Prova scritta di Geometria IV

6 settembre 2013

1. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice *raro* se ha parte interna vuota. Dimostrare che

   (i) A è raro se e solo se $X \setminus A$ è denso in X,

   (ii) se $f : X \longrightarrow Y$ è un'applicazione aperta e B è raro in Y allora $f^{-1}(B)$ è raro in X.

   Soluzione.

   (i) A è raro se e solo se $\overset{\circ}{A} = \varnothing$, ma $\overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$ e quindi l'asserto segue dalla definizione di denso.

   (ii) Sia A un aperto contenuto in $f^{-1}(B)$, allora $f(A)$ è contenuto in B ed è un aperto, essendo f aperta. Basta ora usare che B è raro per avere che $f(A) = \varnothing$ e quindi anche $A = \varnothing$. Non contenendo nessun aperto si ha $\overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}} = \varnothing$, cioè $f^{-1}(B)$ è raro in X.

2. Sia $X = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dove su $\mathbb{R}$ consideriamo la topologia euclidea e ∞ è un elemento *non* di $\mathbb{R}$. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi U di X tali che o U è un aperto di $\mathbb{R}$ o U contiene ∞ e $X \setminus U$ è compatto in $\mathbb{R}$. Provare che

   (i) $\mathcal{F}$ è una topologia su X,

   (ii) X è compatto con la topologia $\mathcal{F}$.

   Soluzione.

   (i) La famiglia $\mathcal{F}$ è una topologia in quanto valgono le seguenti tre proprietà.

      (a) Il vuoto è un aperto di $\mathbb{R}$ e quindi è un elemento di $\mathcal{F}$. Inoltre X contiene ∞ e il suo complementare in X è il vuoto che è compatto in $\mathbb{R}$; quindi anche $X \in \mathcal{F}$.

      (b) Sia $\mathcal{U}$ una sottofamiglia di $\mathcal{F}$ e sia $V \doteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ l'unione dei suoi elementi; vogliamo provare che V è ancora un elemento di $\mathcal{F}$.
      Se esiste $W \in \mathcal{U}$ per cui $\infty \in W$ allora $\infty \in V$ e, inoltre, $X \setminus V = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U$ è un sottoinsieme chiuso (in quanto in $\mathbb{R}$ i compatti sono chiusi) del compatto $X \setminus V$. Allora, a sua volta, $X \setminus W$ è un compatto di $\mathbb{R}$ e quindi V è un elemento di $\mathcal{F}$, per definizione di $\mathcal{F}$.
      Se invece ∞ non è in U per ogni U in $\mathcal{U}$, allora, dalla definizione di $\mathcal{F}$, ogni U è un aperto di $\mathbb{R}$. Quindi anche la loro unione V è un aperto di $\mathbb{R}$ e perciò appartiene a $\mathcal{F}$.

      (c) Siano U e V due elementi di $\mathcal{F}$. Se $\infty \in U \cap V$ allora $X \setminus U$ e $X \setminus V$ sono compatti di $\mathbb{R}$ e quindi anche $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$; possiamo concludere che $U \cap V$ è in $\mathcal{F}$ per definizione. Se invece $\infty \notin U \cap V$ allora $U \cap V = (U \setminus \{\infty\}) \cap (V \setminus \{\infty\})$ e $U \setminus \{\infty\}$ e $V \setminus \{\infty\}$ sono aperti indipendentemente dal fatto che ∞ sia o meno in tali insiemi (usando ancora che i compatti di $\mathbb{R}$ sono chiusi).

   (ii) Sia ora $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste $U \in \mathcal{U}$ con $\infty \in U$, quindi $X \setminus U$ è un compatto di $\mathbb{R}$ e la famiglia di aperti $V \setminus \{\infty\}$ di $\mathbb{R}$, con $V \in \mathcal{U} \setminus \{U\}$, è un ricoprimento aperto di $X \setminus U$. Esiste quindi una sottofamiglia finita dei $V \setminus \{\infty\}$ che ricopre $X \setminus U$, allora la stessa sottofamiglia dei V unita ad U ricopre X.

   Avendo dimostrato che ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito concludiamo che X è compatto.

3. Calcolare la forma di Jordan del seguente endomorfismo di $\mathbb{C}^5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 \\ -x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. La matrice associata ad f rispetto alla base canonica è

$$A \doteq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $\det(A - t\,\mathrm{Id}) = (1-t)(1+t)^4$. Lo spettro di f è quindi $\{\pm 1\}$ con 1 di molteplicità algebrica 1 e -1 di molteplicità algebrica 4. E' quindi chiaro che abbiamo un solo blocco di Jordan relativo ad 1 e questo blocco è 1×1.

Per decidere il numero e le dimensioni dei blocchi dell'autovalore -1, calcoliamo il rango di $A + \mathrm{Id}$ (cioè la molteplicità geometrica di -1). Vediamo subito che tale rango è 3 e deduciamo che ci sono due blocchi per -1. Abbiamo quindi due possibilità: due blocchi 2×2 o un blocco 3×3 e un blocco 1×1.

Per decidere calcoliamo il rango di $(A + \mathrm{Id})^2$. (Il prodotto di $A + \mathrm{Id}$ con se stessa si svolge agilmente componendo l'endomorfismo $f + \mathrm{Id}$ con se stesso e calcolando la matrice associata.) Con facili calcoli troviamo che questo rango è 1 e l'unica possibilità è avere due blocchi 2×2.

In conclusione la forma di Jordan di f è la matrice a blocchi $J_1(1) \oplus J_2(-1)^{\oplus 2}$.

4. Per quali valori del numero complesso a le due matrici seguenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono coniugate tra loro?

Soluzione. Sappiamo che due matrici complesse sono coniugate se e solo se hanno la stessa forma di Jordan (a meno dell'ordine dei blocchi). La seconda matrice è già nella sua forma di Jordan $J_2(1) \oplus J_1(1)$, calcoliamo quindi, al variare di $a \in \mathbb{C}$, la forma di Jordan della prima matrice.

Il polinomio caratteristico è $(1-t)^3$. Vi è quindi il solo autovalore 1. Inoltre il rango di $A - \mathrm{Id}$ è 0 se $a = 0$ e 1 se $a \neq 0$. Nel primo caso la matrice ha forma di Jordan $J_3(1)$ (cioè è l'identità) e quindi non è coniugata alla seconda matrice. Nel secondo caso la forma di Jordan è per forza $J_2(1) \oplus J_1(1)$, questo in quanto bisogna avere due blocchi le cui dimensioni sommate danno 3 e l'unica possibilità è $3 = 2 + 1$.

Quindi le due matrici sono coniugate tra loro se e solo se $a \neq 0$.