Esonero di Geometria IV

Topologia

15 giugno 2015

1. Uno spazio topologico si dice *omogeneo* se per ogni coppia di punti p e q di X esiste un omeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ con $f(p) = q$.

   (i) Dimostrare che se X è omogeneo allora il numero di componenti connesse di $X \setminus \{p\}$ non dipende dal punto p.

   (ii) Quali tra i seguenti spazi

   $$\mathbb{R}^2, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}, \quad \mathsf{S}^1$$

   è omogeneo?

   Soluzione.

   (i) Siano p e q due punti di X e sia $f : X \longrightarrow X$ un omeomorfismo con $f(p) = q$. Allora anche la restizione di f a $X \setminus \{p\} \longrightarrow X \setminus \{f(p)\} = X \setminus \{q\}$ è un omeomorfismo. In particolare il numero di componenti connesse di questi due spazi è lo stesso. Quindi tale numero è indipendente da p.

   (ii) Siano p, q due punti di $\mathbb{R}^2$, allora $v \longmapsto v - p + q$ è un omeomorfismo (in quanto è un polinomio di primo grado in ogni componente) di $\mathbb{R}^2$ e manda p in q. Ciò prova che $\mathbb{R}^2$ è omogeneo.

   Invece lo spazio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, cioè l'unione degli assi x e y, non è omogeneo. Infatti togliendo il punto $(0,0)$ si hanno quattro componenti connesse, mentre togliendo qualsiasi altri punto solo due componenti connesse.

   Infine S^1 è omogeneo. Ogni punto è individuato da un angolo e, dati due punti θ e φ, la mappa $\alpha \longmapsto \alpha - \theta + \varphi$ è un omeomorfismo che manda θ in φ.

2. (i) Provare che esiste un'applicazione suriettiva $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathsf{S}^1$.

   (ii) Dimostrare che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è omeomorfo a $\mathsf{S}^1 \times \mathbb{R}^+$. (Con $\mathbb{R}^+$ si indica il sottospazio dei numeri reali positivi.)

   Soluzione.

   (i) La mappa $v \longmapsto v/|v|$ è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (perché composizione di funzioni continue) e la sua immagine è contenuta in S^1 in quanto $v/|v|$ ha modulo 1. È chiaro che tale mappa è suriettiva visto che manda i vettori $v \in \mathsf{S}^1$ in sè stessi.

   (ii) Consideriamo l'applicazione

   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathsf{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \\ v & \longmapsto & (v/|v|, |v|) \end{array}$$

   Essa è continua perché è continua ogni sua componente. Ha per inversa la mappa $\mathsf{S}^1 \times \mathbb{R}^+ \ni (u, \lambda) \longmapsto \lambda u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, anche essa una funzione continua. Quindi f è un omeomorfismo.

3. Sia X uno spazio topologico con la proprietà: ogni famiglia non vuota di aperti ammette un elemento massimale per l'inclusione, cioè tale che

   $$\varnothing \neq \mathcal{F} \subseteq T_X \quad \Rightarrow \quad \exists U \in \mathcal{F} \mid \text{se } U \subseteq V \in \mathcal{F} \text{ allora } V = U.$$

   Provare che X è compatto.

Soluzione. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le unioni finite di elementi di $\mathcal{A}$. Essendo $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di aperti, essa ammette un elemento massimale, diciamo $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$, con $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{A}$.

Se esistesse $x \in X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n)$ allora, essendo $\mathcal{A}$ un ricoprimento, dovrebbe esistere $V \in \mathcal{A}$ con $x \in V$. Ma allora $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n \subsetneq U_1 \cup U_2 \cup \cdots U_n \cup V$ e questo ultimo insieme è ancora un elemento di $\mathcal{F}$ in quanto unione finita di elementi di $\mathcal{A}$. Ciò è chiaramente impossibile essendo $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n$ massimale in $\mathcal{F}$.

Abbiamo quindi provato che $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n = X$, cioè $\mathcal{A}$ ammette un sottoricoprimento finito. Lo spazio X è quindi compatto.

4. Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}^{n-1} \times [0,1] & \xrightarrow{f} & \mathsf{D}^n \\ (x,t) & \longmapsto & tx \end{array}$$

è continua, suriettiva e chiusa.

Soluzione. Lo spazio $\mathsf{S}^{n-1} \times [0,1]$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e l'applicazione f è continua in quanto è un polinomio di primo grado in ogni componente.

Ogni elemento di $v \in \mathsf{D}^n$ diverso da 0 si può scrivere come $v = |v| \cdot (v/|v|)$ e, visto che $v/|v| \in \mathsf{S}^{n-1}$ e $0 < |v| \leq 1$ abbiamo $(v/|v|, |v|) \in \mathsf{S}^{n-1} \times [0,1]$ e $v = f(v/|v|, |v|)$. Infine $0 = f(p, 0)$ con $p \in \mathsf{S}^{n-1}$ qualsiasi. Questo prova che f è suriettiva.

Per provare che f è chiusa osserviamo che un chiuso C di $\mathsf{S}^{n-1} \times [0,1]$ è compatto essendo tale spazio compatto. Ma allora $f(C)$ è un compatto dello spazio di Haussdorf D^n, quindi $f(C)$ è chiuso.

Esonero di Geometria IV

Algebra Lineare

15 giugno 2015

1. Calcolare la forma canonica di Jordan e il polinomio minimo del seguente endomorfismo

$$\mathbb{C}^6 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 + x_5 \\ x_3 - x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6.$$

L'endomorfismo f è semisemplice? è nilpotente?

Soluzione. Il campo $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, quindi ogni endomorfismo ammette una forma canonica di Jordan. La matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^6$, è triangolare superiore. Quindi anche $A - t\,\mathrm{Id}$ lo è e il polinomio caratteristico si calcola subito essere $(t-1)^4(t+1)^2$. Abbiamo due autovalori: 1, con dimensione totale dei blocchi 4, e -1 con dimensione totale 2.

La matrice $A - \mathrm{Id}$ ha rango 4. Ci sono quindi due 1–blocchi. Le possibilità sono quindi $4 = 2 + 2$ e $4 = 3 + 1$. Calcolando il rango di $(A - \mathrm{Id})^2$ otteniamo 2, questo ci dice che $n_{1,2} = 6 - 2 = 4$. Usando anche $n_{1,1} = 2$ visto sopra, concludiamo che abbiamo due blocchi 2×2 per l'autovalore 1.

Per l'autovalore -1, troviamo che il rango di $A + \mathrm{Id}$ è 5. C'è quindi un solo (-1)–blocco di dimensione 2×2.

In conclusione la forma canonica di Jordan è, a meno di permutazioni dei blocchi, $J_2(1) \oplus J_2(1) \oplus J_2(-1)$.

Il polinomio minimo di f è quindi $\mu(t) = (t-1)^2(t+1)^2$ e l'endomorfismo non è semisemplice, in quanto $\mu(t)$ ha radici multiple, e non è nilpotente in quanto ha autovalori non nulli.

2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $f : \mathbb{K}^8 \longrightarrow \mathbb{K}^8$ un endomorfismo nilpotente. Quale può essere il polinomio minimo di f sapendo che f ha nucleo di dimensione 3?

Soluzione. Essendo f nilpotente, il suo polinomio minimo $\mu(t)$ sarà t^k per qualche k. Visto che f ha nucleo di dimensione 3 e il nucleo è l'autospazio dell'autovalore 0, la forma canonica di Jordan ha 3 0–blocchi. Per le dimensioni $n_1, n_2, n_3 \geq 1$ di tali blocchi si ha $n_1 + n_2 + n_3 = 8$.

Questo prova che $n_1, n_2, n_3 < 7$, perchè se vi fosse un 7 allora $n_1 + n_2 + n_3$ sarebbe almeno 9. Inoltre non può essere $n_1, n_2, n_3 \leq 2$ perchè altrimenti $n_1 + n_2 + n_3 \leq 6$.

Ricordando che k è il massimo delle dimensioni dei blocchi abbiamo $3 \leq k \leq 6$ e tutti questi valori sono possibili. Infatti esistono le seguenti decomposizioni di 8 in tre interi $8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2$.

Il polinomio minimo di f può quindi essere t^3, t^4, t^5, t^6.

3. Siano $f, g : V \longrightarrow V$ due endomorfismi semplici dello spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$. Supponiamo che f e g commutino tra loro, che f abbia come autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ e che g abbia autovalori $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$. Quali possono essere gli autovalori di $f + g$ e $f \circ g$?

Soluzione. Gli endomorfismi f e g sono semisemplici e commutano, esiste quindi una base in cui le matrici rispettivamente associate A e B sono entrambe diagonali. Sulla diagonale di tali matrici troviamo gli autovalori.

Inoltre le matrici associata a $f+g$ e $f \circ g$ sono rispettivamente $A+B$ e AB. Si tratta ancora di matrici diagonali con sulla diagonale: per $A+B$ somme di autovalori di f e g, per AB prodotti di autovalori di f e g.

In conclusione gli autovalori di $f+g$ sono un sottoinsieme di tutte le somme $\lambda_i + \mu_j$ mentre quelli di $f \circ g$ sono un sottoinsieme di tutti i prodotti $\lambda_i \mu_j$.

4. Sia A una matrice $n \times n$ con coefficienti tutti 1 in un campo di caratteristica zero. Provare che A ammette forma canonica di Jordan e determinare tale forma.

   Soluzione. Avendo tutte le colonne uguali e non nulle, la matrice A ha rango 1. Quindi il nucleo dell'endomorfismo associato ad A rispetto alla base canonica ha dimensione $n-1$. L'autovalore 0 ha molteplicità geometrica $n-1$, ci sono quindi $n-1$ autovettori linearmente indipendenti $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ per 0.

   Inoltre per il vettore $v \doteq e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, si ha $Av = nv$ visto che $Ae_i = v$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Avendo il campo caratteristica 0, l'autovalore n è diverso da 0. In particolare v è linearmente indipendente da $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ in quanto autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

   Ma allora $v, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ è una base per lo spazio vettoriale n–dimensionale sul campo considerato. Se C è la matrice associata al cambiamente di base dalla base canonica a questa nuova base, allora CAC^{-1} è una matrice diagonale con sulla diagonale $n, 0, 0, \ldots, 0$.

   In particolare $CAC^{-1} = J_1(n) \oplus J_1(0)^{\oplus(n-1)}$ è in forma canonica di Jordan, che pertanto esiste.

Scritto di Geometria IV

15 giugno 2015

1. Uno spazio topologico si dice *omogeneo* se per ogni coppia di punti p e q di X esiste un omeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ con $f(p) = q$.

   (i) Dimostrare che se X è omogeneo allora il numero di componenti connesse di $X \setminus \{p\}$ non dipende dal punto p.

   (ii) Quali tra i seguenti spazi

   $$\mathbb{R}^2, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}, \quad \mathsf{S}^1$$

   è omogeneo?

2. Dimostrare che l'applicazione

   $$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}^{n-1} \times [0, 1] & \stackrel{f}{\longrightarrow} & \mathsf{D}^n \\ (x, t) & \longmapsto & tx \end{array}$$

   è continua, suriettiva e chiusa.

3. Calcolare la forma canonica di Jordan e il polinomio minimo del seguente endomorfismo

   $$\mathbb{C}^6 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \stackrel{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 + x_5 \\ x_3 - x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6.$$

   L'endomorfismo f è semisemplice? è nilpotente?

4. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $f : \mathbb{K}^8 \longrightarrow \mathbb{K}^8$ un endomorfismo nilpotente. Quale può essere il polinomio minimo di f sapendo che f ha nucleo di dimensione 3?