Esonero di Geometria IV, algebra lineare

23 luglio 2013

1. Calcolare la forma di Jordan del seguente endomorfismo di $\mathbb{C}^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_2 + x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico di A è $(1-t)^2(1+t)^2$, quindi lo spettro di A è $\{\pm 1\}$. La molteplicità geometrica di 1 è $4 - rg(A - \mathrm{Id}) = 4 - 3 = 1$, vi è quindi un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 1 e tale blocco ha dimensione la molteplicità algebrica di 1, cioè 2. Allo stesso modo si ragiona per -1 e si conclude, allo stesso modo, che vi è un solo blocco di dimensione 2. La forma di Jordan di A è quindi $J_2(1) \oplus J_2(-1)$.

2. Sia $A = J_5(0)$ un blocco di Jordan 5×5 con autovalore 0.

(i) Provare che $U = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle_{\mathbb{C}}$ e $V = \langle e_2, e_4 \rangle_{\mathbb{C}}$ sono sottospazi di $\mathbb{C}^5$ invarianti per A^2.

(ii) Determinare la forma di Jordan di A^2.

Soluzione.

(i) Poniamo $e_k = 0$ per ogni $k \leq 0$. Visto che $Ae_h = e_{h-1}$ per $h = 1, 2, 3, 4$ abbiamo $A^2 e_h = Ae_{h-1} = e_{h-2}$. In particolare $A^2 e_1 = 0$, $A^2 e_3 = e_1$, $A^2 e_5 = e_3$ e quindi U è A^2–invariante. Allo stesso modo $A^2 e_2 = 0$, $A^2 e_4 = e_2$ e quindi anche V è A^2–invariante.

(iii) Per quanto visto al punto precedente nella base e_1, e_3, e_5, e_2, e_4 l'applicazione lineare $\mathbb{C}^5 \ni v \longmapsto A^2 v \in \mathbb{C}^5$, associata alla matrice A^2, è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è quindi in forma di Jordan. Per l'unicità della forma di Jordan la matrice trovata, cioè $J_3(0) \oplus J_2(0)$ è la forma di Jordan di A^2.

3. Sia $A \in \mathsf{GL}(5, \mathbb{C})$ una matrice tale che $A^3 = 2A^2 - A$. Trovare le possibili forme di Jordan di A.

Soluzione. Il polinomio $t^3 - 2t^2 + t = t(t-1)^2$ è annullato da A, quindi il polinomio minimo di A divide tale polinomio. Ma 0 non può essere un autovalore di A visto che A è invertibile. Questo prova che A ha 1 come solo autovalore. Inoltre la dimensione massima di un 1–blocco è minore o uguale a 2. Le possibili forme di Jordan sono quindi: $J_1(1)^{\oplus 5}$, $J_2(1) \oplus J_1(1)^{\oplus 3}$, $J_2(1)^{\oplus 2} \oplus J_1(1)$.

Infine tutte e tre le precedenti forme di Jordan sono invertibili e annullano il polinomio $t^3 - 2t^2 + t$ e quindi verificano le condizioni date.

4. Sia A una matrice 2×2 reale di traccia $2k$ e determinante 1.

(i) Per quali valori di k la matrice A ammette una forma canonica di Jordan su $\mathbb{R}$?

(ii) Per quali valori di k la matrice A è sicuramente semisemplice?

Soluzione.

(i) Il polinomio caratteristico di A è $t^2 - 2kt + 1$. La matrice A ammette una forma di Jordan su $\mathbb{R}$ se e solo il suo spettro è contenuto in $\mathbb{R}$, cioè se e solo se il discriminante $\Delta = 4(k^2 - 1) \geq 0$. Cioè se $k \leq -1$ o $k \geq 1$.

(ii) Inoltre se $\Delta > 0$, cioè se $k < -1$ o $k > 1$, allora abbiamo due autovalori distinti e quindi A è semisemplice.

Prova scritta di Geometria IV

23 luglio 2013

1. sia $X = C^0([0,1])$ lo spazio delle funzioni continue sull'intervallo chiuso $[0,1]$.

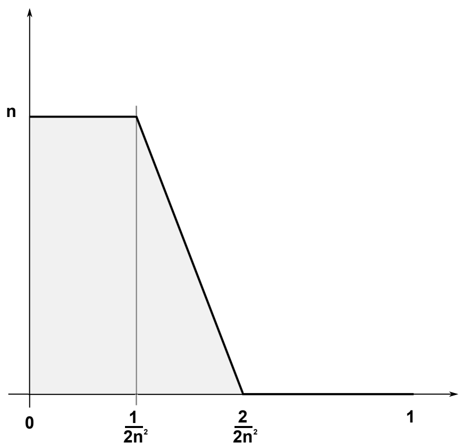
   (i) Provare che
   $$X \times X \ni (f,g) \xrightarrow{d} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \in \mathbb{R}$$
   è una distanza su X.

   (ii) Trovare una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni continue su $[0,1]$ tali che
   $$\sup_{x\in[0,1]} f(x) \geq n \quad \text{e} \quad d(f_n, 0) \leq \frac{1}{n}$$
   per ogni n.

   Soluzione.

   (i) Da $|f(x) - g(x)| \geq 0$ abbiamo $d(f,g) \geq 0$ per ogni $f, g \in X$. Chiaramente se $d(f,g) > 0$ allora la funzione integranda non è identicamente nulla, cioè $f \neq g$. Infine se $f \neq g$ allora esiste un $\epsilon > 0$ e un punto $x \in [0,1]$ per cui $|f(x) - g(x)| > \epsilon$. Ma allora, essendo f e g continue, esiste un $\delta > 0$ per cui $|f(y) - g(y)| > \epsilon/2$ per ogni $y \in [x - \delta, x + \delta]$. Quindi $d(f,g) \geq \delta\epsilon > 0$.
   È chiaro che $d(f,g)$ è simmetrica visto che $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$. Infine la disuguaglianza triangolare segue dalla disuguaglianza triangolare per il modulo e dalla linearità dell'integrale.

   (ii) La successione di funzioni continue così definita
   $$[0,1] \ni x \xrightarrow{f_n} \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n^2} \\ -2n^3(x - \frac{1}{n^2}) & \text{se } \frac{1}{2n^2} \leq x \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
   verifica le condizioni richieste.



2. Siano $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ due topologie su X. Dimostrare che

(i) se $C \subseteq X$ è compatto rispetto a $\mathcal{T}_2$ allora è compatto anche rispetto a $\mathcal{T}_1$,

(ii) se X è compatto rispetto a $\mathcal{T}_2$ e di Hausdorff rispetto a $\mathcal{T}_1$ allora $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Soluzione.

(i) Se $\mathcal{F}$ è un ricoprimento aperto di C rispetto a $\mathcal{T}_1$ allora è anche un ricoprimento aperto rispetto a $\mathcal{T}_2$ visto che $\mathcal{T}_1$ è meno fine di $\mathcal{T}_2$. Allora $\mathcal{F}$ ammette un sottoricoprimento finito visto che C è compatto rispetto a $\mathcal{T}_2$.

(ii) Proviamo che se C è chiuso per $\mathcal{T}_2$ è anche un chiuso per $\mathcal{T}_1$; quindi anche gli aperti di $\mathcal{T}_2$ sono aperti di $\mathcal{T}_1$ e quindi $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ visto che $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ per ipotesi.

Essendo X compatto per $\mathcal{T}_2$ e C chiuso in X per $\mathcal{T}_2$ allora C è compatto per $\mathcal{T}_2$. Ma allora per il punto precedente C è compatto anche rispetto a $\mathcal{T}_1$. Ora, essendo X di Hausdorff rispetto a $\mathcal{T}_1$, C è un chiuso per $\mathcal{T}_1$ perchè compatto.

3. Calcolare la forma di Jordan del seguente endomorfismo di $\mathbb{C}^4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_2 + x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix}$$

4. Sia A una matrice 2×2 reale di traccia $2k$ e determinante 1.

(i) Per quali valori di k la matrice A ammette una forma canonica di Jordan su $\mathbb{R}$?

(ii) Per quali valori di k la matrice A è sicuramente semisemplice?