Scritto di Geometria IV

26 febbraio 2016

1. Siano A, B, C, D spazi topologici e siano $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow D$ due funzioni continue. Provare che la funzione
$$A \times B \ni (a, b) \longmapsto (f(a), g(b)) \in C \times D$$
è continua.

   Soluzione. La topologia prodotto di $C \times D$ ha come base gli aperti $U \times V$ al variare di U tra gli aperti di C e V tra gli aperti di D. Quindi, se W è un aperto di $C \times D$, esistono U_i e V_i aperti di C e D rispettivamente, con i in un insieme di indici $\mathcal{I}$, per cui $W = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \times V_i$. Ma allora la controimmagine di W con la funzione assegnata è $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(U_i) \times g^{-1}(V_i)$ ed è quindi un aperto di $A \times B$ in quanto $f^{-1}(U_i)$ e $g^{-1}(V_i)$ sono aperti di A e B, rispettivamente, essendo f e g continue. Abbiamo provato che la controimmagine di ogni aperto è aperta, la funzione è quindi continua.

2. Sia X uno spazio topologico compatto e sia $U \subseteq X$ un suo aperto. Se C_i, con $i \in \mathcal{I}$, è una famiglia di chiusi di X tali che $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} C_i \subseteq U$ allora esistono un numero finito di indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tali che $C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_n} \subseteq U$.

   Soluzione. La famiglia data da U e dagli aperti $X \setminus C_i$, $i \in \mathcal{I}$ è un ricoprimento aperto di X visto che l'intersezione dei C_i è contenuta in U. Essendo X compatto esiste una sottofamiglia finita che è già un ricoprimento, cioè esistono $i_1, i_2, \ldots i_n$ tali che $(X \setminus C_{i_1}) \cup (X \setminus C_{i_2}) \cup \cdots \cup (X \setminus C_{i_n}) \cup U = X$. Passando ai complementari troviamo $C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \cdots \cap C_{i_n} \subseteq U$.

3. Determinare la forma canonica di Jordan del seguente endomorfismo
$$\mathbb{C}^5 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \\ u \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5.$$

   Soluzione. La matrice associata all'endomorfismo f nella basa canonica di $\mathbb{C}^5$ è
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
e quindi il polinomio caratteristico di f è $-(t-1)^3(t+1)^2$. Ne deduciamo che l'endomorfismo ha gli autovalori 1, con molteplicità algebrica 3, e -1 con molteplicità algebrica 2. Calcolando il rango di $A - \mathrm{Id}$ e quello di $A + \mathrm{Id}$ troviamo che l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica 3 mentre l'autovalare -1 ha molteplicità geometrica 2. Essendo tutte le molteplicità algebriche uguali a quelle geometriche, l'endomorfismo è semplice e la sua forma canonica di Jordan è quindi $J_1(1)^{\oplus 3} \oplus J_1(-1)^{\oplus 2}$.

4. Sia $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un endomorfismo che non ha 1 come autovalore e tale che $f^3(v) = v$ per ogni $v \in \mathbb{C}^5$. Trovare le possibili forme canoniche di Jordan di f.

Soluzione. Visto che $f^3 = \mathrm{Id}$ il polinomio minimo di f divide $t^3 - 1$. Quest'ultimo polinomio ha per radici $1, \zeta, \bar{\zeta}$ con $\zeta = (-1 + i\sqrt{3})/2$, tutte radici con molteplicità 1. Ma allora anche il polinomio minimo di f ha radici distinte, l'endomorfismo è quindi semisemplice. I suoi blocchi di Jordan saranno allora 1×1 e, non potendoci essere l'autovalore 1, le possibili forme di Jordan sono $J_1(\zeta)^{\oplus k} \oplus J_1(\bar{\zeta})^{\oplus(n-k)}$ con $k = 0, 1, \ldots, n$.