$, $Sv = p(A)v \in V$ e $Nv = q(A)v \in V$ per quanto visto.

   Viceversa se V è S–invariante e N–invariante allora $Av = Sv + Nv \in V$ per ogni $v \in V$.